第 十 讲
柱 函 数 (二)

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. 柱函数
   - 柱函数的定义
   - Hankel函数
2. Bessel函数的应用
   - Bessel方程的本征值问题
   - 圆柱体的冷却
   - 圆环的平面径向振动

讲授要点

1. 柱函数
   - 柱函数的定义
   - Hankel函数
2. Bessel函数的应用
   - Bessel方程的本征值问题
   - 圆柱体的冷却
   - 圆环的平面径向振动

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§17.5
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§11.2
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§13.2

讲授要点

1. 柱函数
   - 柱函数的定义
   - Hankel函数
2. Bessel函数的应用
   - Bessel方程的本征值问题
   - 圆柱体的冷却
   - 圆环的平面径向振动

定义

满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}C_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}C_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}C_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}C_{\nu+1}(z)$$

的函数$\{C_{\nu}(z)\}$统称为柱函数

- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第一类柱函数
- $\mathrm{N}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第二类柱函数
- 可以证明：柱函数一定是Bessel方程的解
- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$和$\mathrm{N}_{\nu}(z)$的线性组合，

定义

满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}C_{\nu}(z)\right]=z^{\nu}C_{\nu-1}(z)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}C_{\nu}(z)\right]=-z^{-\nu}C_{\nu+1}(z)$$

的函数$\{C_{\nu}(z)\}$统称为柱函数

- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第一类柱函数
- $\mathrm{N}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第二类柱函数
- 可以证明：柱函数一定是Bessel方程的解
- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$和$\mathrm{N}_{\nu}(z)$的线性组合，是否还是柱函数？

定义

满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}C_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}C_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}C_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}C_{\nu+1}(z)$$

的函数$\{C_{\nu}(z)\}$统称为柱函数

- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第一类柱函数
- $\mathrm{N}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第二类柱函数
- 可以证明：柱函数一定是Bessel方程的解
- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$和$\mathrm{N}_{\nu}(z)$的线性组合，是否还是柱函数?

定义

满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}C_{\nu}(z)\right]=z^{\nu}C_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}C_{\nu}(z)\right]=-z^{-\nu}C_{\nu+1}(z)$$

的函数$\{C_{\nu}(z)\}$统称为柱函数

- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第一类柱函数
- $\mathrm{N}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第二类柱函数
- 可以证明：柱函数一定是Bessel方程的解
- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$和$\mathrm{N}_{\nu}(z)$的线性组合，是否还是柱函数?

定义

满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}C_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}C_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}C_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu}C_{\nu+1}(z)$$

的函数$\{C_{\nu}(z)\}$统称为柱函数

- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第一类柱函数
- $\mathrm{N}_{\nu}(z)$是柱函数，称为第二类柱函数
- 可以证明：柱函数一定是Bessel方程的解
- $\mathrm{J}_{\nu}(z)$和$\mathrm{N}_{\nu}(z)$的线性组合，是否还是柱函数?

讲授要点

1. 柱函数
   - 柱函数的定义
   - Hankel函数
2. Bessel函数的应用
   - Bessel方程的本征值问题
   - 圆柱体的冷却
   - 圆环的平面径向振动

背景

前面介绍的$\mathrm{J}_\nu(z)$和$\mathrm{N}_\nu(z)$都可以用来描写柱面波，它们的渐近展开分别是

$$\mathrm{J}_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\mathrm{N}_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

它们描写的柱面波中，既有发散波，又有会聚波

如果处理的问题中，只涉及发散波或会聚波，或要求明确区分发散波或会聚波，这两个函数就不方便了

背景

前面介绍的$\mathrm{J}_\nu(z)$和$\mathrm{N}_\nu(z)$都可以用来描写柱面波，它们的渐近展开分别是

$$\mathrm{J}_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\mathrm{N}_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

它们描写的柱面波中，既有发散波，又有会聚波

如果处理的问题中，只涉及发散波或会聚波，或要求明确区分发散波或会聚波，这两个函数就不方便了

定义

这时显然应当作线性组合

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}_\nu^{(1)}(z) \equiv& \mathsf{J}_\nu(z) + \mathrm{i}\mathsf{N}_\nu(z) \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[\mathrm{i}\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
\mathsf{H}_\nu^{(2)}(z) \equiv& \mathsf{J}_\nu(z) - \mathrm{i}\mathsf{N}_\nu(z) \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

如果配合上相应的时间因子$e^{-i\omega t}$，则$\mathsf{H}_\nu^{(1)}(z)$代表发散波，$\mathsf{H}_\nu^{(2)}(z)$代表会聚波

定义

这时显然应当作线性组合

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z) \equiv& \mathrm{J}_\nu(z) + \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z) \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[\mathrm{i}\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z) \equiv& \mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(z) \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

如果配合上相应的时间因子$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$代表发散波，$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$代表会聚波

- $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$称为第一种Hankel函数
- $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$称为第二种Hankel函数
- $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$和$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$都是Bessel方程的解，都是柱函数
- 故亦称为第三类柱函数

