第 十 三 讲
分离变量法总结

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - 自伴算符的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程本征值问题中的简并现象
2. 从S-L型方程本征值问题看分离变量法
   - 分离变量法精义
   - 分离变量法的发展

讲授要点

1. Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - 自伴算符的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程本征值问题中的简并现象
2. 从S-L型方程本征值问题看分离变量法
   - 分离变量法精义
   - 分离变量法的发展

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§18.3 — 18.6
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§9.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§10.6

讲授要点

1. Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - 自伴算符的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程本征值问题中的简并现象
2. 从S-L型方程本征值问题看分离变量法
   - 分离变量法精义
   - 分离变量法的发展

伴算符

Definition

设$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{M}$为定义在一定函数空间内的(微分)算符，若对于该函数空间内的任意两个函数u和v，恒有

$$(v,\ \boldsymbol{L}u) = (\boldsymbol{M}v,\ u)$$

即

$$\int_a^b v^* \boldsymbol{L} u \mathrm{d}x = \int_a^b (\boldsymbol{M}v)^* u \mathrm{d}x$$

则称$\boldsymbol{M}$是$\boldsymbol{L}$的伴算符

举例

例13.1 $\boldsymbol{L}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\int_a^b v^*\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=v^*u\Big|_a^b-\int_a^b\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x$$

所以，当u和v都满足边界条件

$$y(a)=y(b)$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的伴算符是$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

举例

例13.1 $\boldsymbol{L}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\int_a^b v^*\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = v^*u\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x$$

所以，当u和v都满足边界条件

$$y(a)=y(b)$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的伴算符是$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

举例

例13.1 $\boldsymbol{L}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\int_a^b v^*\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=v^*u\Big|_a^b-\int_a^b\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x$$

所以，当u和v都满足边界条件

$$y(a)=y(b)$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的伴算符是$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

讨论

若$\boldsymbol{M}$是$\boldsymbol{L}$的伴算符，则对于任意函数u和v，也有

$$\int_a^b v^* \boldsymbol{M} u \mathrm{d}x = \left[\int_a^b (\boldsymbol{M}u)^* v \mathrm{d}x\right]^*$$
$$= \left[\int_a^b u^* \boldsymbol{L} v \mathrm{d}x\right]^* = \int_a^b (\boldsymbol{L}v)^* u \mathrm{d}x$$

所以$\boldsymbol{L}$也是$\boldsymbol{M}$的伴算符

讨论

若$\boldsymbol{M}$是$\boldsymbol{L}$的伴算符，则对于任意函数u和v，也有

$$\int_a^b v^*\boldsymbol{M}u\mathrm{d}x=\left[\int_a^b(\boldsymbol{M}u)^*v\mathrm{d}x\right]^*$$
$$=\left[\int_a^b u^*\boldsymbol{L}v\mathrm{d}x\right]^*=\int_a^b(\boldsymbol{L}v)^*u\mathrm{d}x$$

所以$\boldsymbol{L}$也是$\boldsymbol{M}$的伴算符

讨论

若$\boldsymbol{M}$是$\boldsymbol{L}$的伴算符，则对于任意函数u和v，也有

$$\int_a^b v^* \boldsymbol{M} u \mathrm{d}x = \left[\int_a^b (\boldsymbol{M}u)^* v \mathrm{d}x\right]^*$$
$$= \left[\int_a^b u^* \boldsymbol{L} v \mathrm{d}x\right]^* = \int_a^b (\boldsymbol{L}v)^* u \mathrm{d}x$$

所以$\boldsymbol{L}$也是$\boldsymbol{M}$的伴算符

举例

例13.2 $\boldsymbol{L}=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$

分部积分两次即得

$$\int_a^b v^*\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=\Big[v^*u'-(v^*)'u\Big]_a^b+\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)^*u\mathrm{d}x$$

所以，当函数u和v满足

$$\Big[v^*u'-(v^*)'u\Big]_a^b=0$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$的伴算符就是它自身

举例

例13.2 $\boldsymbol{L}=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$

分部积分两次即得

$$\int_a^b v^*\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=\Big[v^*u'-(v^*)'u\Big]_a^b+\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)^*u\mathrm{d}x$$

所以，当函数u和v满足

$$\Big[v^*u'-(v^*)'u\Big]_a^b=0$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$的伴算符就是它自身

举例

例13.2 $\boldsymbol{L} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$

分部积分两次即得

$$\int_a^b v^* \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \Big[v^*u' - (v^*)'u\Big]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\right)^* u\mathrm{d}x$$

所以，当函数u和v满足

$$\Big[v^*u' - (v^*)'u\Big]_a^b = 0$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$的伴算符就是它自身

举例

什么条件下$\Big[v^*u' - (v^*)'u\Big]_a^b = 0$?

- 函数u和v满足一、二、三类边界条件

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \qquad \alpha_2 y(b + \beta_2 y'(b) = 0$$

$$(\text{其中 } |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 \neq 0,\ |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 \neq 0)$$

- 函数u和v满足周期条件

$$y(a) = y(b) \qquad y'(a) = y'(b)$$

举例

什么条件下 $\left[v^*u' - (v^*)'u\right]_a^b = 0$?

- 函数u和v满足一、二、三类边界条件

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad \alpha_2 y(b + \beta_2 y'(b) = 0$$

(其中 $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 \neq 0,\ |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 \neq 0$)

- 函数u和v满足周期条件

$$y(a) = y(b) \qquad y'(a) = y'(b)$$

举例

什么条件下$\left[v^*u' - (v^*)'u\right]_a^b = 0$?

- 函数u和v满足一、二、三类边界条件

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad \alpha_2 y(b + \beta_2 y'(b) = 0$$

$$(\text{其中 } |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 \neq 0,\ |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 \neq 0)$$

- 函数u和v满足周期条件

$$y(a) = y(b) \qquad y'(a) = y'(b)$$

自伴算符

Definition

若算符$\boldsymbol{L}$的伴算符就是它自身，即对于该函数空间内的任意两个函数u和v，恒有

$$(v,\, \boldsymbol{L}u) = (\boldsymbol{L}v,\, u)$$

即

$$\int_a^b v^* \boldsymbol{L} u \mathrm{d}x = \int_a^b (\boldsymbol{L}v)^* u \mathrm{d}x$$

则称$\boldsymbol{L}$是自伴算符

举例

例13.3 $\boldsymbol{L} = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\int_a^b v^* \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \mathrm{i}v^* u\Big|_a^b - \mathrm{i}\int_a^b \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x} u \mathrm{d}x$$

当u和v都满足和例13.1同样的边界条件
$y(a) = y(b)$时

$$\int_a^b v^* \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}v)}{\mathrm{d}x}\right]^* u \mathrm{d}x$$

所以$\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是自伴算符

举例

例13.3 $\boldsymbol{L} = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\int_a^b v^* \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \mathrm{i}v^*u\Big|_a^b - \mathrm{i}\int_a^b \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x$$

当u和v都满足和例13.1同样的边界条件
$y(a) = y(b)$时

$$\int_a^b v^* \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}v)}{\mathrm{d}x}\right]^* u\mathrm{d}x$$

所以$\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是自伴算符

举例

例13.3 $\boldsymbol{L} = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\int_a^b v^*\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{i}v^*u\Big|_a^b - \mathrm{i}\int_a^b \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x$$

当u和v都满足和例13.1同样的边界条件
$y(a) = y(b)$时

$$\int_a^b v^*\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}v)}{\mathrm{d}x}\right]^* u\mathrm{d}x$$

所以$\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是自伴算符

举例

例13.3 $\boldsymbol{L}=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\int_a^b v^*\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{i}v^*u\Big|_a^b-\mathrm{i}\int_a^b\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x$$

