第十四讲 积分变换

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，第19章
- 梁昆淼，《数学物理方法》，第13章
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，第11章

Laplace变换的应用

引言

- Laplace变换可用于求解含时间的偏微分方程定解问题
- 变换后，自变量的个数比原来减少一个
- 例如，原来是x和t两个自变量的偏微分方程定解问题，变换后就只需求解常微分方程(自变量为x)的定解问题
- 一般说来，后者总比较容易求解
- 这样求得的是原始的定解问题的解的像函数，还必须反演，才能得到原始问题的解

引言

- Laplace变换可用于求解含时间的偏微分方程定解问题
- 变换后，自变量的个数比原来减少一个
- 例如，原来是x和t两个自变量的偏微分方程定解问题，变换后就只需求解常微分方程(自变量为x)的定解问题
- 一般说来，后者总比较容易求解
- 这样求得的是原始的定解问题的解的像函数，还必须反演，才能得到原始问题的解

引言

- Laplace变换可用于求解含时间的偏微分方程定解问题
- 变换后，自变量的个数比原来减少一个
- 例如，原来是x和t两个自变量的偏微分方程定解问题，变换后就只需求解常微分方程(自变量为x)的定解问题
- 一般说来，后者总比较容易求解
- 这样求得的是原始的定解问题的解的像函数，还必须反演，才能得到原始问题的解

引言

- Laplace变换可用于求解含时间的偏微分方程定解问题
- 变换后，自变量的个数比原来减少一个
- 例如，原来是x和t两个自变量的偏微分方程定解问题，变换后就只需求解常微分方程(自变量为x)的定解问题
- 一般说来，后者总比较容易求解
- 这样求得的是原始的定解问题的解的像函数，还必须反演，才能得到原始问题的解

引言

- Laplace变换可用于求解含时间的偏微分方程定解问题
- 变换后，自变量的个数比原来减少一个
- 例如，原来是x和t两个自变量的偏微分方程定解问题，变换后就只需求解常微分方程(自变量为x)的定解问题
- 一般说来，后者总比较容易求解
- 这样求得的是原始的定解问题的解的像函数，还必须反演，才能得到原始问题的解

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

例14.1　求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad -\infty<x<\infty\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0\qquad -\infty<x<\infty$$

说明

- 在这种无界区间的定解问题中，往往并不明确列出边界条件
- 实际上，无界区间，只是一个物理上的抽象
- 因此，如果要完整地列出定解问题的话，则还应当有边界条件$u\Big|_{x\to\pm\infty}\to 0$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad -\infty<x<\infty\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0\qquad -\infty<x<\infty$$

说明

- 在这种无界区间的定解问题中，往往并不明确列出边界条件
- 实际上，无界区间，只是一个物理上的抽象
- 因此，如果要完整地列出定解问题的话，则还应当有边界条件$u\Big|_{x\to\pm\infty}\to 0$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

说明

- 在这种无界区间的定解问题中，往往并不明确列出边界条件
- 实际上，无界区间，只是一个物理上的抽象
- 因此，如果要完整地列出定解问题的话，则还应当有边界条件$u\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0$

例14.1　求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

说明

- 在这种无界区间的定解问题中，往往并不明确列出边界条件
- 实际上，无界区间，只是一个物理上的抽象
- 因此，如果要完整地列出定解问题的话，则还应当有边界条件$u\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0$

例14.1　求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad -\infty<x<\infty\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0\qquad -\infty<x<\infty$$

解　作Laplace变换

令$u(x,t)\fallingdotseq U(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$

把$U(x,p)$看成只是x的函数，p是参数，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\fallingdotseq\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2}$$

利用初始条件，有$\frac{\partial u}{\partial t}\fallingdotseq pU(x,p)$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解 作Laplace变换

令$u(x,t) \risingdotseq U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$

把$U(x,p)$看成只是x的函数，p是参数，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{\mathrm{d}^2 U(x,p)}{\mathrm{d}x^2}$$