- $\mathsf{H}_\nu^{(1)}(z)$称为第一种Hankel函数
- $\mathsf{H}_\nu^{(2)}(z)$称为第二种Hankel函数
- $\mathsf{H}_\nu^{(1)}(z)$和$\mathsf{H}_\nu^{(2)}(z)$都是Bessel方程的解，都是柱函数
- 故亦称为第三类柱函数

- $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$称为第一种Hankel函数
- $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$称为第二种Hankel函数
- $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$和$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$都是Bessel方程的解，都是柱函数
- 故亦称为第三类柱函数

- $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$称为第一种Hankel函数
- $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$称为第二种Hankel函数
- $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$和$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$都是Bessel方程的解，都是柱函数
- 故亦称为第三类柱函数

讲授要点

1. 柱函数
   - 柱函数的定义
   - Hankel函数
2. Bessel函数的应用
   - Bessel方程的本征值问题
   - 圆柱体的冷却
   - 圆环的平面径向振动

例10.1

从具体问题入手，讨论Bessel方程的本征值问题

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

评述

- 这个问题不同于过去讨论过的偏微分方程定解问题：现在并没有给出初始条件， 所要求的也不是描写圆形薄膜振动的位移如何随时间和空间而变化
- 现在要求的是固有频率——给定偏微分方程和边界条件下的所有各种振动模式的角频率
- 正是因为现在的问题中并没有给出初始条件，所以也不能得出位移转动不变的结论

例10.1

从具体问题入手，讨论Bessel方程的本征值问题

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

评述

- 这个问题不同于过去讨论过的偏微分方程定解问题：现在并没有给出初始条件，所要求的也不是描写圆形薄膜振动的位移如何随时间和空间而变化
- 现在要求的是固有频率———给定偏微分方程和边界条件下的所有各种振动模式的角频率
- 正是因为现在的问题中并没有给出初始条件，所以也不能得出位移转动不变的结论

例10.1

从具体问题入手，讨论Bessel方程的本征值问题

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

评述

- 这个问题不同于过去讨论过的偏微分方程定解问题：现在并没有给出初始条件， 所要求的也不是描写圆形薄膜振动的位移如何随时间和空间而变化
- 现在要求的是固有频率— — —给定偏微分方程和边界条件下的所有各种振动模式的角频率
- 正是因为现在的问题中并没有给出初始条件，所以也不能得出位移转动不变的结论

例10.1

从具体问题入手，讨论Bessel方程的本征值问题

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

评述

- 这个问题不同于过去讨论过的偏微分方程定解问题：现在并没有给出初始条件， 所要求的也不是描写圆形薄膜振动的位移如何随时间和空间而变化
- 现在要求的是固有频率— — —给定偏微分方程和边界条件下的所有各种振动模式的角频率
- 正是因为现在的问题中并没有给出初始条件，所以也不能得出位移转动不变的结论

例10.1

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

取平面极坐标系，坐标原点放置在圆形薄膜的中心，则偏微分方程和边界条件就是

例10.1

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right] = 0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a} = 0$$

$$u\Big|_{\phi=0} = u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

例10.1

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right] = 0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a} = 0$$

$$u\Big|_{\phi=0} = u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

现在要求的就是在上述边界条件的限制下，到底许可哪些ω值，使得方程有非零解

$$u(r,\phi,t) = v(r,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

例10.1

求四周固定的圆形薄膜的固有频率

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right] = 0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a} = 0$$

$$u\Big|_{\phi=0} = u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

将$u(r,\phi,t) = v(r,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$代入上述方程及边界条件，即得到$v(r,\phi)$满足的本征值问题

例10.1

本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}+k^2 v=0$$

$$v\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad v\Big|_{r=a}=0$$

$$v\Big|_{\phi=0}=v\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial v}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial v}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

其中$k=\omega/c$，待定

再令$v(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$，分离变量，就得到两个常微分方程本征值问题

例10.1

本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}+k^2 v=0$$

$$v\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad v\Big|_{r=a}=0$$

$$v\Big|_{\phi=0}=v\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial v}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial v}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

其中$k=\omega/c$，待定

再令$v(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$，分离变量，就得到两个常微分方程本征值问题

例10.1

$$\Phi''(\phi)+\mu\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$\Downarrow$

$$\mu=m^2 \qquad m=0,1,2,\cdots$$
$$\Phi_m(\phi)=\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{\mu}{r^2}\right)R(r)=0$$
$R(0)$有界 $\qquad R(a)=0$

$\Downarrow$

本 征 值?
本征函数?

例10.1

$$\Phi''(\phi)+\mu\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu=m^2$$
$$m=0,1,2,\cdots$$
$$\Phi_m(\phi)=\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{\mu}{r^2}\right)R(r)=0$$
$R(0)$有界 $\qquad R(a)=0$

$$\Downarrow$$

本 征 值?
本征函数?

