第 八 讲
球 函 数 (三)

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. 连带Legendre函数
   - 连带Legendre方程的本征值问题
   - 连带Legendre函数的正交性
2. 球面调和函数
   - 背景
   - 球面调和函数
   - 归一化的球面调和函数

讲授要点

1. 连带Legendre函数
   - 连带Legendre方程的本征值问题
   - 连带Legendre函数的正交性
2. 球面调和函数
   - 背景
   - 球面调和函数
   - 归一化的球面调和函数

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§16.8, 16.9
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§10.2, 12.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§12.4

讲授要点

1. 连带Legendre函数
   - 连带Legendre方程的本征值问题
   - 连带Legendre函数的正交性
2. 球面调和函数
   - 背景
   - 球面调和函数
   - 归一化的球面调和函数

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

- 选定球坐标系，坐标原点位于球心
- 写出定解问题在球坐标系下的具体形式

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

- 选定球坐标系，坐标原点位于球心
- 写出定解问题在球坐标系下的具体形式

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

- 选定球坐标系，坐标原点位于球心
- 写出定解问题在球坐标系下的具体形式

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在坐标原点$r=0$不成立，在该点充其量只存在$u(r,\theta,\phi)$对r的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，还必须补充上$u(r,\theta,\phi)$在坐标原点$r=0$处的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在坐标原点$r=0$不成立，在该点充其量只存在$u(r,\theta,\phi)$对r的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，还必须补充上$u(r,\theta,\phi)$在坐标原点$r=0$处的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在坐标原点$r=0$不成立，在该点充其量只存在$u(r,\theta,\phi)$对r的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，还必须补充上$u(r,\theta,\phi)$在坐标原点$r=0$处的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在$\theta=0$和$\theta=\pi$方向上也不成立，在这两点上充其量只存在$u(r,\theta,\phi)$对θ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，必须补充上$u(r,\theta,\phi)$在$\theta=0$和$\theta=\pi$方向上的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上也不成立，在这两点上充其量只存在$u(r, \theta, \phi)$对θ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，必须补充上$u(r, \theta, \phi)$在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上也不成立， 在这两点上充其量只存在$u(r, \theta, \phi)$对θ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性， 必须补充上$u(r, \theta, \phi)$在$\theta = 0$和$\theta = \pi$方向上的有界条件

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在坐标原点$\phi = 0$也和$\phi = 2\pi$方向上不成立， 在这两点上充其量只存在$u(r, \theta, \phi)$对ϕ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，必须补充上周期条件

$$u\Big|_{\phi=0} = u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

背景

球内区域Laplace方程的边值问题

$$\nabla^2 u = 0$$
$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma)$$

但在写出定解问题在球坐标系下的具体形式时，需要注意

- Laplace方程在坐标原点$\phi = 0$也和$\phi = 2\pi$方向上不成立，在这两点上充其量只存在$u(r, \theta, \phi)$对ϕ的单侧导数
- 把Laplace方程改写到球坐标系时，为了保持定解问题的等价性，必须补充上周期条件

$$u\Big|_{\phi=0} = u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

背景

球坐标系下的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

$u\Big|_{\theta=0}$有界　　$u\Big|_{\theta=\pi}$有界

$u\Big|_{r=0}$有界　　$u\Big|_{r=a}=f(\theta,\phi)$

令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，将上面的方程和齐次边界条件分离变量

背景

球坐标系下的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a}=f(\theta,\phi)$$

令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，将上面的方程和齐次边界条件分离变量

背景

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\lambda R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$S\big|_{\theta=0}$有界 $\qquad S\big|_{\theta=\pi}$有界

$$S\big|_{\phi=0}=S\big|_{\phi=2\pi}\qquad \frac{\partial S}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial S}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=2\pi}$$

背景

再将

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$S\big|_{\theta=0}$有界　　$S\big|_{\theta=\pi}$有界

$$S\big|_{\phi=0}=S\big|_{\phi=2\pi}\qquad \left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

分离变量，$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

背景

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left[\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界 $\Theta(\pi)$有界

和

$$\Phi''+\mu\Phi=0$$

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

背景

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mu = m^2$$
$$\Phi_m(\phi) = \begin{cases} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{cases}$$
$$m = 0, 1, 2, \cdots$$

又出现连带Legendre方程的本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0$$

$\Theta(0)$有界 $\Theta(\pi)$有界

背景

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mu = m^2$$
$$\Phi_m(\phi) = \begin{cases} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{cases}$$
$$m = 0, 1, 2, \cdots$$