利用初始条件，有$\dfrac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p)$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解 作Laplace变换

令$u(x,t) \doteqdot U(x,p) = \displaystyle\int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$

把$U(x,p)$看成只是x的函数，p是参数，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \frac{\mathrm{d}^2 U(x,p)}{\mathrm{d}x^2}$$

利用初始条件，有$\dfrac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU(x,p)$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0 \qquad -\infty<x<\infty$$

解

再进一步令$f(x,t)\doteqdot F(x,p)$

定解问题就变成 $pU(x,p)-\kappa\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2}=F(x,p)$

在$U\Big|_{x\to\pm\infty}\to 0$的条件下即可解得（见书，例10.8）

$$U(x,p)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\kappa p}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x',p)\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|\right\}\mathrm{d}x'$$

例14.1　求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad -\infty<x<\infty\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0\qquad -\infty<x<\infty$$

解

再进一步令$f(x,t)\risingdotseq F(x,p)$

定解问题就变成 $pU(x,p)-\kappa\dfrac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2}=F(x,p)$

在$U\Big|_{x\to\pm\infty}\to 0$的条件下即可解得（见书，例10.8）

$$U(x,p)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\kappa p}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x',p)\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|\right\}\mathrm{d}x'$$

例14.1　求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解

再进一步令$f(x,t) \fallingdotseq F(x,p)$

定解问题就变成 $pU(x,p) - \kappa\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = F(x,p)$

在$U\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0$的条件下即可解得（见书，例10.8）

$$U(x,p) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\kappa p}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x',p)\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|\right\}\mathrm{d}x'$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解

根据反演公式$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4t}\right\}$以及卷积定理，就能够最后得到

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_0^t \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-\tau)}\right\}\frac{f(x',\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad -\infty<x<\infty\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0\qquad -\infty<x<\infty$$

解

根据反演公式$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\dfrac{\alpha^2}{4t}\right\}$以及卷积定理，就能够最后得到

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_0^t\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-\tau)}\right\}\frac{f(x',\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0 \qquad -\infty<x<\infty$$

解

根据反演公式$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\dfrac{\alpha^2}{4t}\right\}$以及卷积定理，就能够最后得到

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_0^t\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-\tau)}\right\}\frac{f(x',\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau$$

评述

用Laplace变换求解偏微分方程定解问题，除了可以减少自变量的数目以外，某些已知函数的像函数(例如方程的非齐次项，它的形式可能很复杂)甚至都不必具体求出，在求反演时只需应用卷积定理即可

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解 作Laplace变换

令$u(x,t) \doteqdot U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$

于是，原来的定解问题就化为

$$p^2U(x,p) - a^2\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = p\phi(x) + \psi(x)$$

例14.2　求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解　作Laplace变换

令$u(x,t) \risingdotseq U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$

于是，原来的定解问题就化为

$$p^2 U(x,p) - a^2 \frac{\mathrm{d}^2 U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = p\phi(x) + \psi(x)$$

例14.2　求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解　作Laplace变换

令$u(x,t) \fallingdotseq U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$

于是，原来的定解问题就化为

$$p^2U(x,p) - a^2\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = p\phi(x) + \psi(x)$$

例14.2　求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

考虑到$U(x,p)$在$x \to \pm\infty$的行为，可以求得此方程的解

$$\begin{aligned} U(x,p) &= \frac{1}{2ap}\int_{-\infty}^{\infty}\left[p\phi(x') + \psi(x')\right]\exp\left\{-\frac{p}{a}\left|x - x'\right|\right\}\mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\phi(x') + \frac{\psi(x')}{p}\right]\exp\left\{-\frac{p}{a}\left|x - x'\right|\right\}\mathrm{d}x' \end{aligned}$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

因为 $\mathrm{e}^{-\alpha p} \risingdotseq \delta(t-\alpha), \quad \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha p} \risingdotseq \eta(t-\alpha)$