例10.1

求解本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界} \qquad R(a)=0$$

Answer

若$k=0$，方程的通解为

$$R(r)=\begin{cases}A+B\ln r & m=0\\ Ar^m+Br^{-m} & m\neq 0\end{cases}$$

$R(0)$有界　$R(a)=0$　$\Longrightarrow$　只有零解

例10.1

求解本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$R(0)$有界 $\qquad R(a)=0$

Answer

若$k=0$，方程的通解为

$$R(r)=\begin{cases}A+B\ln r & m=0\\ Ar^m+Br^{-m} & m\neq 0\end{cases}$$

$R(0)$有界 $\quad R(a)=0 \quad\Longrightarrow\quad$ 只有零解

例10.1

求解本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$R(0)$有界 $\qquad R(a)=0$

Answer

若$k\neq 0$，方程的通解为

$$R(r)=C\mathrm{J}_m(kr)+D\mathrm{N}_m(kr)$$

$$R(0)\text{有界}\quad\Longrightarrow\quad D=0$$

$$R(a)=0\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{J}_m(ka)=0$$

例10.1

求解本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$R(0)$有界 $\qquad R(a)=0$

Answer

若$k\neq 0$，方程的通解为

$$R(r)=C\mathrm{J}_m(kr)+D\mathrm{N}_m(kr)$$

$$R(0)\text{有界}\quad\Longrightarrow\quad D=0$$

$$R(a)=0\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{J}_m(ka)=0$$

例10.1

求解本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$R(0)$有界 $\qquad R(a)=0$

Answer

若$k\neq 0$，方程的通解为

$$R(r)=C\mathrm{J}_m(kr)+D\mathrm{N}_m(kr)$$

$$R(0)\text{有界} \quad\Longrightarrow\quad D=0$$

$$R(a)=0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{J}_m(ka)=0$$

例10.1

求解本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界}\qquad R(a)=0$$

Answer

因此

本征值 $\quad k_{mi}^2=\left(\frac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2 \qquad i=1,2,3,\cdots$

本征函数 $\quad R_{mi}(r)=\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$

例10.1

求解本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$R(0)$有界 $\qquad R(a)=0$

Answer

由此即求得圆形薄膜的固有振动的角频率

$$\omega_{mi}=\frac{\mu_i^{(m)}}{a}c,\quad m=0,1,2,\cdots,\ i=1,2,3,\cdots$$

其中$\mu_i^{(m)}$是m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的第i个正零点

Open Questions

1. 为什么只取“m阶Bessel函数$J_m(x)$的正零点”？
2. m阶Bessel函数$J_m(x)$的零点都是实数吗?

Answers

Open Questions

1. 为什么只取"m阶Bessel函数$J_m(x)$的正零点"？
2. m阶Bessel函数$J_m(x)$的零点都是实数吗?

Answers

Open Questions

1. 为什么只取“m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的正零点”？
2. m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的零点都是实数吗?

Answers

- 当$\nu > -1$或为整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$有无穷多个零点
- 它们全部都是实数
- 对称地分布在实轴上

For more details see Appendix

Open Questions

1. 为什么只取"m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的正零点"？
2. m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的零点都是实数吗?

Answers

1. 当$\nu > -1$或为整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$有无穷多个零点
2. 它们全部都是实数
3. 对称地分布在实轴上

For more details see Appendix Details

Open Questions

1. 为什么只取“m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的正零点”？
2. m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的零点都是实数吗?

Answers

1. 当$\nu > -1$或为整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$有无穷多个零点
2. 它们全部都是实数
3. 对称地分布在实轴上

For more details see Appendix Details

Open Questions

1. 为什么只取“m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的正零点”？
2. m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的零点都是实数吗?

Answers

1. 当$\nu > -1$或为整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$有无穷多个零点
2. 它们全部都是实数
3. 对称地分布在实轴上

For more details see Appendix ▸ Details

Open Questions

1. 为什么只取“m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的正零点”？
2. m阶Bessel函数$\mathrm{J}_m(x)$的零点都是实数吗?

Answers

1. 当$\nu > -1$或为整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$有无穷多个零点
2. 它们全部都是实数
3. 对称地分布在实轴上

For more details see Appendix Details

由微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

两端同乘以rR^*，并积分

$$\int_0^a R^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right]\mathrm{d}r+k^2\int_0^a RR^*r\mathrm{d}r-m^2\int_0^a RR^*\frac{\mathrm{d}r}{r}=0$$

分部积分，即证得

$$k^2\int_0^a RR^*r\mathrm{d}r=m^2\int_0^a RR^*\frac{\mathrm{d}r}{r}+\int_0^a\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}R^*}{\mathrm{d}r}r\mathrm{d}r>0$$

由微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

两端同乘以rR^*，并积分

$$\int_0^a R^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right]\mathrm{d}r+k^2\int_0^a RR^* r\mathrm{d}r-m^2\int_0^a RR^*\frac{\mathrm{d}r}{r}=0$$

分部积分，即证得

$$k^2\int_0^a RR^* r\mathrm{d}r=m^2\int_0^a RR^*\frac{\mathrm{d}r}{r}+\int_0^a\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}R^*}{\mathrm{d}r}r\mathrm{d}r>0$$