又出现连带Legendre方程的本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0$$

$\Theta(0)$有界 $\Theta(\pi)$有界

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left[\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界　$\Theta(\pi)$有界

通常作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，并且把待定参数λ写成$\nu(\nu+1)$，本征值问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm1)$有界

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left[\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界　$\Theta(\pi)$有界

通常作变换$x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$，并且把待定参数λ写成$\nu(\nu+1)$，本征值问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm 1)$有界

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

要求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

$w(\pm 1)$有界

必须先求解连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 方法之一：常微分方程的幂级数解法
- 方法之二：寻找和Legendre方程的关系

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

要求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

$w(\pm 1)$有界

必须先求解连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 方法之一：常微分方程的幂级数解法
- 方法之二：寻找和Legendre方程的关系

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

要求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

$w(\pm 1)$有界

必须先求解连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 方法之一：常微分方程的幂级数解法
- 方法之二：寻找和Legendre方程的关系

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

要求解本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

$w(\pm 1)$有界

必须先求解连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 方法之一：常微分方程的幂级数解法
- 方法之二：寻找和Legendre方程的关系

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 首先分析连带Legendre方程在奇点处的性质
- 连带Legendre方程的奇点和Legendre方程完全一样，都是$z=\pm1$和$z=\infty$，而且也都是正则奇点
- 在$z=\pm1$处的指标方程是

$$\rho(\rho-1)+\rho-\frac{m^2}{4}=0$$

所以，指标为$\rho=\pm m/2$

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 首先分析连带Legendre方程在奇点处的性质
- 连带Legendre方程的奇点和Legendre方程完全一样，都是$z=\pm1$和$z=\infty$，而且也都是正则奇点
- 在$z=\pm1$处的指标方程是

$$\rho(\rho-1)+\rho-\frac{m^2}{4}=0$$

所以，指标为$\rho=\pm m/2$

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 首先分析连带Legendre方程在奇点处的性质
- 连带Legendre方程的奇点和Legendre方程完全一样，都是$z=\pm1$和$z=\infty$，而且也都是正则奇点
- 在$z=\pm1$处的指标方程是

$$\rho(\rho-1)+\rho-\frac{m^2}{4}=0$$

所以，指标为$\rho=\pm m/2$

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 令$w(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}v(z)$
- 则$v(z)$满足超球微分方程

$$\left(1-z^2\right)v''-2(m+1)zv'+[\lambda-m(m+1)]v=0$$

- $v(z)$在$z=\pm1$的指标为0与$-m$．指标为$-m$的解在$z=\pm1$点一定发散
- $m=0$时回到Legendre方程

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 令$w(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}v(z)$
- 则$v(z)$满足超球微分方程

$$\left(1-z^2\right)v''-2(m+1)zv'+[\lambda-m(m+1)]v=0$$

- $v(z)$在$z=\pm1$的指标为0与$-m$．指标为$-m$的解在$z=\pm1$点一定发散
- $m=0$时回到Legendre方程

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 令$w(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}v(z)$
- 则$v(z)$满足超球微分方程

$$\left(1-z^2\right)v''-2(m+1)zv'+[\lambda-m(m+1)]v=0$$

- $v(z)$在$z=\pm 1$的指标为0与$-m$．指标为$-m$的解在$z=\pm 1$点一定发散
- $m=0$时回到Legendre方程

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

连带Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

- 令$w(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}v(z)$
- 则$v(z)$满足超球微分方程

$$\left(1-z^2\right)v''-2(m+1)zv'+[\lambda-m(m+1)]v=0$$

- $v(z)$在$z=\pm1$的指标为0与$-m$． 指标为$-m$的解在$z=\pm1$点一定发散
- $m=0$时回到Legendre方程

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

将Legendre方程微商m次，就得到超球微分方程

$$(1-z^2)\,v''-2(m+1)zv'+[\lambda-m(m+1)]v=0$$

用数学归纳法证明

- $m=0$时显然正确
- 设$m=k$时成立

$$(1-z^2)\left(v^{(k)}\right)''-2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)'+[\lambda-k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)=0$$

- 再微商一次，即可证明$m=k+1$时也成立．因此命题得证 □

Details Omitted

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

将Legendre方程微商m次，就得到超球微分方程

$$\left(1-z^2\right)v''-2(m+1)zv'+[\lambda-m(m+1)]v=0$$

用数学归纳法证明

- $m=0$时显然正确
- 设$m=k$时成立

$$\left(1-z^2\right)\left(v^{(k)}\right)''-2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)'+[\lambda-k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)=0$$

