第十五讲
Green 函数 (一)

北京大学　物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§20.1 — 20.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§12.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§14.1, 14.2, 14.3

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

先举一个静电场的例子

- 无界空间中有一定电荷分布，电荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$
- 在坐标为$\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$的体元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$内的电量即为$\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$，它在空间$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$点的电势是

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

- 根据电势叠加原理，把空间中的全部电荷产生的电势叠加起来，就得到在$\boldsymbol{r}$点的总电势为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

先举一个静电场的例子

- 无界空间中有一定电荷分布，电荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$
- 在坐标为$\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$的体元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$内的电量即为$\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$，它在空间$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$点的电势是

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

- 根据电势叠加原理，把空间中的全部电荷产生的电势叠加起来，就得到在$\boldsymbol{r}$点的总电势为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

先举一个静电场的例子

- 无界空间中有一定电荷分布，电荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$
- 在坐标为$\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$的体元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$内的电量即为$\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$，它在空间$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$点的电势是
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$
- 根据电势叠加原理，把空间中的全部电荷产生的电势叠加起来，就得到在$\boldsymbol{r}$点的总电势为
$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

这个结果说明：

只要知道了单位点电荷在空间的电势分布，那么，通过电荷的分割与叠加，就可以得到任意电荷分布时的电势

这种做法只不过是利用了偏微分方程的线性性质

这个结果说明:

只要知道了单位点电荷在空间的电势分布，那么，通过电荷的分割与叠加，就可以得到任意电荷分布时的电势

这种做法只不过是利用了偏微分方程的线性性质

这个结果说明：

只要知道了单位点电荷在空间的电势分布，那么，通过电荷的分割与叠加，就可以得到任意电荷分布时的电势

这种做法只不过是利用了偏微分方程的线性性质

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

在有界空间——

- 原则上仍然可以把空间内的电荷无限分割
- 由于边界条件的制约，在边界面上也会有一定的(单层或偶极层的)感生面电荷分布，也需要将这些面电荷无限分割
- 为了唯一地确定(有界空间内)点电荷的电势，也需要指定适当的边界条件
- 问题是：如何通过(适当边界条件下的)点电荷电势的叠加，而给出任意电荷分布在任意边界条件下的电势

在有界空间——

- 原则上仍然可以把空间内的电荷无限分割
- 由于边界条件的制约，在边界面上也会有一定的(单层或偶极层的)感生面电荷分布，也需要将这些面电荷无限分割
- 为了唯一地确定(有界空间内)点电荷的电势，也需要指定适当的边界条件
- 问题是：如何通过(适当边界条件下的)点电荷电势的叠加，而给出任意电荷分布在任意边界条件下的电势

在有界空间——

- 原则上仍然可以把空间内的电荷无限分割
- 由于边界条件的制约，在边界面上也会有一定的(单层或偶极层的)感生面电荷分布，也需要将这些面电荷无限分割
- 为了唯一地确定(有界空间内)点电荷的电势，也需要指定适当的边界条件
- 问题是：如何通过(适当边界条件下的)点电荷电势的叠加，而给出任意电荷分布在任意边界条件下的电势

在有界空间——

- 原则上仍然可以把空间内的电荷无限分割
- 由于边界条件的制约，在边界面上也会有一定的(单层或偶极层的)感生面电荷分布，也需要将这些面电荷无限分割
- 为了唯一地确定(有界空间内)点电荷的电势，也需要指定适当的边界条件
- 问题是：如何通过(适当边界条件下的)点电荷电势的叠加，而给出任意电荷分布在任意边界条件下的电势

数学问题：在有界空间——

用定解问题

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

适当的边界条件

的解$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$叠加出

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in V$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

的解$u(\boldsymbol{r})$，即用$\rho(\boldsymbol{r})$, $f(\Sigma)$及$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$表示出$u(\boldsymbol{r})$

数学问题：在有界空间——

用定解问题

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

适当的边界条件

的解$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$叠加出

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in V$$

$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

的解$u(\boldsymbol{r})$，即用$\rho(\boldsymbol{r})$, $f(\Sigma)$及$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$表示出$u(\boldsymbol{r})$

数学问题：在有界空间 ——

用定解问题

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

适当的边界条件

的解$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$叠加出

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in V$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

的解$u(\boldsymbol{r})$，即用$\rho(\boldsymbol{r})$, $f(\Sigma)$及$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$表示出$u(\boldsymbol{r})$

数学工具

- Green第一公式

$$\iiint_V u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma u\nabla v\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} - \iiint_V \nabla u\cdot\nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 其中$f(\boldsymbol{r})\equiv f(x,y,z)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Σ是V的边界面， 并且规定外法线方向为正

数学工具

- Green第一公式

$$\iiint_V u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma u\nabla v\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} - \iiint_V \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 其中$f(\boldsymbol{r})\equiv f(x,y,z)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Σ是V的边界面，并且规定外法线方向为正

数学工具

- Green第二公式

$$\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) - v(\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \iint\limits_\Sigma \left[u\nabla v - v\nabla u\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