由微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

两端同乘以rR^*，并积分

$$\int_0^a R^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right]\mathrm{d}r+k^2\int_0^a RR^*r\mathrm{d}r-m^2\int_0^a RR^*\frac{\mathrm{d}r}{r}=0$$

分部积分，即证得

$$k^2\int_0^a RR^*r\mathrm{d}r=m^2\int_0^a RR^*\frac{\mathrm{d}r}{r}+\int_0^a\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}R^*}{\mathrm{d}r}r\mathrm{d}r>0$$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

设有本征函数$\mathsf{J}_m(k_{mi}r)$，它满足

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}\mathsf{J}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k_{mi}^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathsf{J}_m(k_{mi}r)=0$$

$$\mathsf{J}_m(0)\text{有界}\qquad \mathsf{J}_m(k_{mi}a)=0$$

另有函数$\mathsf{J}_m(kr)$，它满足

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}\mathsf{J}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathsf{J}_m(kr)=0$$

$$\mathsf{J}_m(0)\text{有界}$$

再分别用$r\mathsf{J}_m(kr)$和$r\mathsf{J}_m(k_{mi}r)$乘二方程，得

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

设有本征函数$\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$，它满足

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k_{mi}^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(k_{mi}r)=0$$

$\mathrm{J}_m(0)$有界 $\qquad \mathrm{J}_m(k_{mi}a)=0$

另有函数$\mathrm{J}_m(kr)$，它满足

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(kr)=0$$

$\mathrm{J}_m(0)$有界

再分别用$r\mathrm{J}_m(kr)$和$r\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$乘二方程，得

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

设有本征函数$\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$，它满足

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k_{mi}^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(k_{mi}r)=0$$

$$\mathrm{J}_m(0)\text{有界}\qquad \mathrm{J}_m(k_{mi}a)=0$$

另有函数$\mathrm{J}_m(kr)$，它满足

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(kr)=0$$

$$\mathrm{J}_m(0)\text{有界}$$

再分别用$r\mathrm{J}_m(kr)$和$r\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$乘二方程，得

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$\mathrm{J}_m(kr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k_{mi}^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)=0$$

$$\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)=0$$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$\mathrm{J}_m(kr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k_{mi}^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)=0$$

$$\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)=0$$

相减，并积分

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$\left(k_{mi}^2 - k^2\right)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r$$
$$= r\left[\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\frac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r} - \mathrm{J}_m(kr)\frac{\mathrm{dJ}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a}$$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$\left(k_{mi}^2-k^2\right)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r = r\left[\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\frac{\mathrm{dJ}_m(kr)}{\mathrm{d}r}-\mathrm{J}_m(kr)\frac{\mathrm{dJ}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a}$$

再代入边界条件

$$\mathrm{J}_m(0)\text{有界}\qquad \mathrm{J}_m(k_{mi}a)=0$$

并注意

$$\frac{\mathrm{dJ}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}=k_{mi}\mathrm{J}_m'(k_{mi}r)$$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$(k_{mi}^2 - k^2)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r = -k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}_m'(k_{mi}a)$$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$\left(k_{mi}^2-k^2\right)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r=-k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}_m'(k_{mi}a)$$

现在对两种特殊情形感兴趣

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$(k_{mi}^2 - k^2)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r = -k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}_m'(k_{mi}a)$$

情形1：$k = k_{mj}$且$i \neq j$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$(k_{mi}^2 - k^2)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r = -k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}'_m(k_{mi}a)$$

情形1：$k = k_{mj}$且$i \neq j$

$$\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(k_{mj}r)r\mathrm{d}r = 0 \qquad k_{mi} \neq k_{mj}$$

对应于不同本征值的本征函数在区间$[0, a]$上以权重r正交

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$(k_{mi}^2 - k^2)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r = -k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}'_m(k_{mi}a)$$

情形1：$k = k_{mj}$且$i \neq j$

$$\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(k_{mj}r)r\mathrm{d}r = 0 \qquad k_{mi} \neq k_{mj}$$

对应于不同本征值的本征函数在区间$[0, a]$上以权重r正交

情形2：$k = k_{mi}$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$(k_{mi}^2 - k^2)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r = -k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}_m'(k_{mi}a)$$

情形1：$k = k_{mj}$且$i \neq j$

$$\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(k_{mj}r)r\mathrm{d}r = 0 \qquad k_{mi} \neq k_{mj}$$

对应于不同本征值的本征函数在区间$[0, a]$上以权重r正交

情形2：$k = k_{mi}$

$$\int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_{mi}r)r\mathrm{d}r = -\lim_{k\to k_{mi}} \frac{k_{mi}a}{k_{mi}^2 - k^2}\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}_m'(k_{mi}a)$$

进一步的讨论：本征函数的正交归一关系

$$(k_{mi}^2 - k^2)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r = -k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}'_m(k_{mi}a)$$

情形1：$k = k_{mj}$且$i \neq j$

$$\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(k_{mj}r)r\mathrm{d}r = 0 \qquad k_{mi} \neq k_{mj}$$