当u和v都满足和例13.1同样的边界条件

$y(a)=y(b)$时

$$\int_a^b v^*\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}v)}{\mathrm{d}x}\right]^*u\mathrm{d}x$$

所以$\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是自伴算符

讨论

算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的

通常，我们总是要求

讨论

算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的

通常，我们总是要求

- 函数定义在给定的区间上

讨论

算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的

通常，我们总是要求

- 函数定义在给定的区间上
- 函数具有足够的连续性

讨论

算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的

通常，我们总是要求

- 函数定义在给定的区间上
- 函数具有足够的连续性

例如，对于二阶微分算符，就要求函数的二阶导数连续，至少分段连续；如果是无界区间，则要求函数平方可积

讨论

算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的

通常，我们总是要求

- 函数定义在给定的区间上
- 函数具有足够的连续性(属于某一Hilbert空间)

讨论

算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的

通常，我们总是要求

- 函数定义在给定的区间上
- 函数具有足够的连续性(属于某一Hilbert空间)
- 函数满足一定边界条件，即局限在Hilbert空间中的一定子空间(流形)内

讨论

算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的

通常，我们总是要求

- 函数定义在给定的区间上
- 函数具有足够的连续性(属于某一Hilbert空间)
- 函数满足一定边界条件，即局限在Hilbert空间中的一定子空间(流形)内

绝不能脱离边界条件的约束来讨论算符的自伴性

自伴算符的本征值问题

Definition

若$\boldsymbol{L}$为自伴算符，则方程

$$\boldsymbol{L}y(x) = \lambda y(x)$$

称为自伴算符的本征值问题

这里未出现齐次边界条件，因为边界条件已经隐含在自伴算符$\boldsymbol{L}$的定义中

自伴算符的本征值问题

Definition

若$\boldsymbol{L}$为自伴算符，则方程

$$\boldsymbol{L}y(x) = \lambda y(x)$$

称为自伴算符的本征值问题

这里未出现齐次边界条件，因为边界条件已经隐含在自伴算符$\boldsymbol{L}$的定义中

自伴算符本征值问题的性质

性质1 （不证）

自伴算符的本征值一定存在．本征值有无穷多个，构成可数集

自伴算符本征值问题的性质

性质2

自伴算符的本征值必为实数

Proof

$$\boldsymbol{L}y = \lambda y \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{L}y)^* = \lambda^* y^*$$

由于$\boldsymbol{L}$是自伴算符

$$\int_a^b \left[y^* \boldsymbol{L}y - (\boldsymbol{L}y)^* y\right] \mathrm{d}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - \lambda^*) \int_a^b yy^* \mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \lambda^* \quad \text{i.e. 本征值}\lambda\text{为实数}$$

自伴算符本征值问题的性质

性质2

自伴算符的本征值必为实数

Proof

$$\boldsymbol{L}y = \lambda y \qquad \Longrightarrow \qquad (\boldsymbol{L}y)^* = \lambda^* y^*$$

由于$\boldsymbol{L}$是自伴算符

$$\int_a^b [y^* \boldsymbol{L}y - (\boldsymbol{L}y)^* y]\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\lambda - \lambda^*) \int_a^b yy^* \mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore \qquad \lambda = \lambda^* \qquad \text{i.e. 本征值}\lambda\text{为实数}$$

自伴算符本征值问题的性质

性质2

自伴算符的本征值必为实数

Proof

$$\boldsymbol{L}y = \lambda y \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{L}y)^* = \lambda^* y^*$$

由于$\boldsymbol{L}$是自伴算符

$$\int_a^b \left[y^* \boldsymbol{L}y - (\boldsymbol{L}y)^* y\right] \mathrm{d}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - \lambda^*) \int_a^b y y^* \mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \lambda^* \quad \text{i.e. 本征值}\lambda\text{为实数}$$

自伴算符本征值问题的性质

性质2

自伴算符的本征值必为实数

Proof

$$\boldsymbol{L}y = \lambda y \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{L}y)^* = \lambda^* y^*$$

由于$\boldsymbol{L}$是自伴算符

$$\int_a^b \left[y^* \boldsymbol{L}y - (\boldsymbol{L}y)^* y\right] \mathrm{d}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - \lambda^*) \int_a^b y y^* \mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \lambda^* \quad \text{i.e. 本征值}\lambda\text{为实数}$$

自伴算符本征值问题的性质

性质3

自伴算符的本征函数具有正交性，即对应不同本征值的本征函数一定正交

Proof

设λ_i和λ_j是不相等的两个本征值，对应的本征函数为y_i和y_j

$$\boldsymbol{L}y_i = \lambda_i y_i \qquad \boldsymbol{L}y_j = \lambda_j y_j$$

本征值λ_i, λ_j为实数

$$\int_a^b \left[y_i^* \boldsymbol{L}y_j - (\boldsymbol{L}y_i)^* y_j\right] \mathrm{d}x = (\lambda_j - \lambda_i)\int_a^b y_i^* y_j \mathrm{d}x$$

$$\therefore \qquad \int_a^b y_i^*(x) y_j(x) \mathrm{d}x = 0$$

自伴算符本征值问题的性质

性质3

自伴算符的本征函数具有正交性，即对应不同本征值的本征函数一定正交

Proof

设λ_i和λ_j是不相等的两个本征值，对应的本征函数为y_i和y_j

$$\boldsymbol{L}y_i = \lambda_i y_i \qquad \boldsymbol{L}y_j = \lambda_j y_j$$

本征值λ_i, λ_j为实数

$$\int_a^b \left[y_i^* \boldsymbol{L}y_j - (\boldsymbol{L}y_i)^* y_j\right] \mathrm{d}x = (\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b y_i^* y_j \mathrm{d}x$$

$$\therefore \qquad \int_a^b y_i^*(x) y_j(x) \mathrm{d}x = 0$$

自伴算符本征值问题的性质

性质3

自伴算符的本征函数具有正交性，即对应不同本征值的本征函数一定正交

Proof

设λ_i和λ_j是不相等的两个本征值，对应的本征函数为y_i和y_j

$$\boldsymbol{L}y_i = \lambda_i y_i \qquad \boldsymbol{L}y_j = \lambda_j y_j$$

本征值λ_i, λ_j为实数

$$\int_a^b \left[y_i^* \boldsymbol{L}y_j - (\boldsymbol{L}y_i)^* y_j\right] \mathrm{d}x = (\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b y_i^* y_j \mathrm{d}x$$

$$\therefore \qquad \int_a^b y_i^*(x) y_j(x) \mathrm{d}x = 0$$

自伴算符本征值问题的性质

性质3

自伴算符的本征函数具有正交性，即对应不同本征值的本征函数一定正交

Proof

设λ_i和λ_j是不相等的两个本征值，对应的本征函数为y_i和y_j

$$\boldsymbol{L}y_i = \lambda_i y_i \qquad \boldsymbol{L}y_j = \lambda_j y_j$$

本征值λ_i, λ_j为实数

$$\int_a^b \left[y_i^* \boldsymbol{L}y_j - (\boldsymbol{L}y_i)^* y_j\right] \mathrm{d}x = (\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b y_i^* y_j \mathrm{d}x$$

$$\therefore \qquad \int_a^b y_i^*(x) y_j(x) \mathrm{d}x = 0$$

讨论

- 由于本征函数是齐次微分方程在齐次边界条件下的解，所以将本征函数乘以一个非零常数因子仍然是本征函数
- 可以适当选择这个常数因子，使得对于任意一个本征值λ_i，都有
$$\int_a^b y_i^*(x)y_i(x)\mathrm{d}x = 1$$
- 这样得到的就是一个正交归一的函数组
$$\int_a^b y_i^*(x)y_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij}$$