基本步骤

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \times u(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \times G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

$$\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

基本步骤

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \times u(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \times G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

$$\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

基本步骤

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \times u(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \times G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

$$\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

基本步骤

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \times u(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \times G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

$$\iint_{\Sigma}\left[u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla u(\boldsymbol{r})\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \left[u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

基本步骤

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \times u(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \times G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \left[u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla u(\boldsymbol{r})\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[u(\boldsymbol{r}') - \iiint\limits_{V} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]$$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \varepsilon_0 \iint\limits_\Sigma \left[u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla u(\boldsymbol{r})\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

面积分中：

- 第一项中，$u(\boldsymbol{r})$在边界面Σ上的数值已知(边界条件)
- 第二项中，$\nabla u(\boldsymbol{r})$在边界面上的数值未知
- 所以必须对$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$加上齐次边界条件 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_\Sigma = 0$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$-\varepsilon_0 \iint\limits_\Sigma \left[u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla u(\boldsymbol{r})\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

面积分中：

- 第一项中，$u(\boldsymbol{r})$在边界面Σ上的数值已知(边界条件)
- 第二项中，$\nabla u(\boldsymbol{r})$在边界面上的数值未知
- 所以必须对$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$加上齐次边界条件 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_\Sigma = 0$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$-\varepsilon_0 \iint\limits_\Sigma \left[u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla u(\boldsymbol{r})\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

面积分中：

- 第一项中，$u(\boldsymbol{r})$在边界面Σ上的数值已知(边界条件)
- 第二项中，$\nabla u(\boldsymbol{r})$在边界面上的数值未知
- 所以必须对$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$加上齐次边界条件 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_\Sigma = 0$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_{V} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$-\varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma} \left[u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla u(\boldsymbol{r})\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

面积分中：

- 第一项中，$u(\boldsymbol{r})$在边界面Σ上的数值已知(边界条件)
- 第二项中，$\nabla u(\boldsymbol{r})$在边界面上的数值未知
- 所以必须对$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$加上齐次边界条件
  $$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma} = 0$$

结论

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{\Sigma} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \varepsilon_0 \iint\limits_\Sigma u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\nabla' G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

$$= \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})}{\partial n'}\mathrm{d}\Sigma'$$

结论

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{\Sigma} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_{V} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma} u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\nabla' G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

$$= \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})}{\partial n'}\mathrm{d}\Sigma'$$

结论

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{\Sigma} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \varepsilon_0 \iint\limits_\Sigma u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\nabla' G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

$$= \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})}{\partial n'}\mathrm{d}\Sigma'$$

结论

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma} u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\nabla' G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

$$= \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})}{\partial n'}\mathrm{d}\Sigma'$$

讨论

- $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点不连续， 根本不能应用Green公式；上面得到的结果是否正确?
- 为了弥补这一缺陷，可以将$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$所满足的方程修改为
$$\nabla^2 G_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$
右端的电荷密度函数$\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$是足够好的连续函数， 在$\boldsymbol{r}'$附近一定尺度内明显不为0，而总电量为1个单位；当$n\to\infty$时
$$\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \to \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
- 这样就可以应用Green公式

讨论

- $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点不连续，根本不能应用Green公式；上面得到的结果是否正确？
- 为了弥补这一缺陷，可以将$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$所满足的方程修改为

$$\nabla^2 G_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$

右端的电荷密度函数$\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$是足够好的连续函数，在$\boldsymbol{r}'$附近一定尺度内明显不为0，而总电量为1个单位；当$n\to\infty$时

$$\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\to\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

- 这样就可以应用Green公式

讨论

- $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点不连续，根本不能应用Green公式；上面得到的结果是否正确?
- 为了弥补这一缺陷，可以将$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$所满足的方程修改为
$$\nabla^2 G_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$
右端的电荷密度函数$\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$是足够好的连续函数，在$\boldsymbol{r}'$附近一定尺度内明显不为0，而总电量为1个单位；当$n\to\infty$时
$$\delta_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\to\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
- 这样就可以应用Green公式

讨论

- 重复上面的做法，然后再令$n \to \infty$
- 因此，上面得到的结果是严格的，是正确的
- 引入δ函数的好处恰恰就在于略去这种极限过程，恰恰就在于可以把δ函数当成连续函数来处理
- 另外一种严格的做法是把点电荷所在的r'点的附近挖去一个小体积，在这个新的空间区域中应用Green公式(必须注意，现在的边界面除了原来的Σ之外，还有在r'点处的界面)，然后再令这个小体积趋于0

讨论

- 重复上面的做法，然后再令$n \to \infty$
- 因此，上面得到的结果是严格的，是正确的
- 引入δ函数的好处恰恰就在于略去这种极限过程，恰恰就在于可以把δ函数当成连续函数来处理
- 另外一种严格的做法是把点电荷所在的r'点的附近挖去一个小体积，在这个新的空间区域中应用Green公式(必须注意，现在的边界面除了原来的Σ之外，还有在r'点处的界面)，然后再令这个小体积趋于0