- 再微商一次，即可证明$m=k+1$时也成立．因此命题得证 □

Details Omitted

连带Legendre方程与Legendre方程的关系

将Legendre方程微商m次，就得到超球微分方程

$$\left(1-z^2\right)v''-2(m+1)zv'+[\lambda-m(m+1)]v=0$$

用数学归纳法证明

- $m=0$时显然正确
- 设$m=k$时成立

$$\left(1-z^2\right)\left(v^{(k)}\right)''-2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)'+[\lambda-k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)=0$$

- 再微商一次，即可证明$m=k+1$时也成立．因此命题得证 □

Details Omitted

$m=k$时

$$(1-z^2)\left(v^{(k)}\right)''-2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)'+[\lambda-k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)=0$$

再微商一次

$$\begin{aligned}(1-z^2)\left(v^{(k)}\right)'''-2z\left(v^{(k)}\right)''-2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)''\\-2(k+1)\left(v^{(k)}\right)'+[\lambda-k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)'=0\end{aligned}$$

即可化为

$$\begin{aligned}(1-z^2)\left(v^{(k+1)}\right)''-2(k+2)z\left(v^{(k+1)}\right)'\\+[\lambda-(k+1)(k+2)]v^{(k+1)}=0\end{aligned}$$

$m=k$时

$$\left(1-z^2\right)\left(v^{(k)}\right)''-2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)'+[\lambda-k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)=0$$

再微商一次

$$\begin{aligned}&\left(1-z^2\right)\left(v^{(k)}\right)'''-2z\left(v^{(k)}\right)''-2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)''\\&\qquad-2(k+1)\left(v^{(k)}\right)'+[\lambda-k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)'=0\end{aligned}$$

即可化为

$$\begin{aligned}&\left(1-z^2\right)\left(v^{(k+1)}\right)''-2(k+2)z\left(v^{(k+1)}\right)'\\&\qquad+[\lambda-(k+1)(k+2)]v^{(k+1)}=0\end{aligned}$$

$m=k$时

$$(1-z^2)\left(v^{(k)}\right)'' - 2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)' + [\lambda - k(k+1)]\left(v^{(k)}\right) = 0$$

再微商一次

$$\begin{aligned}(1-z^2)\left(v^{(k)}\right)''' - 2z\left(v^{(k)}\right)'' - 2(k+1)z\left(v^{(k)}\right)''\\ - 2(k+1)\left(v^{(k)}\right)' + [\lambda - k(k+1)]\left(v^{(k)}\right)' = 0\end{aligned}$$

即可化为

$$\begin{aligned}(1-z^2)\left(v^{(k+1)}\right)'' - 2(k+2)z\left(v^{(k+1)}\right)'\\ + [\lambda - (k+1)(k+2)]v^{(k+1)} = 0\end{aligned}$$

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

$w(\pm1)$有界

因此，连带Legendre方程方程的解是

$$w(z)=c_1w_1(z)+c_2w_2(z)$$

$$w_1(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$$

$$w_2(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(z)$$

$w_1(z)$和$w_2(z)$是否满足有界条件?

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]w=0$$

$w(\pm1)$有界

因此，连带Legendre方程方程的解是

$$w(z)=c_1w_1(z)+c_2w_2(z)$$

$$w_1(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$$

$$w_2(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(z)$$

$w_1(z)$和$w_2(z)$是否满足有界条件?

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$w_1(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm 1$的行为

对于一般的ν值，$\mathsf{P}_\nu(z)$为无穷级数

- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=1$点有界，故$w_1(z)$在$z=1$点有界
- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=-1$点对数发散，故$\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$以$z=-1$点为m阶极点
- 所以$w_1(z)$在$z=-1$点发散

$w_2(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{Q}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm 1$的行为

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$w_1(z) = \left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm 1$的行为

对于一般的ν值，$\mathsf{P}_\nu(z)$为无穷级数

- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=1$点有界，故$w_1(z)$在$z=1$点有界
- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=-1$点对数发散，故$\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$以$z=-1$点为m阶极点
- 所以$w_1(z)$在$z=-1$点发散

$w_2(z) = \left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{Q}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm 1$的行为

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$w_1(z) = \left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