讨论

- 由于本征函数是齐次微分方程在齐次边界条件下的解，所以将本征函数乘以一个非零常数因子仍然是本征函数
- 可以适当选择这个常数因子，使得对于任意一个本征值λ_i，都有

$$\int_a^b y_i^*(x)y_i(x)\mathrm{d}x = 1$$

- 这样得到的就是一个正交归一的函数组

$$\int_a^b y_i^*(x)y_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij}$$

讨论

- 由于本征函数是齐次微分方程在齐次边界条件下的解，所以将本征函数乘以一个非零常数因子仍然是本征函数
- 可以适当选择这个常数因子，使得对于任意一个本征值λ_i，都有
$$\int_a^b y_i^*(x)y_i(x)\mathrm{d}x = 1$$
- 这样得到的就是一个正交归一的函数组
$$\int_a^b y_i^*(x)y_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij}$$

自伴算符本征值问题的性质

性质4

自伴算符的本征函数(的全体)构成一个完备函数组，即任意一个在区间$[a,b]$中有连续二阶导数、且满足和自伴算符$\boldsymbol{L}$相同边界条件的函数$f(x)$，均可按本征函数$\{y_n(x)\}$展开为绝对而且一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ny_n(x)$$

(未完待续)

自伴算符本征值问题的性质

性质4

（续前页）

其中
$$c_n=\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b y_n(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x}$$

特别是，对于归一化的本征函数组
$$c_n=\int_a^b f(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x$$

自伴算符本征值问题的性质

性质4

（续前页）

其中
$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b y_n(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x}$$

特别是，对于归一化的本征函数组

$$c_n = \int_a^b f(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x$$

自伴算符本征值问题的性质

正交归一的本征函数组的完备性

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)y_n^*(x') = \delta(x-x')$$

讨论

- 由上面的性质3和4可以看到，只要将本征函数适当归一化，则本征函数的全体就构成了一个完备的正交归一函数集
- 因此，上一节中有关完备的正交归一函数集的讨论均可适用

自伴算符本征值问题的性质

正交归一的本征函数组的完备性

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) y_n^*(x') = \delta(x - x')$$

讨论

- 由上面的性质3和4可以看到，只要将本征函数适当归一化，则本征函数的全体就构成了一个完备的正交归一函数集
- 因此，上一节中有关完备的正交归一函数集的讨论均可适用

自伴算符本征值问题的性质

正交归一的本征函数组的完备性

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)y_n^*(x') = \delta(x-x')$$

讨论

- 由上面的性质3和4可以看到，只要将本征函数适当归一化，则本征函数的全体就构成了一个完备的正交归一函数集
- 因此，上一节中有关完备的正交归一函数集的讨论均可适用

自伴算符本征值问题的性质

讨论

- 以上暂时忽略掉一种可能性，即对应于一个本征值可能有不止一个(线性无关的)本征函数，因而可能并不彼此正交
- 稍后将讨论这种情形
- 即使在这种情形，也总还可以采用Schmidt的正交化步骤(见书18.1节)使之正交化，因而仍然可以得到一个完备的正交归一函数集

自伴算符本征值问题的性质

讨论

- 以上暂时忽略掉一种可能性，即对应于一个本征值可能有不止一个(线性无关的)本征函数，因而可能并不彼此正交
- 稍后将讨论这种情形
- 即使在这种情形，也总还可以采用Schmidt的正交化步骤(见书18.1节)使之正交化，因而仍然可以得到一个完备的正交归一函数集

自伴算符本征值问题的性质

讨论

- 以上暂时忽略掉一种可能性，即对应于一个本征值可能有不止一个(线性无关的)本征函数，因而可能并不彼此正交
- 稍后将讨论这种情形
- 即使在这种情形，也总还可以采用Schmidt的正交化步骤(见书18.1节)使之正交化，因而仍然可以得到一个完备的正交归一函数集

自伴算符本征值问题的性质

讨论

以上的展开条件还可以放宽：对于任意在$[a,b]$中平方可积的函数，展开式

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ny_n(x)$$

在平均收敛

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_ny_n(x)\right|^2\mathrm{d}x=0$$

的意义下仍然成立

自伴算符本征值问题的性质

说明

- 严格说来，上面关于自伴算符本征值的存在性和本征函数的完备性的讨论，本来还应当区分奇异的(区间无界或半无界；或是在有界区间上微分方程有奇点)和非奇异的(区间有界，且微分方程在区间上无奇点)本征值问题这两种情形
- 但由于并没有给出有关的证明，所以也就未曾区分这两类本征值问题
- 而且，为了叙述的方便，在有关的表述中都采用了有界区间的形式

自伴算符本征值问题的性质

说明

- 严格说来，上面关于自伴算符本征值的存在性和本征函数的完备性的讨论，本来还应当区分奇异的(区间无界或半无界； 或是在有界区间上微分方程有奇点)和非奇异的(区间有界，且微分方程在区间上无奇点)本征值问题这两种情形
- 但由于并没有给出有关的证明，所以也就未曾区分这两类本征值问题
- 而且，为了叙述的方便，在有关的表述中都采用了有界区间的形式

自伴算符本征值问题的性质

说明

- 严格说来，上面关于自伴算符本征值的存在性和本征函数的完备性的讨论，本来还应当区分奇异的(区间无界或半无界； 或是在有界区间上微分方程有奇点)和非奇异的(区间有界，且微分方程在区间上无奇点)本征值问题这两种情形
- 但由于并没有给出有关的证明，所以也就未曾区分这两类本征值问题
- 而且，为了叙述的方便，在有关的表述中都采用了有界区间的形式

讲授要点

1. Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - 自伴算符的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程本征值问题中的简并现象
2. 从S-L型方程本征值问题看分离变量法
   - 分离变量法精义
   - 分离变量法的发展

Sturm-Liouville型方程

到目前为止，我们讨论过几个常微分方程的本征值问题．涉及的微分方程有

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right]R = 0$$

它们可以归纳为下面的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + [\lambda\rho(x) - q(x)]\,y = 0$$

称为Sturm–Liouville型方程(简称S–L型方程)

Sturm-Liouville型方程

到目前为止，我们讨论过几个常微分方程的本征值问题．涉及的微分方程有

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right]R = 0$$

它们可以归纳为下面的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\lambda\rho(x) - q(x)\right]y = 0$$

称为Sturm–Liouville型方程(简称S–L型方程)

讨论

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]\,y=0$$

- 函数$p(x)$，$q(x)$和$\rho(x)$都是实函数，且都满足必要的连续性要求
- $\rho(x)$，称为权重函数
- 当权重函数$\rho(x)=$常数时，可以取为1

讨论

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]\,y=0$$

- 函数$p(x)$, $q(x)$和$\rho(x)$都是实函数，且都满足必要的连续性要求
- $\rho(x)$，称为权重函数
- 当权重函数$\rho(x)=$常数时，可以取为1

讨论

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0$$

- 函数$p(x)$, $q(x)$和$\rho(x)$都是实函数，且都满足必要的连续性要求
- $\rho(x)$，称为权重函数
- 当权重函数$\rho(x)=$常数时，可以取为1

讨论

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]\,y=0$$

- 函数$p(x)$, $q(x)$和$\rho(x)$都是实函数，且都满足必要的连续性要求
- $\rho(x)$，称为权重函数
- 当权重函数$\rho(x)=$常数时，可以取为1

讨论

不恒为常数的权重函数$\rho(x)$

- 可以来源于正交曲面坐标系的使用(这时可以从Laplace算符的具体表达式中追寻到权重函数的踪迹； 从根本上说，它反映了坐标长度单位是该变量的函数．可以称之为来源于空间的几何描述的不均匀性)
- 也可能来源于问题所涉及的物理性质的不均匀性(例如，密度分布的不均匀)
- 因此，就我们所关心的物理问题而言，可以假设$\rho(x) \geq 0$，而且不恒为0