讨论

- 重复上面的做法，然后再令$n \to \infty$
- 因此，上面得到的结果是严格的，是正确的
- 引入δ函数的好处恰恰就在于略去这种极限过程，恰恰就在于可以把δ函数当成连续函数来处理
- 另外一种严格的做法是把点电荷所在的r'点的附近挖去一个小体积，在这个新的空间区域中应用Green公式(必须注意，现在的边界面除了原来的Σ之外，还有在r'点处的界面)，然后再令这个小体积趋于0

讨论

- 重复上面的做法，然后再令$n \to \infty$
- 因此，上面得到的结果是严格的，是正确的
- 引入δ函数的好处恰恰就在于略去这种极限过程，恰恰就在于可以把δ函数当成连续函数来处理
- 另外一种严格的做法是把点电荷所在的$\boldsymbol{r}'$点的附近挖去一个小体积，在这个新的空间区域中应用Green公式(必须注意，现在的边界面除了原来的Σ之外，还有在$\boldsymbol{r}'$点处的界面)，然后再令这个小体积趋于0

讨论

以上通过静电场的实例引入了Poisson方程在第一类边界条件下(简称Poisson方程的第一边值问题)的Green函数

简言之，所谓Green函数就是单位点电荷在齐次边界条件下的电势．

对于其他类型的边界条件，原则上也可以类似地讨论

讨论

以上通过静电场的实例引入了Poisson方程在第一类边界条件下(简称Poisson方程的第一边值问题)的Green函数

简言之，所谓Green函数就是单位点电荷在齐次边界条件下的电势.

对于其他类型的边界条件，原则上也可以类似地讨论

讨论

以上通过静电场的实例引入了Poisson方程在第一类边界条件下(简称Poisson方程的第一边值问题)的Green函数

简言之，所谓Green函数就是单位点电荷在齐次边界条件下的电势.

对于其他类型的边界条件，原则上也可以类似地讨论

讨论

从数学上说，不含时间(稳定问题)的偏微分方程(Laplace方程, Poisson方程, Helmholtz 方程 $\cdots\cdots$) 在一定边界条件下的Green函数就可以定义为一个特殊的定解问题的解:

- 方程和原来定解问题的方程一样，只是非齐次项改为δ函数(点源)
- 同种类型的齐次边界条件

讨论

从数学上说，不含时间(稳定问题)的偏微分方程(Laplace方程, Poisson方程, Helmholtz 方程 ……) 在一定边界条件下的Green函数就可以定义为一个特殊的定解问题的解：

- 方程和原来定解问题的方程一样，只是非齐次项改为δ函数(点源)
- 同种类型的齐次边界条件

讨论

从数学上说，不含时间(稳定问题)的偏微分方程(Laplace方程, Poisson方程, Helmholtz 方程 $\cdots\cdots$) 在一定边界条件下的Green函数就可以定义为一个特殊的定解问题的解：

- 方程和原来定解问题的方程一样，只是非齐次项改为δ函数(点源)
- 同种类型的齐次边界条件

- 但是，在某些特殊情形下，这样定义的Green函数本身可能无解
- 例如对于上面的Poisson方程定解问题，若边界条件改为$\left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(\Sigma)$
- 则按照上面的讨论，Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在边界面上必须满足齐次的第二类边界条件

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$$

- $\displaystyle\iiint_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma = 0$
- 与Gauss定理矛盾

- 但是，在某些特殊情形下，这样定义的Green函数本身可能无解
- 例如对于上面的Poisson方程定解问题，若边界条件改为$\left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(\Sigma)$
- 则按照上面的讨论，Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在边界面上必须满足齐次的第二类边界条件
$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$$
- $\displaystyle\iiint\limits_{V} \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma = 0$
- 与Gauss定理矛盾

- 但是，在某些特殊情形下，这样定义的Green函数本身可能无解
- 例如对于上面的Poisson方程定解问题，若边界条件改为$\left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(\Sigma)$
- 则按照上面的讨论，Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在边界面上必须满足齐次的第二类边界条件
$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$$
- $$\iiint_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\Sigma} \frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma = 0$$
- 与Gauss定理矛盾

- 但是，在某些特殊情形下，这样定义的Green函数本身可能无解
- 例如对于上面的Poisson方程定解问题，若边界条件改为$\left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\Sigma}=f(\Sigma)$
- 则按照上面的讨论，Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在边界面上必须满足齐次的第二类边界条件
$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0$$
- $\displaystyle\iiint\limits_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma=0$
- 与Gauss定理矛盾

- 但是，在某些特殊情形下，这样定义的Green函数本身可能无解
- 例如对于上面的Poisson方程定解问题，若边界条件改为$\left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(\Sigma)$
- 则按照上面的讨论，Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在边界面上必须满足齐次的第二类边界条件
$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$$
- $$\iiint_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma = 0$$
- 与Gauss定理矛盾

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

1. Green函数在点源附近的行为

不妨仍然用静电场的语言来描述Poisson方程第一边值问题的Green函数

在空间V中的点电荷，必然要在边界面上产生一定的感生(面)电荷分布，从而使边界面成为等位面． 当边界接地时，又会得有一部分电荷流失或流入，使得边界面的电势与地相等(取为0)

因此，决定Green函数的定解问题又可以(在V内)等价地写成无界空间中的Poisson方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \sigma(\Sigma)\right]$$