对于一般的ν值，$\mathrm{P}_\nu(z)$为无穷级数

- $\mathrm{P}_\nu(z)$在$z=1$点有界，故$w_1(z)$在$z=1$点有界
- $\mathrm{P}_\nu(z)$在$z=-1$点对数发散，故$\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$以$z=-1$点为m阶极点
- 所以$w_1(z)$在$z=-1$点发散

$w_2(z) = \left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$w_1(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

对于一般的ν值，$\mathsf{P}_\nu(z)$为无穷级数

- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=1$点有界，故$w_1(z)$在$z=1$点有界
- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=-1$点对数发散，故$\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$以$z=-1$点为m阶极点
- 所以$w_1(z)$在$z=-1$点发散

$w_2(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{Q}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

- $\mathsf{Q}_\nu(z)$在$z=\pm1$点对数发散，故$\mathsf{Q}_\nu^{(m)}(z)$以$z=\pm1$点为m阶极点
- 所以$w_2(z)$在$z=\pm1$点为发散

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$w_1(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

对于一般的ν值，$\mathsf{P}_\nu(z)$为无穷级数

- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=1$点有界，故$w_1(z)$在$z=1$点有界
- $\mathsf{P}_\nu(z)$在$z=-1$点对数发散，故$\mathsf{P}_\nu^{(m)}(z)$以$z=-1$点为m阶极点
- 所以$w_1(z)$在$z=-1$点发散

$w_2(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathsf{Q}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

- $\mathsf{Q}_\nu(z)$在$z=\pm1$点对数发散，故$\mathsf{Q}_\nu^{(m)}(z)$以$z=\pm1$点为m阶极点
- 所以$w_2(z)$在$z=\pm1$点均发散

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$w_1(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

对于一般的ν值，$\mathrm{P}_\nu(z)$为无穷级数

- $\mathrm{P}_\nu(z)$在$z=1$点有界，故$w_1(z)$在$z=1$点有界
- $\mathrm{P}_\nu(z)$在$z=-1$点对数发散，故$\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$以$z=-1$点为m阶极点
- 所以$w_1(z)$在$z=-1$点发散

$w_2(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

- $\mathrm{Q}_\nu(z)$在$z=\pm1$点对数发散，故$\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(z)$以$z=\pm1$点为m阶极点
- 所以$w_2(z)$在$z=\pm1$点均发散

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$w_1(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

对于一般的ν值，$\mathrm{P}_\nu(z)$为无穷级数

- $\mathrm{P}_\nu(z)$在$z=1$点有界，故$w_1(z)$在$z=1$点有界
- $\mathrm{P}_\nu(z)$在$z=-1$点对数发散，故$\mathrm{P}_\nu^{(m)}(z)$以$z=-1$点为m阶极点
- 所以$w_1(z)$在$z=-1$点发散

$w_2(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(z)$在$z=\pm1$的行为

- $\mathrm{Q}_\nu(z)$在$z=\pm1$点对数发散，故$\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(z)$以$z=\pm1$点为m阶极点
- 所以$w_2(z)$在$z=\pm1$点均发散

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm1)$有界

$$y(x)=c_1w_1(x)+c_2w_2(x)$$

- $y(1)$有界 $\Longrightarrow$ $c_2=0$
- $y(-1)$有界 $\Longrightarrow$ $\nu-m=$自然数

本征值 $\lambda_l=l(l+1)\quad l=m,m+1,m+2,\cdots$

本征函数 $y_l(x)=c_1\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$

通常取$c_1=(-)^m$，而将本征函数记为$\mathrm{P}_l^m(x)$

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(-)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$$

称为m阶l次连带Legendre函数

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm1)$有界

$$y(x)=c_1w_1(x)+c_2w_2(x)$$

- $y(1)$有界 $\Longrightarrow$ $c_2=0$
- $y(-1)$有界 $\Longrightarrow$ $\nu-m=$自然数

本征值 $\lambda_l=l(l+1)$ $l=m,m+1,m+2,\cdots$

本征函数 $y_l(x)=c_1\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$

通常取$c_1=(-)^m$，而将本征函数记为$\mathrm{P}_l^m(x)$

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(-)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$$

称为m阶l次连带Legendre函数

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm 1)$有界

$$y(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$$

- $y(1)$有界 $\Longrightarrow$ $c_2 = 0$
- $y(-1)$有界 $\Longrightarrow$ $\nu - m =$自然数

本征值 $\lambda_l = l(l+1)$ $l = m, m+1, m+2, \cdots$

本征函数 $y_l(x) = c_1\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathsf{P}_l^{(m)}(x)$