讨论

不恒为常数的权重函数$\rho(x)$

- 可以来源于正交曲面坐标系的使用(这时可以从Laplace算符的具体表达式中追寻到权重函数的踪迹； 从根本上说，它反映了坐标长度单位是该变量的函数. 可以称之为来源于空间的几何描述的不均匀性)
- 也可能来源于问题所涉及的物理性质的不均匀性(例如，密度分布的不均匀)
- 因此，就我们所关心的物理问题而言，不妨假设$\rho(x) \geq 0$，而且不恒为0

讨论

不恒为常数的权重函数$\rho(x)$

- 可以来源于正交曲面坐标系的使用(这时可以从Laplace算符的具体表达式中追寻到权重函数的踪迹； 从根本上说，它反映了坐标长度单位是该变量的函数. 可以称之为来源于空间的几何描述的不均匀性)
- 也可能来源于问题所涉及的物理性质的不均匀性(例如，密度分布的不均匀)
- 因此，就我们所关心的物理问题而言，不妨假设$\rho(x)\geq 0$，而且不恒为0

讨论

不恒为常数的权重函数$\rho(x)$

- 可以来源于正交曲面坐标系的使用(这时可以从Laplace算符的具体表达式中追寻到权重函数的踪迹；从根本上说，它反映了坐标长度单位是该变量的函数．可以称之为来源于空间的几何描述的不均匀性)
- 也可能来源于问题所涉及的物理性质的不均匀性(例如，密度分布的不均匀)
- 因此，就我们所关心的物理问题而言，不妨假设$\rho(x)\geq 0$，而且不恒为0

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0$$

定义微分算符

$$\boldsymbol{L}\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$$

则有

Sturm–Liouville型方程的算符形式

$$\boldsymbol{L}y(x)=\lambda\rho(x)y(x)$$

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0$$

定义微分算符

$$\boldsymbol{L}\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$$

则有

Sturm–Liouville型方程的算符形式

$$\boldsymbol{L}y(x)=\lambda\rho(x)y(x)$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0$$

附加上适当的边界条件，就构成Sturm–Liouville型方程的本征值问题

当λ取某些特定值时，有满足Sturm–Liouville方程及边界条件的非零解，λ的这些特定值即为本征值，相应的非零解即为本征函数

Sturm–Liouville型方程本征值问题

Sturm–Liouville型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]\,y=0$$

附加上适当的边界条件，就构成Sturm–Liouville型方程的本征值问题

当λ取某些特定值时，有满足Sturm–Liouville方程及边界条件的非零解，λ的这些特定值即为**本征值**，相应的非零解即为**本征函数**

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

Sturm–Liouville型方程$\boldsymbol{L}y(x) = \lambda\rho(x)y(x)$和$\boldsymbol{L}y(x) = \lambda y(x)$的区别在于出现了权重函数$\rho(x)$

为使Sturm–Liouville型方程本征值问题也符合自伴算符本征值问题的要求，可作如下修改

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

Sturm–Liouville型方程$\boldsymbol{L}y(x)=\lambda\rho(x)y(x)$和$\boldsymbol{L}y(x)=\lambda y(x)$的区别在于出现了权重函数$\rho(x)$

为使Sturm–Liouville型方程本征值问题也符合自伴算符本征值问题的要求，可作如下修改

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

修改之一

- 引进新的算符

$$\boldsymbol{L}' \equiv \frac{1}{\rho(x)}\boldsymbol{L} \equiv \frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\right\}$$

则Sturm–Liouville型方程就化为

$$\boldsymbol{L}'y(x) = \lambda y(x)$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

修改之一

- 引进新的算符

$$\boldsymbol{L}' \equiv \frac{1}{\rho(x)}\boldsymbol{L} \equiv \frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\right\}$$

则Sturm–Liouville型方程就化为

$$\boldsymbol{L}'y(x) = \lambda y(x)$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

修改之二

- 采用新的内积定义

$$(y_1, y_2)_\rho \equiv \int_a^b y_1^*(x) y_2(x) \rho(x) \mathrm{d}x$$

在这样的内积定义下，就有

$$(y_1, \boldsymbol{L}' y_2)_\rho = (y_1, \boldsymbol{L} y_2) \quad (\boldsymbol{L}' y_1, y_2)_\rho = (\boldsymbol{L} y_1, y_2)$$

$$\therefore \quad y_1^* \boldsymbol{L} y_2 - (\boldsymbol{L} y_1)^* y_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\right]$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

修改之二

- 采用新的内积定义

$$(y_1, y_2)_\rho \equiv \int_a^b y_1^*(x)y_2(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

在这样的内积定义下，就有

$$(y_1, \boldsymbol{L}'y_2)_\rho = (y_1, \boldsymbol{L}y_2) \quad (\boldsymbol{L}'y_1, y_2)_\rho = (\boldsymbol{L}y_1, y_2)$$

$$\therefore \quad y_1^*\boldsymbol{L}y_2 - (\boldsymbol{L}y_1)^*y_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\right]$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

修改之二

- 采用新的内积定义

$$(y_1, y_2)_\rho \equiv \int_a^b y_1^*(x) y_2(x) \rho(x) \mathrm{d}x$$

在这样的内积定义下，就有

$$(y_1, \boldsymbol{L}' y_2)_\rho = (y_1, \boldsymbol{L} y_2) \quad (\boldsymbol{L}' y_1, y_2)_\rho = (\boldsymbol{L} y_1, y_2)$$

$$\therefore \quad y_1^* \boldsymbol{L} y_2 - (\boldsymbol{L} y_1)^* y_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(y_1^* \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2 \frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\right]$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

修改之三

- 附加边界条件

$$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b=0$$

这就得到

$$(y_1, \boldsymbol{L}y_2)=(\boldsymbol{L}y_1, y_2) \quad \text{即} \quad (y_1, \boldsymbol{L}'y_1)_\rho=(\boldsymbol{L}'y_1, y_2)_\rho$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

修改之三

- 附加边界条件

$$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$$

这就得到

$$(y_1,\boldsymbol{L}y_2)=(\boldsymbol{L}y_1,y_2) \quad \text{即} \quad (y_1,\boldsymbol{L}'y_1)_\rho=(\boldsymbol{L}'y_1,y_2)_\rho$$

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

结论

这表明，只要采用内积定义

$$(y_1, y_2)_\rho \equiv \int_a^b y_1^*(x) y_2(x) \rho(x) \mathrm{d}x$$

则算符$\boldsymbol{L}' \equiv \dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\right\}$

在边界条件$p(x)\left(y_1^*\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\dfrac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b = 0$ 下是自伴的

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

结论

换句话说，在边界条件

$$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b=0$$

之下，自伴算符本征值问题的一系列结论都能移植到S–L型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0$$

的本征值问题中

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

结论

换句话说，自伴算符本征值问题的一系列结论都能移植到S–L型方程的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]\,y=0$$

$$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b=0$$

中

Sturm–Liouville型方程本征值问题的自伴性

结论

唯一的改变是在内积定义中需出现权函数$\rho(x)$.
相应地，本征函数的正交性就变为

$$\int_a^b y_i^*(x) y_j(x) \rho(x) \, \mathrm{d}x = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

有关本征函数完备性及展开系数公式也需作相应的改变

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

1. 若$p(a)\neq 0$，可加上第一、二、三类边界条件

$$\alpha y(a)-\beta y'(a)=0,\qquad \alpha\text{和}\beta\text{均为(正)实数}$$

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

1. 若$p(a)\neq 0$，可加上第一、二、三类边界条件

$$\alpha y(a)-\beta y'(a)=0,\qquad \alpha和\beta均为(正)实数$$

Skip proof

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

1. 若$p(a)\neq 0$，可加上第一、二、三类边界条件

$$\alpha y(a)-\beta y'(a)=0,\qquad \alpha和\beta均为(正)实数$$

证明： $\alpha y_i(a)-\beta y_i'(a)=0,\quad i=1,2$

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一： $p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