其中$\sigma(\Sigma)$是边界面Σ上的感生面电荷密度

1. Green函数在点源附近的行为

不妨仍然用静电场的语言来描述Poisson方程第一边值问题的Green函数

在空间V中的点电荷，必然要在边界面上产生一定的感生(面)电荷分布，从而使边界面成为等位面．当边界接地时，又会得有一部分电荷流失或流入，使得边界面的电势与地相等(取为0)

因此，决定Green函数的定解问题又可以(在V内)等价地写成无界空间中的Poisson方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \sigma(\Sigma)\right]$$

其中$\sigma(\Sigma)$是边界面Σ上的感生面电荷密度

1. Green函数在点源附近的行为

不妨仍然用静电场的语言来描述Poisson方程第一边值问题的Green函数

在空间V中的点电荷，必然要在边界面上产生一定的感生(面)电荷分布，从而使边界面成为等位面．当边界接地时，又会得有一部分电荷流失或流入，使得边界面的电势与地相等(取为0)

因此，决定Green函数的定解问题又可以(在V内)等价地写成无界空间中的Poisson方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \sigma(\Sigma)\right]$$

其中$\sigma(\Sigma)$是边界面Σ上的感生面电荷密度

1. Green函数在点源附近的行为

相应地，(定义在V内的)Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \underbrace{G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{单位点电荷}\\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\text{的电势}}} + \underbrace{g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{边界面上感生}\\ \text{电荷}\sigma(\Sigma)\text{的电势}}}$$

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点不连续

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\Sigma)$$

感生电荷$\sigma(\Sigma)$只分布在曲面Σ上，所以$g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$及其一阶偏导数在曲面$\Sigma$之外(特别是在$V$内)处处连续

1. Green函数在点源附近的行为

相应地，(定义在V内的)Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \underbrace{G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{单位点电荷}\\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\text{的电势}}} + \underbrace{g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{边界面上感生}\\ \text{电荷}\sigma(\Sigma)\text{的电势}}}$$

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点不连续

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\Sigma)$$

感生电荷$\sigma(\Sigma)$只分布在曲面Σ上，所以$g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$及其一阶偏导数在曲面$\Sigma$之外(特别是在$V$内)处处连续

1. Green函数在点源附近的行为

相应地，(定义在V内的)Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \underbrace{G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{单位点电荷}\\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\text{的电势}}} + \underbrace{g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{边界面上感生}\\ \text{电荷}\sigma(\Sigma)\text{的电势}}}$$

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点不连续

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\Sigma)$$

感生电荷$\sigma(\Sigma)$只分布在曲面Σ上，所以$g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$及其一阶偏导数在曲面$\Sigma$之外(特别是在$V$内)处处连续

1. Green函数在点源附近的行为

所以Poisson方程第一边值问题的Green函数可写成

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

对于第三类边界条件，也有同样的结果．只不过$g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的具体表达式会得有所不同

1. Green函数在点源附近的行为

所以Poisson方程第一边值问题的Green函数可写成

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$$

对于第三类边界条件，也有同样的结果．只不过$g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的具体表达式会得有所不同

1. Green函数在点源附近的行为

对于其他类型的稳定问题，例如Helmholtz方程的Green函数

$$\nabla^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+k^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$

$$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{\Sigma}=0$$

也可证明它们的Green函数具有和Poisson方程的Green函数类似的连续性质

除了$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点外，$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$V$内是处处连续的

而$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点附近 $\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\sim\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$

1. Green函数在点源附近的行为

对于其他类型的稳定问题，例如Helmholtz方程的Green函数

$$\nabla^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+k^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$

$$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma}=0$$

也可证明它们的Green函数具有和Poisson方程的Green函数类似的连续性质

除了$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点外，$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$V$内是处处连续的

而$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点附近 $\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\sim\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$

1. Green函数在点源附近的行为

对于其他类型的稳定问题，例如Helmholtz方程的Green函数

$$\nabla^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+k^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$

$$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{\Sigma}=0$$

也可证明它们的Green函数具有和Poisson方程的Green函数类似的连续性质

除了$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点外，$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$V$内是处处连续的

而$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点附近 $\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\sim\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$

1. Green函数在点源附近的行为

对于其他类型的稳定问题，例如Helmholtz方程的Green函数

$$\nabla^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+k^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$

$$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma}=0$$

也可证明它们的Green函数具有和Poisson方程的Green函数类似的连续性质

除了$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点外，$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$在$V$内是处处连续的

而$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点附近 $\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\sim\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$

1. Green函数在点源附近的行为

三维空间中Green函数在点源处的行为，和一维空间中Green函数不同

- 一维空间中的Green函数是处处连续的，而一阶导数不连续
- 这是容易理解的，因为“点源”的性质并不相同，一维空间中的点源实际上是三维空间中的面源
- 不难预料，二维空间中的Green函数也应该表现出不同的行为

1. Green函数在点源附近的行为

三维空间中Green函数在点源处的行为，和一维空间中Green函数不同

- 一维空间中的Green函数是处处连续的，而一阶导数不连续
- 这是容易理解的，因为“点源”的性质并不相同，一维空间中的点源实际上是三维空间中的面源
- 不难预料，二维空间中的Green函数也应该表现出不同的行为