对应于不同本征值的本征函数在区间$[0, a]$上以权重r正交

情形2：$k = k_{mi}$

$$\int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_{mi}r)r\mathrm{d}r = -\lim_{k\to k_{mi}} \frac{k_{mi}a}{k_{mi}^2 - k^2}\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}'_m(k_{mi}a)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\mathrm{J}'_m(k_{mi}a)\right]^2$$

这正是本征函数$\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$的模方

评述

- 以上结果与边界条件有关
- 对于第二类或第三类边界条件，需另行计算
- 三类边界条件可统一写成$\alpha R'(a)+\beta R(a)=0$

$\beta=0$	第一类边界条件
$\alpha=0$	第二类边界条件
$\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$	第三类边界条件

评述

- 以上结果与边界条件有关
- 对于第二类或第三类边界条件，需另行计算
- 三类边界条件可统一写成$\alpha R'(a)+\beta R(a)=0$

$\beta=0$	第一类边界条件
$\alpha=0$	第二类边界条件
$\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$	第三类边界条件

评述

- 以上结果与边界条件有关
- 对于第二类或第三类边界条件，需另行计算
- 三类边界条件可统一写成$\alpha R'(a)+\beta R(a)=0$

$\beta=0$	第一类边界条件
$\alpha=0$	第二类边界条件
$\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$	第三类边界条件

Bessel函数的完备性 （不证）

如果函数$f(r)$在区间$[0, a]$上连续，且只有有限个极大和极小，则可按本征函数$\mathrm{J}_m(k_i r)$展开 $f(r)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathrm{J}_m(k_i r)$， 其中$\mathrm{J}_m(k_i r)$是本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界} \qquad \alpha R'(a)+\beta R(a)=0$$

的解，展开系数为 $b_i=\dfrac{\displaystyle\int_0^a f(r)\mathrm{J}_m(k_i r)r\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_i r)r\mathrm{d}r}$

这样得到的级数在区间$[\delta, a-\delta]\,(\delta>0)$上一致收敛

证明见参考书目《特殊函数概论》，第17.33节

该书中也还有更普遍的展开定理

Bessel函数的完备性 （不证）

如果函数$f(r)$在区间$[0, a]$上连续，且只有有限个极大和极小，则可按本征函数$\mathrm{J}_m(k_i r)$展开 $f(r)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i \mathrm{J}_m(k_i r)$， 其中$\mathrm{J}_m(k_i r)$是本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界} \qquad \alpha R'(a)+\beta R(a)=0$$

的解，展开系数为 $b_i=\dfrac{\displaystyle\int_0^a f(r)\mathrm{J}_m(k_i r)r\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_i r)r\mathrm{d}r}$

这样得到的级数在区间$[\delta, a-\delta]\ (\delta>0)$上一致收敛

证明见参考书目《特殊函数概论》，第17.33节

该书中也还有更普遍的展开定理

Bessel函数的完备性 （不证）

如果函数$f(r)$在区间$[0, a]$上连续，且只有有限个极大和极小，则可按本征函数$\mathrm{J}_m(k_i r)$展开 $f(r)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathrm{J}_m(k_i r)$， 其中$\mathrm{J}_m(k_i r)$是本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界} \qquad \alpha R'(a)+\beta R(a)=0$$

的解，展开系数为 $b_i=\dfrac{\displaystyle\int_0^a f(r)\mathrm{J}_m(k_i r)r\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_i r)r\mathrm{d}r}$

这样得到的级数在区间$[\delta, a-\delta]\,(\delta>0)$上一致收敛

证明见参考书目《特殊函数概论》，第17.33节

该书中也还有更普遍的展开定理

例10.2

将定义在$[0,1]$上的函数$1-x^2$按$\mathrm{J}_0(\mu_i x)$展开，其中μ_i是$\mathrm{J}_0(x)$的正零点

Answer

$$1-x^2=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

$$c_i=\frac{2}{\mathrm{J}_1^2(\mu_i)}\int_0^1(1-x^2)\mathrm{J}_0(\mu_i x)x\mathrm{d}x$$

根据例9.2的计算结果，有$c_i=8/\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)$

$$1-x^2=8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

例10.2

将定义在$[0,1]$上的函数$1-x^2$按$\mathrm{J}_0(\mu_i x)$展开，其中μ_i是$\mathrm{J}_0(x)$的正零点

Answer

$$1-x^2=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

$$c_i=\frac{2}{\mathrm{J}_1^2(\mu_i)}\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{J}_0(\mu_i x)x\mathrm{d}x$$

根据例9.2的计算结果，有$c_i=8/\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)$

$$1-x^2=8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

例10.2

将定义在$[0,1]$上的函数$1-x^2$按$\mathrm{J}_0(\mu_i x)$展开，其中μ_i是$\mathrm{J}_0(x)$的正零点

Answer

$$1-x^2=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

$$c_i=\frac{2}{\mathrm{J}_1^2(\mu_i)}\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{J}_0(\mu_i x)x\mathrm{d}x$$