1. 若$p(a)\neq 0$，可加上第一、二、三类边界条件

$$\alpha y(a)-\beta y'(a)=0, \qquad \alpha\text{和}\beta\text{均为(正)实数}$$

证明：
$$\alpha y_i(a)-\beta y_i'(a)=0, \quad i=1,2$$
$$\alpha y_i^*(a)-\beta y_i^{*\prime}(a)=0, \quad i=1,2$$

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1^*}{dx}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1^*}{dx}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

1. 若$p(a)\neq 0$，可加上第一、二、三类边界条件

$$\alpha y(a)-\beta y'(a)=0,\qquad \alpha\text{和}\beta\text{均为(正)实数}$$

证明：
$$\alpha y_i(a)-\beta y_i'(a)=0,\quad i=1,2$$
$$\alpha y_i^*(a)-\beta y_i^{*\prime}(a)=0,\quad i=1,2$$

α和β不同时为0，故有

$$\begin{vmatrix} y_1^*(a) & y_1^{*\prime}(a) \\ y_2(a) & y_2'(a)\end{vmatrix}=y_1^*(a)y_2'(a)-y_2(a)y_1^{*\prime}(a)=0$$

边界条件$p(x)\left(y_1^*\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\dfrac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\dfrac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

2. 若$p(a)=0$，这时$x=a$点是方程的奇点．假定$p(x)$, $q(x)$和$\rho(x)$满足一定的要求，使得$x=a$点是方程的正则奇点，而且第一解有界，第二解无界．这时的边界条件通常是有界条件

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a, b$均为0

以端点$x=a$为例

2. 若$p(a)=0$，这时$x=a$点是方程的奇点．假定$p(x)$, $q(x)$和$\rho(x)$满足一定的要求，使得$x=a$点是方程的正则奇点，而且第一解有界，第二解无界．这时的边界条件通常是有界条件

Skip details

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

2. 若$p(a)=0$，这时$x=a$点是方程的奇点．假定$p(x)$, $q(x)$和$\rho(x)$满足一定的要求，使得$x=a$点是方程的正则奇点，而且第一解有界，第二解无界．这时的边界条件通常是有界条件

例如

$$p(a)=0 \qquad p'(a)\neq 0$$

$$\rho(x)\text{和}(x-a)q(x)\text{均在}x=a\text{点解析}$$

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

2. 若$p(a)=0$，这时$x=a$点是方程的奇点．假定$p(x), q(x)$和$\rho(x)$满足一定的要求，使得$x=a$点是方程的正则奇点，而且第一解有界，第二解无界．这时的边界条件通常是有界条件

或

$$p(a)=0 \quad p'(a)=0 \quad p''(a)\neq 0$$

$$\rho(x)和q(x)均在x=a点解析$$

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

3. 若$p(a)=0$，且$x=a$点是方程的非正则奇点

在一定条件下，可通过要求函数平方可积(即“归一化条件”)而确定本征值

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形一：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$均为0

以端点$x=a$为例

3. 若$p(a)=0$，且$x=a$点是方程的非正则奇点

在一定条件下，可通过要求函数平方可积(即“归一化条件”)而确定本征值

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形二：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$两点的数值相等，但不为0

如果

$$p(a)=p(b)\quad q(a)=q(b)\quad \rho(a)=\rho(b)$$

并且

$$y(a)=y(b)\quad y'(a)=y'(b)$$

就可以满足这个要求

这正是讨论过的**周期条件**的情形

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_a^b=0$的具体化

情形二：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$两点的数值相等，但不为0

如果

$$p(a)=p(b)\quad q(a)=q(b)\quad \rho(a)=\rho(b)$$

并且

$$y(a)=y(b)\quad y'(a)=y'(b)$$

就可以满足这个要求

这正是讨论过的周期条件的情形

边界条件$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b=0$的具体化

情形二：$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a,b$两点的数值相等，但不为0

如果

$$p(a)=p(b)\quad q(a)=q(b)\quad \rho(a)=\rho(b)$$

并且

$$y(a)=y(b)\quad y'(a)=y'(b)$$

就可以满足这个要求

这正是讨论过的周期条件的情形

讲授要点

1. Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - 自伴算符的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程本征值问题中的简并现象
2. 从S-L型方程本征值问题看分离变量法
   - 分离变量法精义
   - 分离变量法的发展

只介绍结论．证明请见书§18.5

定理

如果S–L型方程本征值问题的本征函数是复的，且其实部和虚部线性无关，则此本征值问题是二重简并的

定理

设$y_1(x)$和$y_2(x)$都是S–L型方程本征值问题的两个实的线性无关的本征函数， 并且$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a$和$x=b$点均为0，则$y_1(x)$和$y_2(x)$不可能对应于同一个本征值$\lambda$

只介绍结论．证明请见书§18.5

定理

如果S–L型方程本征值问题的本征函数是复的，且其实部和虚部线性无关，则此本征值问题是二重简并的

定理

设$y_1(x)$和$y_2(x)$都是S–L型方程本征值问题的两个实的线性无关的本征函数，并且$p(x)\left(y_1^*\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\dfrac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a$和$x=b$点均为0，则$y_1(x)$和$y_2(x)$不可能对应于同一个本征值$\lambda$

只介绍结论．证明请见书§18.5

定理

如果S–L型方程本征值问题的本征函数是复的，且其实部和虚部线性无关，则此本征值问题是二重简并的

定理

设$y_1(x)$和$y_2(x)$都是S–L型方程本征值问题的两个实的线性无关的本征函数， 并且$p(x)\left(y_1^*\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\dfrac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)$在$x=a$和$x=b$点均为0，则$y_1(x)$和$y_2(x)$不可能对应于同一个本征值$\lambda$

讲授要点

1. Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - 自伴算符的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程本征值问题中的简并现象
2. 从S-L型方程本征值问题看分离变量法
   - 分离变量法精义
   - 分离变量法的发展

分析：对定解问题的要求

仍以弦的横振动问题为例

两端固定弦的自由振动

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\big|_{x=0} = 0 \qquad u\big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

如果存在一个S–L方程的本征值问题

$$\boldsymbol{L}X = \lambda\rho X$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

两者的边界条件形式完全相同

分析：对定解问题的要求

仍以弦的横振动问题为例

两端固定弦的自由振动

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

如果存在一个S–L方程的本征值问题

$$\boldsymbol{L}X = \lambda\rho X$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

两者的边界条件形式完全相同

分析：对定解问题的要求

仍以弦的横振动问题为例

两端固定弦的自由振动

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

如果存在一个S–L方程的本征值问题

$$\boldsymbol{L}X = \lambda\rho X$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

两者的边界条件形式完全相同

分析：对定解问题的要求

因此，可以将定解问题的解$u(x,t)$按照本征函数的全体$\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

(为方便起见，假设本征函数已归一化)

- 这里，本征函数组的完备性起了决定性的作用
- 为了保证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$能够收敛(至少是平均收敛)到解$u(x,t)$，必须遍及全部本征函数求和，绝不可以无理由地摒弃若干个本征函数
- 否则，尽管在形式上似乎仍能求到一个级数“解”，但它绝不可能收敛到真正的解$u(x,t)$

分析：对定解问题的要求

因此，可以将定解问题的解$u(x,t)$按照本征函数的全体$\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

(为方便起见，假设本征函数已归一化)

- 这里，本征函数组的完备性起了决定性的作用
- 为了保证$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$能够收敛(至少是平均收敛)到解$u(x,t)$，必须遍及全部本征函数求和．绝不可以无理由地摈弃若干个本征函数
- 否则，尽管在形式上似乎仍能求到一个级数“解”，但它绝不可能收敛到真正的解$u(x,t)$