1. Green函数在点源附近的行为

三维空间中Green函数在点源处的行为，和一维空间中Green函数不同

- 一维空间中的Green函数是处处连续的，而一阶导数不连续
- 这是容易理解的，因为“点源”的性质并不相同，一维空间中的点源实际上是三维空间中的面源
- 不难预料，二维空间中的Green函数也应该表现出不同的行为

1. Green函数在点源附近的行为

三维空间中Green函数在点源处的行为，和一维空间中Green函数不同

- 一维空间中的Green函数是处处连续的，而一阶导数不连续
- 这是容易理解的，因为“点源”的性质并不相同，一维空间中的点源实际上是三维空间中的面源
- 不难预料，二维空间中的Green函数也应该表现出不同的行为

1. Green函数在点源附近的行为

二维空间中的Poisson方程第一边值问题，它的Green函数$G(x,y;x',y')$，是定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]G(x,y;x',y')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(x-x')\delta(y-y')$$

$$(x,y),(x',y')\in S$$

$$G(x,y;x',y')\big|_C=0$$

的解，其中C是平面区域S的边界

1. Green函数在点源附近的行为

容易求得

$$G(x,y;x',y') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} + g(x,y;x',y')$$

- 第一项是单位点电荷在无界空间中的电势(还可加上一个常数，取决于电势零点的选取)，在“点源”（三维空间中的线源）$\delta(x-x')\delta(y-y')$处对数发散
- 第二项$g(x,y;x',y')$是边界上的感生电荷产生的电势，在S内处处连续

1. Green函数在点源附近的行为

容易求得

$$G(x,y;x',y') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} + g(x,y;x',y')$$

- 第一项是单位点电荷在无界空间中的电势(还可加上一个常数，取决于电势零点的选取)，在“点源”(三维空间中的线源) $\delta(x-x')\delta(y-y')$处对数发散
- 第二项$g(x,y;x',y')$是边界上的感生电荷产生的电势，在S内处处连续

1. Green函数在点源附近的行为

容易求得

$$G(x,y;x',y') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} + g(x,y;x',y')$$

- 第一项是单位点电荷在无界空间中的电势(还可加上一个常数，取决于电势零点的选取)，在“点源”(三维空间中的线源) $\delta(x-x')\delta(y-y')$处对数发散
- 第二项$g(x,y;x',y')$是边界上的感生电荷产生的电势，在S内处处连续

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

2. Green函数的对称性

先考察一下前面得到的解式

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\nabla' G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\Big|_{\Sigma'} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

2. Green函数的对称性

先考察一下前面得到的解式

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$
$$- \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\nabla' G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\Big|_{\Sigma'} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

这个结果在物理意义上有费解之处：右端的体积分中， $G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})$代表$\boldsymbol{r}$处的单位点电荷在$\boldsymbol{r}'$处的电势， 它乘上在观测点$\boldsymbol{r}'$处的电荷$\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$， 并对观测点积分，却给出$\boldsymbol{r}$处的电势

2. Green函数的对称性

先考察一下前面得到的解式

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$- \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\nabla' G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\Big|_{\Sigma'} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

直观的叠加原理告诉我们，体积分一项的正确形式应为

$$\iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

2. Green函数的对称性

先考察一下前面得到的解式

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$- \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\nabla' G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\Big|_{\Sigma'} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

这暗示我们，应该有

$$G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}')$$

2. Green函数的对称性

先考察一下前面得到的解式

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V'} G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ - \varepsilon_0 \iint_{\Sigma'} f(\Sigma')\nabla' G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r})\Big|_{\Sigma'} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}'$$

这暗示我们，应该有

$$G(\boldsymbol{r}'; \boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}')$$

无界空间的Green函数的确具有这种对称性

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma} = 0$$

Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\Big|_{\Sigma} = 0$$

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma} = 0$$

Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'' \in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\Big|_{\Sigma} = 0$$

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{\Sigma}=0$$

Green函数$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}''\in V$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\big|_{\Sigma}=0$$

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\\
&\qquad=-\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\Big]
\end{aligned}$$

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$$
$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\Big]$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$= \iiint\limits_V \Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\Big]$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}'')-G(\boldsymbol{r}'';\boldsymbol{r}')\Big]$$
$$=\iiint_V\Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\Big]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\Big]$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}'';\boldsymbol{r}')\Big]$$

$$= \iiint\limits_V \Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\Big] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$= 0 \qquad \square$$

$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$的证明

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\Big]$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}'')-G(\boldsymbol{r}'';\boldsymbol{r}')\Big]$$
$$=\iiint\limits_V\Big[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\Big]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$
$$=0$$