根据例9.2的计算结果，有$c_i=8/\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)$

$$1-x^2=8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

例10.2

将定义在$[0,1]$上的函数$1-x^2$按$\mathrm{J}_0(\mu_i x)$展开，其中μ_i是$\mathrm{J}_0(x)$的正零点

Answer

$$1-x^2=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

$$c_i=\frac{2}{\mathrm{J}_1^2(\mu_i)}\int_0^1(1-x^2)\mathrm{J}_0(\mu_i x)x\mathrm{d}x$$

根据例9.2的计算结果，有$c_i=8/\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)$

$$1-x^2=8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

将

$$1-x^2=8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

两端微商，得

$$x=4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2}\frac{\mathrm{J}_1(\mu_i x)}{\mathrm{J}_1(\mu_i)}$$

令$x=1$，就有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2}=\frac{1}{4}$$

将

$$1-x^2=8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^3\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x)$$

两端微商，得

$$x=4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2}\frac{\mathrm{J}_1(\mu_i x)}{\mathrm{J}_1(\mu_i)}$$

令$x=1$，就有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2}=\frac{1}{4}$$

讲授要点

1. 柱函数
   - 柱函数的定义
   - Hankel函数
2. Bessel函数的应用
   - Bessel方程的本征值问题
   - 圆柱体的冷却
   - 圆环的平面径向振动

例10.3

设有一个无穷长的圆柱体，半径为a．很自然地应该选用柱坐标系，z轴即为圆柱体的轴． 如果柱体的表面温度维持为0，初温为$u_0 f(r)$，试求柱体内温度的分布和变化

Answer

温度u与ϕ, z无关，$u = u(r,t)$，满足定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a} = 0$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0 f(r)$$

例10.3

设有一个无穷长的圆柱体，半径为a．很自然地应该选用柱坐标系，z轴即为圆柱体的轴． 如果柱体的表面温度维持为0，初温为$u_0f(r)$，试求柱体内温度的分布和变化

Answer

温度u与ϕ, z无关，$u=u(r,t)$，满足定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a}=0$$

$$u\Big|_{t=0}=u_0f(r)$$

例10.3

设有一个无穷长的圆柱体，半径为a. 很自然地应该选用柱坐标系，z轴即为圆柱体的轴. 如果柱体的表面温度维持为0，初温为$u_0 f(r)$，试求柱体内温度的分布和变化

Answer

根据例10.1的一般讨论，容易写出此定解问题的一般解

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right) \exp\left[-\kappa\left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$$

其中μ_i是$\mathrm{J}_0(x)$的第i个正零点

例10.3

设有一个无穷长的圆柱体，半径为a. 很自然地应该选用柱坐标系，z轴即为圆柱体的轴. 如果柱体的表面温度维持为0，初温为$u_0f(r)$，试求柱体内温度的分布和变化

Answer

代入初条件

$$u(r,t)\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right) = u_0 f(r)$$

所以 $c_i = \dfrac{2u_0}{a^2\mathrm{J}_1^2(\mu_i)}\displaystyle\int_0^a f(r)\mathrm{J}_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right)r\mathrm{d}r$

例10.3

设有一个无穷长的圆柱体，半径为a．很自然地应该选用柱坐标系，z轴即为圆柱体的轴． 如果柱体的表面温度维持为0，初温为$u_0 f(r)$，试求柱体内温度的分布和变化

Answer

代入初条件

$$u(r,t)\big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\mathrm{J}_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right)=u_0f(r)$$

所以 $c_i=\dfrac{2u_0}{a^2\mathrm{J}_1^2(\mu_i)}\displaystyle\int_0^a f(r)\mathrm{J}_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right)r\mathrm{d}r$

例10.3

设有一个无穷长的圆柱体，半径为a．很自然地应该选用柱坐标系，z轴即为圆柱体的轴． 如果柱体的表面温度维持为0，初温为$u_0 f(r)$，试求柱体内温度的分布和变化

Answer

- 知道了$f(r)$的具体形式，就能算出c_i
- 例如，$f(r) = 1 - (r/a)^2$

$$c_i = \frac{2u_0}{a^2 \mathrm{J}_1^2(\mu_i)} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right) r\mathrm{d}r$$
$$= \frac{8u_0}{\mu_i^3 \mathrm{J}_1(\mu_i)}$$

例10.3

设有一个无穷长的圆柱体，半径为a．很自然地应该选用柱坐标系，z轴即为圆柱体的轴．如果柱体的表面温度维持为0，初温为$u_0 f(r)$，试求柱体内温度的分布和变化

Answer

- 知道了$f(r)$的具体形式，就能算出c_i
- 例如，$f(r) = 1 - (r/a)^2$

$$c_i = \frac{2u_0}{a^2 \mathrm{J}_1^2(\mu_i)} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right) r\mathrm{d}r$$
$$= \frac{8u_0}{\mu_i^3 \mathrm{J}_1(\mu_i)}$$