分析：对定解问题的要求

因此，可以将定解问题的解$u(x,t)$按照本征函数的全体$\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

(为方便起见，假设本征函数已归一化)

- 这里，本征函数组的完备性起了决定性的作用
- 为了保证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$能够收敛(至少是平均收敛)到解$u(x,t)$，必须遍及全部本征函数求和．绝不可以无理由地摈弃若干个本征函数
- 否则，尽管在形式上似乎仍能求到一个级数“解”，但它绝不可能收敛到真正的解$u(x,t)$

分析：对定解问题的要求

因此，可以将定解问题的解$u(x,t)$按照本征函数的全体$\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

(为方便起见，假设本征函数已归一化)

- 这里，本征函数组的完备性起了决定性的作用
- 为了保证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$能够收敛(至少是平均收敛)到解$u(x,t)$，必须遍及全部本征函数求和．绝不可以无理由地摈弃若干个本征函数
- 否则，尽管在形式上似乎仍能求到一个级数“解”，但它绝不可能收敛到真正的解$u(x,t)$

分析：对定解问题的要求

将解式$u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$代入方程，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}T_m''(t)X_m(x)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)X_m''(x)=0$$

由本征函数的正交性，得

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\,X_m'')T_m(t)=0\qquad n=1,2,3,\cdots$$

同样也将初始条件按这一组本征函数展开，得到

$$T_n(0)=(X_n,\,\phi)\qquad T_n'(0)=(X_n,\,\psi)$$

求出$T_n(t)$，代回到解式中，就求出了定解问题的解$u(x,t)$

这里要求解的是关于未知函数$\{T_n(t),n=1,2,3,\cdots\}$的常微分方程组．一般说来，比较困难

分析：对定解问题的要求

将解式$u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$代入方程，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}T_m''(t)X_m(x)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)X_m''(x)=0$$

由本征函数的正交性，得

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\ X_m'')T_m(t)=0\qquad n=1,2,3,\cdots$$

同样也将初始条件按这一组本征函数展开，得到

$$T_n(0)=(X_n,\ \phi)\qquad T_n'(0)=(X_n,\ \psi)$$

求出$T_n(t)$，代回到解式中，就求出了定解问题的解$u(x,t)$

这里要求解的是关于未知函数$\{T_n(t),n=1,2,3,\cdots\}$的常微分方程组．一般说来，比较困难

分析：对定解问题的要求

将解式$u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$代入方程，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}T_m''(t)X_m(x)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)X_m''(x)=0$$

由本征函数的正交性，得

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\ X_m'')T_m(t)=0 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

同样也将初始条件按这一组本征函数展开，得到

$$T_n(0)=(X_n,\ \phi) \qquad T_n'(0)=(X_n,\ \psi)$$

求出$T_n(t)$，代回到解式中，就求出了定解问题的解$u(x,t)$

这里要求解的是关于未知函数$\{T_n(t), n=1,2,3,\cdots\}$的常微分方程组．一般说来，比较困难

分析：对定解问题的要求

将解式$u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$代入方程，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}T_m''(t)X_m(x)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)X_m''(x)=0$$

由本征函数的正交性，得

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\,X_m'')T_m(t)=0 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

同样也将初始条件按这一组本征函数展开，得到

$$T_n(0)=(X_n,\,\phi) \qquad T_n'(0)=(X_n,\,\psi)$$

求出$T_n(t)$，代回到解式中，就求出了定解问题的解$u(x,t)$

这里要求解的是关于未知函数$\{T_n(t),n=1,2,3,\cdots\}$的常微分方程组．一般说来，比较困难

分析：对定解问题的要求

将解式$u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$代入方程，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}T_m''(t)X_m(x)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)X_m''(x)=0$$

由本征函数的正交性，得

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\ X_m'')T_m(t)=0 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

同样也将初始条件按这一组本征函数展开，得到

$$T_n(0)=(X_n,\ \phi) \qquad T_n'(0)=(X_n,\ \psi)$$

求出$T_n(t)$，代回到解式中，就求出了定解问题的解$u(x,t)$

这里要求解的是关于未知函数$\{T_n(t),n=1,2,3,\cdots\}$的常微分方程组．一般说来，比较困难

分析：对定解问题的要求

从定解问题看，决定因素有二：

1. 定解问题(偏微分方程、边界条件、初始条件)是线性的
2. 边界条件是齐次的

因此，如果将定解问题中的偏微分方程改为非齐次

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$f(x,t)$作为x的函数，和$\{X_n(x)\}$应当属于同一个函数空间

同样也能得到常微分方程组

$$T_n''(t) - a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n, X_m'')T_m(t) = (X_n, f) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$T_n(0) = (X_n, \phi) \qquad T_n'(0) = (X_n, \psi)$$

分析：对定解问题的要求

从定解问题看，决定因素有二：

1. 定解问题(偏微分方程、边界条件、初始条件)是线性的
2. 边界条件是齐次的

因此，如果将定解问题中的偏微分方程改为非齐次

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$f(x,t)$作为x的函数，和$\{X_n(x)\}$应当属于同一个函数空间

同样也能得到常微分方程组

$$T_n''(t) - a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n, X_m'')T_m(t) = (X_n, f) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$T_n(0) = (X_n, \phi) \qquad T_n'(0) = (X_n, \psi)$$

分析：对定解问题的要求

从定解问题看，决定因素有二：

1. 定解问题(偏微分方程、边界条件、初始条件)是线性的
2. 边界条件是齐次的

因此，如果将定解问题中的偏微分方程改为非齐次

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$f(x,t)$作为x的函数，和$\{X_n(x)\}$应当属于同一个函数空间

同样也能得到常微分方程组

$$T_n''(t) - a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n, X_m'')T_m(t) = (X_n, f) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$T_n(0) = (X_n, \phi) \qquad T_n'(0) = (X_n, \psi)$$

分析：对定解问题的要求

从定解问题看，决定因素有二：

1. 定解问题(偏微分方程、边界条件、初始条件)是线性的
2. 边界条件是齐次的

因此，如果将定解问题中的偏微分方程改为非齐次

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

$f(x,t)$作为x的函数，和$\{X_n(x)\}$应当属于同一个函数空间

同样也能得到常微分方程组

$$T_n''(t) - a^2 \sum_{m=1}^{\infty} (X_n, X_m'') T_m(t) = (X_n, f) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$T_n(0) = (X_n, \phi) \qquad T_n'(0) = (X_n, \psi)$$

分析：对定解问题的要求

从定解问题看，决定因素有二：

1. 定解问题(偏微分方程、边界条件、初始条件)是线性的
2. 边界条件是齐次的

因此，如果将定解问题中的偏微分方程改为非齐次

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$f(x,t)$作为x的函数，和$\{X_n(x)\}$应当属于同一个函数空间

同样也能得到常微分方程组

$$T_n''(t) - a^2 \sum_{m=1}^{\infty} (X_n,\, X_m'') T_m(t) = (X_n,\, f) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$T_n(0) = (X_n,\, \phi) \qquad T_n'(0) = (X_n,\, \psi)$$

分析：对定解问题的要求

从定解问题看，决定因素有二：

1. 定解问题(偏微分方程、边界条件、初始条件)是线性的
2. 边界条件是齐次的

因此，如果将定解问题中的偏微分方程改为非齐次

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$f(x,t)$作为x的函数，和$\{X_n(x)\}$应当属于同一个函数空间

同样也能得到常微分方程组

$$T_n''(t) - a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\ X_m'')T_m(t) = (X_n,\ f) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$T_n(0) = (X_n,\ \phi) \qquad T_n'(0) = (X_n,\ \psi)$$

思考题

对于与时间有关的(波动方程或热传导方程)定解问题，如果边界条件是非齐次的，应如何求解?