□

对于第三类边界条件，可类似证明

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

$$\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}')$$
$$u\Big|_{\Sigma'} = f(\Sigma')$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\Big|_{\Sigma} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\Big|_{\Sigma'} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\Big|_{\Sigma'} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}')$$
$$= u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

$$\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}')$$
$$u\Big|_{\Sigma'} = f(\Sigma')$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\Big|_{\Sigma} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\Big|_{\Sigma'} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\Big|_{\Sigma'} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}')$$
$$= u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$
$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

$$\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}')$$
$$u\big|_{\Sigma'} = f(\Sigma')$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}')$$
$$= u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$
$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

$$\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}')$$
$$u\big|_{\Sigma'} = f(\Sigma')$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}')$$
$$= u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$
$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

$$\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}')$$
$$u\big|_{\Sigma'} = f(\Sigma')$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}')$$
$$= u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$
$$u\big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

$$\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}')$$
$$u\big|_{\Sigma'} = f(\Sigma')$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$G\big|_{\Sigma'} = 0$$

$$\begin{aligned} &u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}') \\ &= u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') \end{aligned}$$

$$\iiint\limits_V \Big[u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}')\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$= \iiint\limits_V \Big[u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$\iint\limits_{\Sigma'} \left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}\Sigma'$$

$$= u(\boldsymbol{r}) - \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r}')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$= \iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$\iint\limits_{\Sigma'} \left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}\Sigma'$$

$$= u(\boldsymbol{r}) - \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \iint\limits_{\Sigma'} \left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}\Sigma'$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}\Sigma'$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \iint\limits_{\Sigma'} \left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} \right] \mathrm{d}\Sigma'$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}\Sigma'$$

三维无界空间Helmholtz方程的Green函数

数学问题

求三维无界空间中Helmholtz方程的Green函数，即在三维无界空间中求解方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

关于无穷远处的边界条件，后面再讨论

三维无界空间Helmholtz方程的Green函数

数学问题

求三维无界空间中Helmholtz方程的Green函数，即在三维无界空间中求解方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

关于无穷远处的边界条件，后面再讨论

三维无界空间Helmholtz方程的Green函数

数学问题

求三维无界空间中Helmholtz方程的Green函数，即在三维无界空间中求解方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

关于无穷远处的边界条件，后面再讨论

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

作为非齐次方程的定解问题，一般解法有

- 先求出方程的一个特解，而将方程齐次化
- 将$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$按相应齐次问题的本征函数展开

这两种做法，特别是第二种做法，原则上没有什么困难，这里不作具体的介绍

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

作为非齐次方程的定解问题，一般解法有

- 先求出方程的一个特解，而将方程齐次化
- 将$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$按相应齐次问题的本征函数展开

这两种做法，特别是第二种做法，原则上没有什么困难，这里不作具体的介绍

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

作为非齐次方程的定解问题，一般解法有

- 先求出方程的一个特解，而将方程齐次化
- 将$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$按相应齐次问题的本征函数展开

这两种做法，特别是第二种做法，原则上没有什么困难，这里不作具体的介绍

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

作为非齐次方程的定解问题，一般解法有

- 先求出方程的一个特解，而将方程齐次化
- 将$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$按相应齐次问题的本征函数展开

这两种做法，特别是第二种做法，原则上没有什么困难，这里不作具体的介绍

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

- 这是一个特殊的非齐次方程：只在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点，非齐次项才不为0
- 而且，由于是在无界空间，可以适当地安置坐标架，以充分发挥Laplace算符的不变性，使问题得到充分的简化

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

- 这是一个特殊的非齐次方程：只在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点，非齐次项才不为0
- 而且，由于是在无界空间，可以适当地安置坐标架，以充分发挥Laplace算符的不变性，使问题得到充分的简化

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

作坐标平移，$\xi = x - x'$, $\eta = y - y'$, $\zeta = z - z'$， 即将点电荷所在点取为新坐标系的原点

令$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = g(\xi,\eta,\zeta)$，则$g(\xi,\eta,\zeta)$满足方程

$$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} g(\xi,\eta,\zeta) + k^2 g(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(\zeta)$$

其中 $$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$$

变换后的方程是旋转不变的，$g(\xi,\eta,\zeta)$只是$R = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$的函数，$g(\xi,\eta,\zeta) = f(R)$

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

作坐标平移，$\xi = x - x'$, $\eta = y - y'$, $\zeta = z - z'$， 即将点电荷所在点取为新坐标系的原点

令$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = g(\xi,\eta,\zeta)$，则$g(\xi,\eta,\zeta)$满足方程

$$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} g(\xi,\eta,\zeta) + k^2 g(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(\zeta)$$

其中 $$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$$

变换后的方程是旋转不变的，$g(\xi,\eta,\zeta)$只是 $R = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$的函数，$g(\xi,\eta,\zeta) = f(R)$

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

作坐标平移，$\xi = x - x', \eta = y - y', \zeta = z - z'$， 即将点电荷所在点取为新坐标系的原点

令$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = g(\xi,\eta,\zeta)$，则$g(\xi,\eta,\zeta)$满足方程

$$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} g(\xi,\eta,\zeta) + k^2 g(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(\zeta)$$

其中 $$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$$

变换后的方程是旋转不变的，$g(\xi,\eta,\zeta)$只是$R = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$的函数，$g(\xi,\eta,\zeta) = f(R)$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

将直角坐标系(ξ,η,ζ)转为球坐标系，则方程变为

在$R\neq 0$点处的齐次方程

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^2\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\right]+k^2 f(R)=0$$

$+$

$R=0$处的边界条件(该处有一单位点电荷)