讲授要点

1. 柱函数
   - 柱函数的定义
   - Hankel函数
2. Bessel函数的应用
   - Bessel方程的本征值问题
   - 圆柱体的冷却
   - 圆环的平面径向振动

例10.4

设圆环的内外半径分别为a和b. 若内边界(内圆)固定，外边界(外圆)自由，求圆环作平面径向振动的固有频率

Answer

例10.4

设圆环的内外半径分别为a和b．若内边界(内圆)固定，外边界(外圆)自由，求圆环作平面径向振动的固有频率

Answer

显然应该选用平面极坐标系．则位移(矢量)$\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_r$满足的(矢量)波动方程为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\boldsymbol{u} = 0$$

例10.4

设圆环的内外半径分别为a和b．若内边界(内圆)固定，外边界(外圆)自由，求圆环作平面径向振动的固有频率

Answer

因为

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} \equiv \nabla^2(u\boldsymbol{e}_r) = \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

例10.4

设圆环的内外半径分别为a和b．若内边界(内圆)固定，外边界(外圆)自由，求圆环作平面径向振动的固有频率

Answer

所以(矢量)波动方程等价于偏微分方程组

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left[\nabla^2 u - \frac{u}{r^2}\right] = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

例10.4

设圆环的内外半径分别为a和b．若内边界(内圆)固定，外边界(外圆)自由，求圆环作平面径向振动的固有频率

Answer

由此可见，径向位移与ϕ无关，$u=u(r,t)$满足微分方程和边界条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{u}{r^2}\right]=0$$

$$u\Big|_{r=a}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b}=0$$

例10.4

设圆环的内外半径分别为a和b．若内边界(内圆)固定，外边界(外圆)自由，求圆环作平面径向振动的固有频率

Answer

令$u(r,t)=R(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $k=\omega/c$，便得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

例10.4

设圆环的内外半径分别为a和b．若内边界(内圆)固定，外边界(外圆)自由，求圆环作平面径向振动的固有频率

Answer

令$u(r,t)=R(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $k=\omega/c$，便得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

例10.4

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

Answer

- 请同学补足证明：$k=0$无解
- $k\neq 0$，常微分方程的通解为

$$R(r)=C\mathrm{J}_1(kr)+D\mathrm{N}_1(kr)$$

例10.4

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

Answer

- 请同学补足证明：$k=0$无解
- $k\neq 0$，常微分方程的通解为

$$R(r)=C\mathrm{J}_1(kr)+D\mathrm{N}_1(kr)$$

例10.4

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

Answer

- 请同学补足证明：$k=0$无解
- $k\neq 0$，常微分方程的通解为

$$R(r)=C\mathrm{J}_1(kr)+D\mathrm{N}_1(kr)$$

例10.4

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

Answer

$$R(a)=0 \Longrightarrow C\mathrm{J}_1(ka)+D\mathrm{N}_1(ka)=0$$

$$R'(b)=0 \Longrightarrow C\mathrm{J}_1'(kb)+D\mathrm{N}_1'(kb)=0$$

这可以看成是关于C和D的线性代数方程组，有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \mathrm{J}_1(ka) & \mathrm{N}_1(ka) \\ \mathrm{J}_1'(kb) & \mathrm{N}_1'(kb) \end{vmatrix}=0$$

例10.4

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

Answer

$$R(a)=0 \Longrightarrow C\mathrm{J}_1(ka)+D\mathrm{N}_1(ka)=0$$

$$R'(b)=0 \Longrightarrow C\mathrm{J}_1'(kb)+D\mathrm{N}_1'(kb)=0$$

这可以看成是关于C和D的线性代数方程组，有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\mathrm{J}_1(ka) & \mathrm{N}_1(ka)\\ \mathrm{J}_1'(kb) & \mathrm{N}_1'(kb)\end{vmatrix}=0$$

例10.4

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

Answer

- 圆环作平面径向振动的固有频率为$\omega_i=k_ic$，其中k_i是 $\mathrm{J}_1(ka)\mathrm{N}_1'(kb)-\mathrm{N}_1(ka)\mathrm{J}_1'(kb)=0$的第$i$个正根(由小到大排列)
- 解得$C=\mathrm{N}_1(k_ia)$, $D=-\mathrm{J}_1(k_ia)$ $\Rightarrow$ 相应的固有振动模式
$$u_i(r,t)=[\mathrm{N}_1(k_ia)\mathrm{J}_1(k_ir)-\mathrm{J}_1(k_ia)\mathrm{N}_1(k_ir)]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ict}$$

例10.4

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(a)=0 \qquad R'(b)=0$$

Answer

- 圆环作平面径向振动的固有频率为$\omega_i=k_i c$，其中k_i是 $\mathrm{J}_1(ka)\mathrm{N}_1'(kb)-\mathrm{N}_1(ka)\mathrm{J}_1'(kb)=0$的第$i$个正根(由小到大排列)
- 解得$C=\mathrm{N}_1(k_i a)$, $D=-\mathrm{J}_1(k_i a)$ $\Rightarrow$ 相应的固有振动模式
  $u_i(r,t)=[\mathrm{N}_1(k_i a)\mathrm{J}_1(k_i r)-\mathrm{J}_1(k_i a)\mathrm{N}_1(k_i r)]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i ct}$

Appendix Outline

3. Appendix
    - Zeros of Bessel functions
    - Zeros of Neumann functions

Zeros of Bessel functions

1. Real zeros

When ν is real, the functions $\mathsf{J}_\nu(z)$ & $\mathsf{N}_\nu(z)$ each have an infinite number of zeros, all of which are simple with the possible exception of $z = 0$. For *non-negative* ν the sth positive zeros of these functions are denoted by $j_{\nu,s}$ and $n_{\nu,s}$ respectively.