进一步的分析：对本征函数的要求

- 对于本征函数，除了要求它满足和定解问题相同的边界条件外，对于它所满足的微分方程只是要求必须是S–L型方程， 但对于方程的具体形式未加限制
- 本征函数满足的微分方程不同，$\{X_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots\}$的形式不同， 因而得到的关于$T_n(t)$的常微分方程组的形式也不相同，求得的 $T_n(t)$也不相同
- 定解问题的解的存在唯一性，保证了最后求得的解相同
- 并不是任何常微分方程组都容易求解

进一步的分析：对本征函数的要求

- 对于本征函数，除了要求它满足和定解问题相同的边界条件外，对于它所满足的微分方程只是要求必须是S–L型方程，但对于方程的具体形式未加限制
- 本征函数满足的微分方程不同，$\{X_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots\}$的形式不同，因而得到的关于$T_n(t)$的常微分方程组的形式也不相同，求得的$T_n(t)$也不相同
- 定解问题的解的存在唯一性，保证了最后求得的解相同
- 并不是任何常微分方程组都容易求解

进一步的分析：对本征函数的要求

- 对于本征函数，除了要求它满足和定解问题相同的边界条件外，对于它所满足的微分方程只是要求必须是S–L型方程，但对于方程的具体形式未加限制
- 本征函数满足的微分方程不同，$\{X_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots\}$的形式不同，因而得到的关于$T_n(t)$的常微分方程组的形式也不相同，求得的$T_n(t)$也不相同
- 定解问题的解的存在唯一性，保证了最后求得的解相同
- 并不是任何常微分方程组都容易求解

进一步的分析：对本征函数的要求

- 对于本征函数，除了要求它满足和定解问题相同的边界条件外，对于它所满足的微分方程只是要求必须是S–L型方程， 但对于方程的具体形式未加限制
- 本征函数满足的微分方程不同，$\{X_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots\}$的形式不同， 因而得到的关于$T_n(t)$的常微分方程组的形式也不相同，求得的 $T_n(t)$也不相同
- 定解问题的解的存在唯一性，保证了最后求得的解相同
- 并不是任何常微分方程组都容易求解

进一步的分析：对本征函数的要求

- 在实际求解过程中，就需要恰当地选择本征函数组$\{X_n(x), n=1,2,3,\cdots\}$，使得$T_n(t)$的求解问题尽可能地简单
- 最简单的情形就是要求

$$(X_n, X_m'') = -\lambda_m \delta_{nm}$$

- 因此，$T_n(t)$满足常微分方程

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0 \text{ 或 } T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = (X_n, f)$$

而非常微分方程组

进一步的分析：对本征函数的要求

- 在实际求解过程中，就需要恰当地选择本征函数组$\{X_n(x), n=1,2,3,\cdots\}$，使得$T_n(t)$的求解问题尽可能地简单
- 最简单的情形就是要求

$$(X_n, X_m'') = -\lambda_m\delta_{nm}$$

- 因此，$T_n(t)$满足常微分方程

$$T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=0 \text{ 或 } T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=(X_n, f)$$

而非常微分方程组

进一步的分析：对本征函数的要求

- 在实际求解过程中，就需要恰当地选择本征函数组$\{X_n(x), n=1,2,3,\cdots\}$，使得$T_n(t)$的求解问题尽可能地简单
- 最简单的情形就是要求

$$(X_n, X''_m) = -\lambda_m \delta_{nm}$$

- 因此，$T_n(t)$满足常微分方程

$$T''_n(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0 \text{ 或 } T''_n(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = (X_n, f)$$

而非常微分方程组

进一步的分析：对本征函数的要求

要求$(X_n, X''_m) = -\lambda_m\delta_{nm}$的含义

- 因为本征函数组$\{X_n(x), n = 1, 2, 3, \cdots\}$是正交归一的，$(X_n, X_m) = \delta_{mn}$，上述要求就等价于

$$(X_n, X''_m) = -\lambda_m (X_n, X_m) \quad 即 \quad X_n, X''_m + \lambda_m X_m = 0$$

- 这意味着本征函数应当满足常微分方程

$$X''_n(x) + \lambda_n X_n(x) = 0$$

- 这正是分离变量法标准步骤得到的微分方程

进一步的分析：对本征函数的要求

要求$(X_n,\ X''_m) = -\lambda_m\delta_{nm}$的含义

- 因为本征函数组$\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$是正交归一的，$(X_n,\ X_m)=\delta_{mn}$，上述要求就等价于

$$(X_n,\ X''_m)=-\lambda_m(X_n,\ X_m) \quad \text{即} \quad X_n,\ X''_m+\lambda_m X_m=0$$

- 这意味着本征函数应当满足常微分方程

$$X''_n(x)+\lambda_n X_n(x)=0$$

- 这正是分离变量法标准步骤得到的微分方程

进一步的分析：对本征函数的要求

要求$(X_n,\ X_m'')=-\lambda_m\delta_{nm}$的含义

- 因为本征函数组$\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$是正交归一的，$(X_n,\ X_m)=\delta_{mn}$，上述要求就等价于

$$(X_n,\ X_m'')=-\lambda_m(X_n,\ X_m) \quad \text{即} \quad X_n,\ X_m''+\lambda_m X_m=0$$

- 这意味着本征函数应当满足常微分方程

$$X_n''(x)+\lambda_n X_n(x)=0$$

- 这正是分离变量法标准步骤得到的微分方程

进一步的分析：对本征函数的要求

要求$(X_n,\ X_m'')=-\lambda_m\delta_{nm}$的含义

- 因为本征函数组$\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$是正交归一的，$(X_n,\ X_m)=\delta_{mn}$，上述要求就等价于

$$(X_n,\ X_m'')=-\lambda_m(X_n,\ X_m) \quad \text{即} \quad X_n,\ X_m''+\lambda_m X_m=0$$

- 这意味着本征函数应当满足常微分方程

$$X_n''(x)+\lambda_n X_n(x)=0$$

- 这正是分离变量法标准步骤得到的微分方程

小结

- 分离变量法提供了选择本征函数组的最佳方案
- 本征函数的完备性是在理论上保证了一定可以将定解问题的解按该本征函数组展开(这是有条件的，定解问题和本征函数要满足相同的齐次边界条件)
- 选用“相应齐次问题的本征函数”则保证了可以方便地求出展开系数(实际上是函数)，保证了这种解法在实用上的可行性

小结

- 分离变量法提供了选择本征函数组的最佳方案
- 本征函数的完备性是在理论上保证了一定可以将定解问题的解按该本征函数组展开
(这是有条件的，定解问题和本征函数要满足相同的齐次边界条件)
- 选用“相应齐次问题的本征函数”则保证了可以方便地求出展开系数(实际上是函数)，保证了这种解法在实用上的可行性

小结

- 分离变量法提供了选择本征函数组的最佳方案
- 本征函数的完备性是在理论上保证了一定可以将定解问题的解按该本征函数组展开(这是有条件的，定解问题和本征函数要满足相同的齐次边界条件)
- 选用“相应齐次问题的本征函数”则保证了可以方便地求出展开系数(实际上是函数)，保证了这种解法在实用上的可行性

讲授要点

1. Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - 自伴算符的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程的本征值问题
   - Sturm-Liouville型方程本征值问题中的简并现象
2. 从S-L型方程本征值问题看分离变量法
   - 分离变量法精义
   - 分离变量法的发展