上述方程是零阶球Bessel方程，通解为

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} + B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}$$

由$R=0$和无穷远处的边界条件定常数$A(k), B(k)$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

将直角坐标系(ξ,η,ζ)转为球坐标系，则方程变为

在$R\neq 0$点处的齐次方程

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^2\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\right]+k^2 f(R)=0$$

$+$

$R=0$处的边界条件(该处有一单位点电荷)

上述方程是零阶球Bessel方程，通解为

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} + B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}$$

由$R=0$和无穷远处的边界条件定常数$A(k), B(k)$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

将直角坐标系(ξ,η,ζ)转为球坐标系，则方程变为

在$R\neq 0$点处的齐次方程

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^2\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\right]+k^2 f(R)=0$$

$+$

$R=0$处的边界条件(该处有一单位点电荷)

上述方程是零阶球Bessel方程，通解为

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} + B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}$$

由$R=0$和无穷远处的边界条件定常数$A(k), B(k)$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} + B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}$$

无穷远条件定$B(k)$

- 考虑到Helmholtz方程的实际背景，比如说，它是由波动方程经过分离变量得到的
- 作为一个例子，假设要求得到的解在无穷远处为发散波
- 取时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则解式中的第一项为发散波，第二项为会聚波
- 所以，应该有$B(k) = 0$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} + B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}$$

无穷远条件定$B(k)$

- 考虑到Helmholtz方程的实际背景，比如说，它是由波动方程经过分离变量得到的
- 作为一个例子，假设要求得到的解在无穷远处为发散波
- 取时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则解式中的第一项为发散波，第二项为会聚波
- 所以，应该有$B(k) = 0$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} + B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}$$

无穷远条件定$B(k)$

- 考虑到Helmholtz方程的实际背景，比如说，它是由波动方程经过分离变量得到的
- 作为一个例子，假设要求得到的解在无穷远处为发散波
- 取时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则解式中的第一项为发散波，第二项为会聚波
- 所以，应该有$B(k) = 0$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} + B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}$$

无穷远条件定$B(k)$

- 考虑到Helmholtz方程的实际背景，比如说，它是由波动方程经过分离变量得到的
- 作为一个例子，假设要求得到的解在无穷远处为发散波
- 取时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则解式中的第一项为发散波，第二项为会聚波
- 所以，应该有$B(k) = 0$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

$R=0$处的边界条件定$A(k)$

- 无法直接写出$R=0$处的边界条件，因为$f(R)$或$g(\xi,\eta,\zeta)$在$R=0$处的导数并不存在
- 另一方面，我们已经约定，凡是涉及δ函数的等式都应该从积分意义下去理解
- 很自然地，应当将方程在$R=0$附近积分

$$\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + k^2\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

$R=0$处的边界条件定$A(k)$

- 无法直接写出$R=0$处的边界条件，因为$f(R)$或$g(\xi,\eta,\zeta)$在$R=0$处的导数并不存在
- 另一方面，我们已经约定，凡是涉及δ函数的等式都应该从积分意义下去理解
- 很自然地，应当将方程在$R=0$附近积分

$$\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + k^2\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

$R=0$处的边界条件定$A(k)$

- 无法直接写出$R=0$处的边界条件，因为$f(R)$或$g(\xi,\eta,\zeta)$在$R=0$处的导数并不存在
- 另一方面，我们已经约定，凡是涉及δ函数的等式都应该从积分意义下去理解
- 很自然地，应当将方程在$R=0$附近积分

$$\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + k^2\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

第一项的体积分(取积分体积为以$R=0$点为球心，ρ为半径的球体)

$$\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \iint \left[\nabla_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\Big|_{R=\rho}$$

$$= -4\pi A(k)(1-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

第一项的体积分(取积分体积为以$R=0$点为球心，ρ为半径的球体)

$$\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \iint \left[\nabla_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R} R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\Big|_{R=\rho}$$

$$= -4\pi A(k)(1-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

第一项的体积分(取积分体积为以$R=0$点为球心，ρ为半径的球体)

$$\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \iint \left[\nabla_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R} R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\Big|_{R=\rho}$$

$$= -4\pi A(k)(1-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

第二项的体积分可以直接算出

$$\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = 4\pi A(k)\int_0^{\rho} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} R\mathrm{d}R$$

$$= \frac{4\pi A(k)}{k^2}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}-1\right) - \mathrm{i}k\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}\right]$$

所以，$-4\pi A(k) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad A(k) = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_0$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

第二项的体积分可以直接算出

$$\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = 4\pi A(k)\int_0^\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}R\mathrm{d}R$$

$$= \frac{4\pi A(k)}{k^2}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}-1\right)-\mathrm{i}k\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}\right]$$

所以，$-4\pi A(k) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad A(k) = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_0$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$f(R) = A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$$

第二项的体积分可以直接算出

$$\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = 4\pi A(k)\int_0^\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}R\mathrm{d}R$$

$$= \frac{4\pi A(k)}{k^2}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}-1\right)-\mathrm{i}k\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}\right]$$

所以，$-4\pi A(k) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad A(k) = \dfrac{1}{4\pi}\varepsilon_0$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