Zeros of Bessel functions

1. Real zeros

s	$j_{0,s}$	$j_{1,s}$	$n_{0,s}$	$n_{1,s}$
1	2.40483	3.83171	0.89358	2.19714
2	5.52008	7.01559	3.95768	5.42968
3	8.65373	10.17347	7.06805	8.59601
4	11.79153	13.32369	10.22235	11.74915
5	14.93092	16.47063	13.36110	14.89744
6	18.07106	19.61586	16.50092	18.04340
7	21.21164	22.76008	19.64131	21.18807
8	24.35247	25.90367	22.78203	24.33194
9	27.49348	29.04683	25.92296	27.47529
10	30.63461	32.18968	29.06403	30.61829

Zeros of Bessel functions

2. McMahon's expansions for large zeros

$$
\begin{aligned}
j_{\nu,s}, n_{\nu,s} \sim & \beta - \frac{\mu-1}{8\beta} - \frac{4(\mu-1)(7\mu-31)}{3(8\beta)^3} \\
& - \frac{32(\mu-1)(83\mu^2-982\mu+3779)}{15(8\beta)^5} \\
& - \frac{64(\mu-1)(6949\mu^3-153855\mu^2+1585743\mu-6277237)}{105(8\beta)^7} \\
& - \cdots\cdots, \qquad s \gg \nu,\ \mu = 4\nu^2,
\end{aligned}
$$

$$
\beta = \begin{cases} \left(s+\dfrac{\nu}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\pi, & \text{for } j_{\nu,s} \\ \left(s+\dfrac{\nu}{2}-\dfrac{3}{4}\right)\pi, & \text{for } n_{\nu,s} \end{cases}
$$

Zeros of the Bessel functions

3. Complex zeros of $\mathsf{J}_\nu(z)$

When $\nu \geq -1$ the zeros of $\mathsf{J}_\nu(z)$ are all real. If $\nu < -1$ and ν is not an integer the number of complex zeros of $\mathsf{J}_\nu(z)$ is twice the integer part of $(-\nu)$; if the integer part of $(-\nu)$ is odd two of these zeros lie on the imaginary axis.

Return

Zeros of Neumann functions

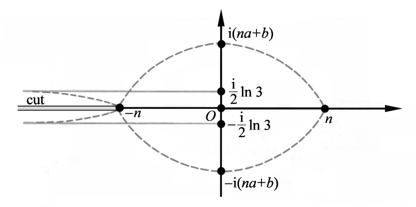
1. Zeros of Neumann functions $\mathsf{N}_\nu(z)$

When ν is real the pattern of the complex zeros of $\mathsf{N}_\nu(z)$ depends on the non-integer part of ν. Attention is confined here to the case $\nu = n$, a positive integer or zero.

Zeros of the Neumann functions

2. Zeros of Neumann functions $\mathsf{N}_n(z)$

The figure shows the approximate distribution of the complex zeros of $\mathsf{N}_n(z)$ in the region $|\arg z| \leq \pi$. The figure is symmetrical about the real axis. The two curves on the left extend to infinity, having the asymptotes



Zeros of $\mathsf{N}_n(z)$

$$\mathrm{Im}\, z = \pm\frac{1}{2}\ln 3 = \pm 0.54931\ldots\ldots$$

There are an infinite number of zeros near each of these curves.

Zeros of Neumann functions

2. Zeros of Neumann functions $\mathsf{N}_n(z)$ (cont.)

The two curves extending from $z = -n$ to $z = n$ and bounding an eye-shaped domain intersect the imaginary axis at the points $\pm\mathrm{i}(na + b)$, where

$$a = \sqrt{t_0^2 - 1} = 0.66274\ldots\ldots$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{1 - t_0^{-2}}\,\ln 2 = 0.19146\ldots\ldots$$

and $t_0 = 1.19968\ldots\ldots$ is the positive root of $\coth t = t$. There are n zeros near each of these curves.

Zeros of Neumann functions

Complex zeros of $\mathsf{N}_0(z)$	
Real part	Imaginary part
-2.40302	0.53988
-5.51988	0.54718
-8.65367	0.54841

Complex zeros of $\mathsf{N}_1(z)$	
Real part	Imaginary part
-0.50274	0.78624
-3.83353	0.56236
-7.01590	0.55339