所以 $$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')\,\delta\left(t-\frac{|x-x'|}{a}\right)\mathrm{d}x' + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\,\eta\left(t-\frac{|x-x'|}{a}\right)\mathrm{d}x'$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

因为$\mathrm{e}^{-\alpha p} \risingdotseq \delta(t-\alpha)$, $\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha p} \risingdotseq \eta(t-\alpha)$

所以 $$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x')\,\delta\left(t - \frac{|x-x'|}{a}\right)\mathrm{d}x' + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x')\,\eta\left(t - \frac{|x-x'|}{a}\right)\mathrm{d}x'$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')\,\delta(at-|x-x'|)\,\mathrm{d}x' + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\,\eta(at-|x-x'|)\,\mathrm{d}x'$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

注意

$$\delta(at - |x-x'|) = \begin{cases} 0 & |x-x'| \neq at \\ \infty & |x-x'| = at \end{cases}$$

$$\eta(at - |x-x'|) = \begin{cases} 0 & |x-x'| > at \\ 1 & |x-x'| < at \end{cases}$$

例14.2　求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

就可以得到

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x')\delta\Big(at - |x - x'|\Big)\mathrm{d}x' + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x')\mathrm{d}x'$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\phi(x - at) + \phi(x + at)\Big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x')\mathrm{d}x'$$

评述

用Laplace变换求解偏微分方程定解问题还有一个优点，这就是不必将非齐次的边界条件齐次化，原有的偏微分方程定解问题的非齐次边界条件将转化为常微分方程的非齐次边界条件，不会带来原则的困难

评述

用Laplace变换求解偏微分方程定解问题还有一个优点，这就是不必将非齐次的边界条件齐次化，原有的偏微分方程定解问题的非齐次边界条件将转化为常微分方程的非齐次边界条件，不会带来原则的困难

评述

用Laplace变换求解偏微分方程定解问题还有一个优点，这就是不必将非齐次的边界条件齐次化，原有的偏微分方程定解问题的非齐次边界条件将转化为常微分方程的非齐次边界条件，不会带来原则的困难

评述

用Laplace变换求解偏微分方程定解问题还有一个优点，这就是不必将非齐次的边界条件齐次化，原有的偏微分方程定解问题的非齐次边界条件将转化为常微分方程的非齐次边界条件，不会带来原则的困难

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

Fourier变换

对于无界区间$(-\infty, \infty)$上的函数$f(x)$，如果在任意有限区间上只有有限个极大极小和有限个第一类间断点，且积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，则它的Fourier变换存在

$$F(k) = \mathscr{F}[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

而逆变换(反演)是

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F(k)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

Fourier变换

对于无界区间$(-\infty, \infty)$上的函数$f(x)$，如果在任意有限区间上只有有限个极大极小和有限个第一类间断点，且积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，则它的Fourier变换存在

$$F(k) = \mathscr{F}[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

而逆变换(反演)是

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F(k)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

评述

这里的Fourier变换和逆变换的形式可能和读者熟悉的形式略有不同．形式更加对称，更多地为物理学家所采用

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

例14.1　求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解　作Fourier变换

假设$u(x,t)$的Fourier变换存在

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

并设

$$F(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解 作Fourier变换

假设$u(x,t)$的Fourier变换存在

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

并设

$$F(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

例14.1　求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0 \qquad -\infty<x<\infty$$

解　作Fourier变换

假设$u(x,t)$的Fourier变换存在

$$U(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

并设

$$F(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解 在作Fourier变换后，定解问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t} + \kappa k^2 U(k,t) = F(k,t)$$

$$U(k,t)\Big|_{t=0} = 0$$

用常数变易法求解，就得到

$$U(k,t) = \mathrm{e}^{-\kappa k^2 t}\int_0^t F(k,\tau)\mathrm{e}^{\kappa k^2\tau}\mathrm{d}\tau$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0 \qquad -\infty<x<\infty$$