引言

在深入理解了分离变量法的精神实质后，求解偏微分方程定解问题时就获得了更大的自由

这不仅体现在使得我们对于各种类型的定解问题(方程齐次或非齐次，边界条件齐次或非齐次)的求解有了一个统一的更深入的认识

也还表现在拓宽了对于某些定解问题的求解思路

以下列问题为例

引言

在深入理解了分离变量法的精神实质后，求解偏微分方程定解问题时就获得了更大的自由

这不仅体现在使得我们对于各种类型的定解问题(方程齐次或非齐次，边界条件齐次或非齐次)的求解有了一个统一的更深入的认识

也还表现在拓宽了对于某些定解问题的求解思路

以下列问题为例

引言

在深入理解了分离变量法的精神实质后，求解偏微分方程定解问题时就获得了更大的自由

这不仅体现在使得我们对于各种类型的定解问题(方程齐次或非齐次，边界条件齐次或非齐次)的求解有了一个统一的更深入的认识

也还表现在拓宽了对于某些定解问题的求解思路

以下列问题为例

引言

在深入理解了分离变量法的精神实质后，求解偏微分方程定解问题时就获得了更大的自由

这不仅体现在使得我们对于各种类型的定解问题(方程齐次或非齐次，边界条件齐次或非齐次)的求解有了一个统一的更深入的认识

也还表现在拓宽了对于某些定解问题的求解思路

以下列问题为例

例13.4

单位球内的稳定问题

$$\nabla^2 u = f \qquad x^2+y^2+z^2<1$$
$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$$

解法1

采用球坐标系求解，将$u(r,\theta,\phi)$按“相应齐次问题的本征函数”$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$展开

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} R_{lm}(r)\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$$

例13.4

单位球内的稳定问题

$$\nabla^2 u = f \qquad x^2+y^2+z^2<1$$
$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$$

解法1

采用球坐标系求解，将$u(r,\theta,\phi)$按“相应齐次问题的本征函数”$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$展开

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}R_{lm}(r)\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$$

例13.4

单位球内的稳定问题

$$\nabla^2 u = f \qquad x^2+y^2+z^2<1$$
$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$$

解法1

则叠加系数$R_{lm}(r)$满足常微分方程边值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R_{lm}}{\mathrm{d}r}\right] - \frac{l(l+1)}{r^2}R_{lm}(r)$$
$$= \iint \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi) f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$R_{lm}(0)\text{有界} \qquad R_{lm}(1)=0$$

例13.4

单位球内的稳定问题

$$\nabla^2 u = f \qquad x^2+y^2+z^2<1$$
$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$$

解法1

则叠加系数$R_{lm}(r)$满足常微分方程边值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R_{lm}}{\mathrm{d}r}\right] - \frac{l(l+1)}{r^2}R_{lm}(r)$$
$$= \iint \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$R_{lm}(0)$有界 $\qquad R_{lm}(1)=0$

例13.4

单位球内的稳定问题

$$\nabla^2 u = f \qquad x^2+y^2+z^2<1$$
$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$$

解法1

这里遇到的常微分方程是一个变系数的非齐次方程，是否容易求解取决于非齐次项的具体形式

例13.4

解法2

按照前面的分析，如果能找到一组本征函数，只要它也满足此定解问题的齐次边界条件， 那么就可以将$u(r,\theta,\phi)$按这一组本征函数展开

例13.4

解法2

按照前面的分析，如果能找到一组本征函数，只要它也满足此定解问题的齐次边界条件， 那么就可以将$u(r,\theta,\phi)$按这一组本征函数展开

具体说来，可以先求解本征值问题

$$-\nabla^2 w = \lambda w \qquad x^2+y^2+z^2<1$$
$$w\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$$

例13.4

解法2

可以解得本征值

$$\lambda_{nl} = k_{nl}^2 \quad n = 1, 2, 3, \cdots \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

和本征函数 $w_{nlm}(r, \theta, \phi) = \mathrm{j}_l(k_{nl} r)\, \mathrm{Y}_l^m(\theta, \phi)$，其中 k_{nl}是l阶球Bessel函数$\mathrm{j}_l(x)$的第n个正零点

例13.4

解法2

可以解得本征值

$$\lambda_{nl} = k_{nl}^2 \quad n = 1, 2, 3, \cdots \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

和本征函数 $w_{nlm}(r, \theta, \phi) = \mathrm{j}_l(k_{nl}r)\,\mathrm{Y}_l^m(\theta, \phi)$，其中 k_{nl}是l阶球Bessel函数$\mathrm{j}_l(x)$的第n个正零点

因此，可以将$u(r, \theta, \phi)$按$w_{nlm}(r, \theta, \phi)$展开

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{nlm}\mathrm{j}_l(k_{nl}r)\mathrm{Y}_l^m(\theta, \phi)$$

例13.4

解法2

代入偏微分方程，就得到

$$-k_{nl}^2 c_{nlm}\int_0^1 \mathrm{j}_l^2(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r = \int_0^1 \mathrm{j}_l(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r$$

$$\times\iint \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

例13.4

解法2

代入偏微分方程，就得到

$$-k_{nl}^2 c_{nlm}\int_0^1 \mathrm{j}_l^2(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r=\int_0^1 \mathrm{j}_l(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r$$

$$\times\iint \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

这是一个代数方程！

例13.4

解法2

根据球Bessel函数的定义及有关结果，可以算出

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{j}_l^2(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r =&\frac{\pi}{2k_{nl}}\int_0^1 \mathrm{J}_{l+1/2}^2(k_{nl}r)r\mathrm{d}r\\ =&\frac{\pi}{4k_{nl}}\left[\mathrm{J}_{l+1/2}'(k_{nl})\right]^2\\ =&\frac{1}{2}\left[\mathrm{j}_l'(k_{nl})\right]^2\end{aligned}$$

例13.4

解法2

所以

$$c_{nlm} = -\frac{2}{k_{nl}^2\left[\mathrm{j}_l'(k_{nl})\right]^2}\int_0^1 \mathrm{j}_l(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r$$

$$\times\iint \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

例13.4

解法2

- 在求解本征函数时，已经用到了全部边界条件，包括在转换到球坐标系时出现的周期条件和有界条件．这就保证了解$u(r,\theta,\phi)$也满足这些边界条件
- 这种解法的优点是除了要找到合适的本征函数外，无需再解常微分方程
- 但这是以多作了一重级数展开为代价的

例13.4

解法2

- 在求解本征函数时，已经用到了全部边界条件，包括在转换到球坐标系时出现的周期条件和有界条件． 这就保证了解$u(r,\theta,\phi)$也满足这些边界条件
- 这种解法的优点是除了要找到合适的本征函数外，无需再解常微分方程
- 但这是以多作了一重级数展开为代价的

例13.4

解法2

- 在求解本征函数时，已经用到了全部边界条件，包括在转换到球坐标系时出现的周期条件和有界条件． 这就保证了解$u(r,\theta,\phi)$也满足这些边界条件
- 这种解法的优点是除了要找到合适的本征函数外，无需再解常微分方程
- 但这是以多作了一重级数展开为代价的

例13.4

解法2

- 最后的结果正相当于将$R_{lm}(r)$也按球Bessel函数$\mathrm{j}_l(k_{nl}r)$展开
- 这种解法，也可以方便地推广到其他几何形状的三维区域，或二维平面上的一定区域
- 这种解法的局限性：只适用于不含时间的稳定问题，并且还要求相应的本征值问题有解，甚至还要求0不是本征值

例13.4

解法2

- 最后的结果正相当于将$R_{lm}(r)$也按球Bessel函数$\mathrm{j}_l(k_{nl}r)$展开
- 这种解法，也可以方便地推广到其他几何形状的三维区域，或二维平面上的一定区域
- 这种解法的局限性：只适用于不含时间的稳定问题，并且还要求相应的本征值问题有解，甚至还要求0不是本征值

例13.4

解法2

- 最后的结果正相当于将$R_{lm}(r)$也按球Bessel函数$\mathrm{j}_l(k_{nl}r)$展开
- 这种解法，也可以方便地推广到其他几何形状的三维区域，或二维平面上的一定区域
- 这种解法的局限性：只适用于不含时间的稳定问题，并且还要求相应的本征值问题有解，甚至还要求0不是本征值