- $g(\xi,\eta,\zeta) = f(R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$
- $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$
- 当$k=0$时，就回到Poisson方程的Green函数
- 这个结果是在无穷远处为发散波，并且取时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$的条件下得到的

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

- $g(\xi,\eta,\zeta) = f(R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$
- $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$
- 当$k=0$时，就回到Poisson方程的Green函数
- 这个结果是在无穷远处为发散波，并且取时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$的条件下得到的

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

- $g(\xi,\eta,\zeta) = f(R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}$
- $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$
- 当$k=0$时，就回到Poisson方程的Green函数
- 这个结果是在无穷远处为发散波，并且取时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$的条件下得到的

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

- $g(\xi,\eta,\zeta) = f(R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^{ikR}}{R}$
- $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$
- 当$k=0$时，就回到Poisson方程的Green函数
- 这个结果是在无穷远处为发散波，并且取时间因子为$e^{-i\omega t}$的条件下得到的

讲授要点

1. Green函数的概念
   - 无界空间的叠加原理
   - 有界空间内Green函数的定义
2. 稳定问题的Green函数
   - 稳定问题Green函数的一般性质
   - Green函数的对称性
   - 稳定问题的Green函数解法
3. 三维无界空间Helmholtz方程的Green函数
   - 解法一：直接求解
   - 解法二：Fourier变换

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3x$$

$$\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3k'$$

则原方程变为 $$\left(k^2-k'^2\right)\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0}$$

解为 $$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0}\left[\frac{1}{k^2-k'^2} + C\delta(k^2-k'^2)\right]$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3x$$

$$\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3k'$$

则原方程变为 $$\left(k^2 - k'^2\right)\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0}$$

解为 $\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = -\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{k^2-k'^2} + C\delta(k^2-k'^2)\right]$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3x$$

$$\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3k'$$

则原方程变为 $$\left(k^2 - k'^2\right)\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0}$$

解为 $$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}') = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0}\left[\frac{1}{k^2-k'^2} + C\delta(k^2-k'^2)\right]$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

求反演　（其中$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$）

$$G(\boldsymbol{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\iiint\left[\frac{1}{k^2-k'^2}+C\delta(k^2-k'^2)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k'$$

$$\iiint\frac{1}{k^2-k'^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k' = \frac{4\pi}{R}\int_0^\infty\frac{k'}{k^2-k'^2}\sin k'R\,\mathrm{d}k'$$

$$= -\frac{2\pi^2}{R}\cos kR$$

$$\iiint\delta(k^2-k'^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k' = \frac{2\pi}{R}\sin kR$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

求反演　　（其中$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$）

$$G(\boldsymbol{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\iiint\left[\frac{1}{k^2-k'^2}+C\delta(k^2-k'^2)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k'$$

$$\iiint\frac{1}{k^2-k'^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k' = \frac{4\pi}{R}\int_0^\infty\frac{k'}{k^2-k'^2}\sin k'R\,\mathrm{d}k'$$

$$= -\frac{2\pi^2}{R}\cos kR$$

$$\iiint\delta(k^2-k'^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k' = \frac{2\pi}{R}\sin kR$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

求反演　（其中$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$）

$$G(\boldsymbol{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\iiint\left[\frac{1}{k^2-k'^2} + C\delta(k^2-k'^2)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k'$$

$$\iiint\frac{1}{k^2-k'^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k' = \frac{4\pi}{R}\int_0^\infty\frac{k'}{k^2-k'^2}\sin k'R\,\mathrm{d}k'$$

$$= -\frac{2\pi^2}{R}\cos kR$$

$$\iiint\delta(k^2-k'^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k' = \frac{2\pi}{R}\sin kR$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

求反演　　（其中$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$）

$$G(\boldsymbol{R})=-\frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\iiint\left[\frac{1}{k^2-k'^2}+C\delta(k^2-k'^2)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k'$$

$$\iiint\frac{1}{k^2-k'^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k'=\frac{4\pi}{R}\int_0^\infty\frac{k'}{k^2-k'^2}\sin k'R\,\mathrm{d}k'$$

$$=-\frac{2\pi^2}{R}\cos kR$$

$$\iiint\delta(k^2-k'^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}^3k'=\frac{2\pi}{R}\sin kR$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$G(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{(2\pi)^2\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left[\pi\cos kR - C\sin kR\right]$$

其中常数C由无穷远条件确定

例如，发散波条件 $\Rightarrow$ $C = -\pi\mathrm{i}$

会聚波条件 $\Rightarrow$ $C = \pi\mathrm{i}$

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

$$G(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{(2\pi)^2\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left[\pi\cos kR - C\sin kR\right]$$

其中常数C由无穷远条件确定

例如，发散波条件 $\Rightarrow$ $C = -\pi\mathrm{i}$

会聚波条件 $\Rightarrow$ $C = \pi\mathrm{i}$

$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

$$G(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{(2\pi)^2\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left[\pi\cos kR - C\sin kR\right]$$

其中常数C由无穷远条件确定

例如，发散波条件 $\Rightarrow$ $C = -\pi\mathrm{i}$

会聚波条件 $\Rightarrow$ $C = \pi\mathrm{i}$