解 在作Fourier变换后，定解问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}+\kappa k^2U(k,t)=F(k,t)$$

$$U(k,t)\Big|_{t=0}=0$$

用常数变易法求解，就得到

$$U(k,t)=\mathrm{e}^{-\kappa k^2t}\int_0^t F(k,\tau)\mathrm{e}^{\kappa k^2\tau}\mathrm{d}\tau$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解 再求反演

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$= \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,\tau)\mathrm{e}^{-\kappa k^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}\tau$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad t>0$$
$$u\Big|_{t=0}=0 \qquad -\infty<x<\infty$$

解

利用 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}$，可以算出

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\kappa k^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}\right]$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad -\infty<x<\infty\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0\qquad -\infty<x<\infty$$

解

利用 $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}$，可以算出

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\kappa k^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}\right]$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0 \qquad -\infty<x<\infty$$

解

再利用$f(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$，根据Fourier变换的卷积公式

$$\mathscr{F}[f_1(x)]\,\mathscr{F}[f_2(x)]=\mathscr{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

解

再利用$f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$，根据Fourier变换的卷积公式

$$\mathscr{F}[f_1(x)]\,\mathscr{F}[f_2(x)] = \mathscr{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

例14.1 求解无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\qquad -\infty<x<\infty\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=0\qquad -\infty<x<\infty$$

解 最后就能得到

$$u(x,t)=\int_0^t\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi}}\int_0^t\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\xi\right\}\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解 作Fourier变换

假设$u(x,t)$的Fourier变换存在

$$U(k,t) = \mathscr{F}\{u(x,t)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$$

并设

$$\Phi(k) = \mathscr{F}\{\phi(x)\} \qquad \Psi(k) = \mathscr{F}\{\psi(x)\}$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解 作Fourier变换

假设$u(x,t)$的Fourier变换存在

$$U(k,t) = \mathscr{F}\{u(x,t)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x$$

并设

$$\Phi(k) = \mathscr{F}\{\phi(x)\} \qquad \Psi(k) = \mathscr{F}\{\psi(x)\}$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解 作Fourier变换

假设$u(x,t)$的Fourier变换存在

$$U(k,t) = \mathscr{F}\{u(x,t)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$$

并设

$$\varPhi(k) = \mathscr{F}\{\phi(x)\} \qquad \varPsi(k) = \mathscr{F}\{\psi(x)\}$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解 在作Fourier变换后，定解问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(k,t)}{\mathrm{d}t^2} + k^2 a^2 U(k,t) = 0$$

$$U(k,t)\Big|_{t=0} = \Phi(k) \qquad \frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \Psi(k)$$

解为 $$U(k,t) = \Phi(k)\cos kat + \Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解 在作Fourier变换后，定解问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}^2U(k,t)}{\mathrm{d}t^2} + k^2a^2U(k,t) = 0$$

$$U(k,t)\Big|_{t=0} = \Phi(k) \qquad \frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \Psi(k)$$

解为
$$U(k,t) = \Phi(k)\cos kat + \Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解 再求反演

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k,t)\cos kat\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k,t)\frac{\sin kat}{ka}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \end{aligned}$$

例14.2　求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

利用$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} \Phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \phi(x)$，可以算出

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\cos kat\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\left[\phi(x+at)+\phi(x-at)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

利用 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \Phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \phi(x)$，可以算出

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\cos kat\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\left[\phi(x+at)+\phi(x-at)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

例14.2 求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解

利用$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} \Phi(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \phi(x)$，可以算出

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\cos kat\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\left[\phi(x+at)+\phi(x-at)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

例14.2　求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u\big|_{t=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

解　最后就能得到

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\phi(x+at) + \phi(x-at)\Big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

Hankel变换

$$U(p) = \int_0^\infty u(r)\mathsf{J}_0(pr)r\mathrm{d}r$$

$$u(r) = \int_0^\infty U(p)\mathsf{J}_0(pr)p\mathrm{d}p$$

带电导体圆盘的静电势 见书，例19.5

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad 0 < r < \infty \quad z > 0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r\to\infty} \to 0$$

$$u\Big|_{z=0} = u_0 \qquad r < a$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \qquad r > a$$

$$u\Big|_{z\to\infty} \to 0$$

Hankel变换

$$U(p)=\int_0^\infty u(r)\mathrm{J}_0(pr)r\mathrm{d}r$$
$$u(r)=\int_0^\infty U(p)\mathrm{J}_0(pr)p\mathrm{d}p$$

带电导体圆盘的静电势 见书，例19.5

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad 0<r<\infty \quad z>0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0$$

$$u\Big|_{z=0}=u_0 \qquad r<a$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0 \qquad r>a$$

$$u\Big|_{z\to\infty}\to 0$$

Hankel变换

$$U(p)=\int_0^\infty u(r)\mathrm{J}_0(pr)r\mathrm{d}r$$
$$u(r)=\int_0^\infty U(p)\mathrm{J}_0(pr)p\mathrm{d}p$$

带电导体圆盘的静电势 见书，例19.5

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad 0<r<\infty \quad z>0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0$$

$$u\Big|_{z=0}=u_0 \qquad r<a$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0 \qquad r>a$$

$$u\Big|_{z\to\infty}\to 0$$

讲授要点

1. Laplace变换的应用
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
2. Fourier变换的应用
   - 基本原理
   - 无界杆的热传导问题
   - 无界弦的波动问题
3. 其它积分变换
   - Hankel变换
   - Mellin变换

Mellin变换可以看成是Fourier变换的变型

- $$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$
  $$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
- $$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
  $$\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{-(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega$$

Mellin变换可以看成是Fourier变换的变型

- $$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$
  $$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
- $$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
  $$\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{-(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega$$

Mellin变换可以看成是Fourier变换的变型

- $$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$
  $$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

- $$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
  $$\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{-(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega$$

Mellin变换

- $$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
  $$\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{-(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega$$
- 令$\nu=\sigma-\mathrm{i}\omega,\ x=\mathrm{e}^t$
  $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t),\ F(\nu)=G(\omega)$$
- $$F(\nu)=\int_0^{\infty}f(x)x^{\nu-1}\mathrm{d}x$$
  $$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(\nu)x^{-\nu}\mathrm{d}\nu\qquad(\sigma>\sigma_0)$$
- Mellin变换定理从略

Mellin变换

- $$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma t} g(t) \mathrm{e}^{(\sigma - \mathrm{i}\omega)t} \mathrm{d}t$$
  $$\mathrm{e}^{-\sigma t} g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \mathrm{e}^{-(\sigma - \mathrm{i}\omega)t} \mathrm{d}\omega$$
- 令$\nu = \sigma - \mathrm{i}\omega$, $x = \mathrm{e}^{t}$
  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\sigma t} g(t),\ F(\nu) = G(\omega)$$
- $$F(\nu) = \int_0^{\infty} f(x) x^{\nu-1} \mathrm{d}x$$
  $$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(\nu) x^{-\nu} \mathrm{d}\nu \qquad (\sigma > \sigma_0)$$
- Mellin变换定理从略

Mellin变换

- $$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
  $$\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{-(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega$$
- 令$\nu=\sigma-\mathrm{i}\omega,\ x=\mathrm{e}^t$
  $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t),\ F(\nu)=G(\omega)$$
- $$F(\nu)=\int_0^{\infty}f(x)x^{\nu-1}\mathrm{d}x$$
  $$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(\nu)x^{-\nu}\mathrm{d}\nu\qquad(\sigma>\sigma_0)$$
- Mellin变换定理从略

Mellin变换

- $$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$
  $$\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{-(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega$$
- 令$\nu=\sigma-\mathrm{i}\omega,\ x=\mathrm{e}^{t}$
  $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\sigma t}g(t),\ F(\nu)=G(\omega)$$
- $$F(\nu)=\int_{0}^{\infty}f(x)x^{\nu-1}\mathrm{d}x$$
  $$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(\nu)x^{-\nu}\mathrm{d}\nu\qquad(\sigma>\sigma_0)$$
- Mellin变换定理从略

例14.3 角形区域内的稳定温度分布

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \qquad r>0,\ -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0 \qquad -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\eta(a-r) \qquad 0\le r<\infty$$

解　作Mellin变换　$U(\nu,\theta)=\int_0^\infty u(r,\theta)r^{\nu-1}\mathrm{d}r$

方程变为　$\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}+\nu^2U=0$

边界条件　$U\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\dfrac{1}{\nu}a^\nu$

例14.3 角形区域内的稳定温度分布

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad r>0,\ -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0 \qquad -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\eta(a-r) \qquad 0\le r<\infty$$

解 作Mellin变换 $U(\nu,\theta)=\int_0^\infty u(r,\theta)r^{\nu-1}\mathrm{d}r$

方程变为 $$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}+\nu^2U=0$$

边界条件 $$U\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\frac{1}{\nu}a^\nu$$

例14.3　角形区域内的稳定温度分布

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad r>0,\ -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0 \qquad -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\eta(a-r) \qquad 0\le r<\infty$$

解　作Mellin变换　$U(\nu,\theta)=\int_0^\infty u(r,\theta)r^{\nu-1}\mathrm{d}r$

方程变为　$\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}+\nu^2U=0$

边界条件　$U\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\dfrac{1}{\nu}a^\nu$

例14.3　角形区域内的稳定温度分布

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \qquad r>0,\ -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0 \qquad -\alpha<\theta<\alpha$$

$$u\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\eta(a-r) \qquad 0\leq r<\infty$$

解　作Mellin变换　$U(\nu,\theta)=\int_0^\infty u(r,\theta)r^{\nu-1}\mathrm{d}r$

方程变为　$\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}+\nu^2U=0$

边界条件　$U\Big|_{\theta=\pm\alpha}=\dfrac{1}{\nu}a^\nu$

例14.3　角形区域内的稳定温度分布

解为　$$U = \frac{1}{\nu}\frac{\cos\nu\theta}{\cos\nu\alpha}a^{\nu}$$

反演　$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{\nu}\frac{\cos\nu\theta}{\cos\nu\alpha}\left(\frac{a}{r}\right)^{\nu}\mathrm{d}\nu$$

其中　$$0<\sigma<\pi/2\alpha$$

例14.3　角形区域内的稳定温度分布

解为 $$U = \frac{1}{\nu}\frac{\cos\nu\theta}{\cos\nu\alpha}a^{\nu}$$

反演 $$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{\nu}\frac{\cos\nu\theta}{\cos\nu\alpha}\left(\frac{a}{r}\right)^{\nu}\mathrm{d}\nu$$

其中 $$0 < \sigma < \pi/2\alpha$$

反演 $$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{\nu}\frac{\cos\nu\theta}{\cos\nu\alpha}\left(\frac{a}{r}\right)^{\nu}\mathrm{d}\nu$$

当$r>a$时

$$u(r,\theta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha}\cos\frac{2n+1}{2\alpha}\pi\theta$$

当$r<a$时

$$u(r,\theta)=1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha}\cos\frac{2n+1}{2\alpha}\pi\theta$$

反演 $$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{\nu}\frac{\cos\nu\theta}{\cos\nu\alpha}\left(\frac{a}{r}\right)^{\nu}\mathrm{d}\nu$$

当$r>a$时

$$u(r,\theta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha}\cos\frac{2n+1}{2\alpha}\pi\theta$$

当$r<a$时

$$u(r,\theta)=1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha}\cos\frac{2n+1}{2\alpha}\pi\theta$$