通常取$c_1 = (-)^m$，而将本征函数记为$\mathsf{P}_l^m(x)$

$$\mathsf{P}_l^m(x) = (-)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathsf{P}_l^{(m)}(x)$$

称为m阶l次连带Legendre函数

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm 1)$有界

$$y(x)=c_1w_1(x)+c_2w_2(x)$$

- $y(1)$有界 $\Longrightarrow$ $c_2=0$
- $y(-1)$有界 $\Longrightarrow$ $\nu-m=$自然数

本征值 $\lambda_l=l(l+1)$ $l=m,m+1,m+2,\cdots$

本征函数 $y_l(x)=c_1\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$

通常取$c_1=(-)^m$，而将本征函数记为$\mathrm{P}_l^m(x)$

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(-)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$$

称为m阶l次连带Legendre函数

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm 1)$有界

$$y(x)=c_1w_1(x)+c_2w_2(x)$$

- $y(1)$有界 $\Longrightarrow$ $c_2=0$
- $y(-1)$有界 $\Longrightarrow$ $\nu-m=$自然数

本 征 值 $\quad \lambda_l=l(l+1) \quad l=m,m+1,m+2,\cdots$

本征函数 $\quad y_l(x)=c_1\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$

通常取$c_1=(-)^m$，而将本征函数记为$\mathrm{P}_l^m(x)$

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(-)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$$

称为m阶l次连带Legendre函数

连带Legendre方程在有界条件下的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm 1)$有界

$$y(x)=c_1 w_1(x)+c_2 w_2(x)$$

- $y(1)$有界 $\Longrightarrow$ $c_2=0$
- $y(-1)$有界 $\Longrightarrow$ $\nu-m=$自然数

本 征 值 $\lambda_l=l(l+1)$ $l=m,m+1,m+2,\cdots$

本征函数 $y_l(x)=c_1\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$

通常取$c_1=(-)^m$，而将本征函数记为$\mathrm{P}_l^m(x)$

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(-)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$$

称为m阶l次连带Legendre函数

连带Legendre函数的性质

m阶l次连带Legendre函数

$$\mathrm{P}_l^m(x) = (-)^m \left(1-x^2\right)^{m/2} \mathrm{P}_l^{(m)}(x)$$

- 它的许多性质都可由Legendre多项式的相应性质得到
- 下面只讨论连带Legendre函数的性质的正交性，并计算连带Legendre函数的性质的模方

连带Legendre函数的性质

m阶l次连带Legendre函数

$$\mathsf{P}_l^m(x) = (-)^m \left(1 - x^2\right)^{m/2} \mathsf{P}_l^{(m)}(x)$$

- 它的许多性质都可由Legendre多项式的相应性质得到
- 下面只讨论连带Legendre函数的性质的正交性，并计算连带Legendre函数的性质的模方

讲授要点

1. 连带Legendre函数
   - 连带Legendre方程的本征值问题
   - 连带Legendre函数的正交性
2. 球面调和函数
   - 背景
   - 球面调和函数
   - 归一化的球面调和函数

连带Legendre函数的正交性

本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm1)$有界

连带Legendre函数是上述本征值问题的解，因此，作为本征函数，连带Legendre函数应具有正交性，即相同阶但不同次的连带Legendre函数在区间$[-1,1]$上正交

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x=0 \qquad k\neq l$$

连带Legendre函数的正交性

本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$y(\pm 1)$有界

连带Legendre函数是上述本征值问题的解，因此，作为本征函数，连带Legendre函数应具有正交性，即**相同阶但不同次的连带Legendre函数在区间$[-1, 1]$上正交**

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x=0 \qquad k\neq l$$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

方法之一：直接从本征值问题出发

（请补足证明，留作作业）

方法之二：根据积分

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad 当 k < l$$

推出

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

方法之一：直接从本征值问题出发

（请补足证明，留作作业）

方法之二：根据积分

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{当} k < l$$

推出

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

方法之一：直接从本征值问题出发

（请补足证明，留作作业）

方法之二：根据积分

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad 当 k < l$$

推出

已有结果

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2^{l+1}\dfrac{(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!} & k=l+2n \\ & n=0,1,2,\cdots \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

由于$k \neq l$，不妨假设$k < l$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

由于$k \neq l$，不妨假设$k < l$

代入连带Legendre函数的定义

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x$$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

由于$k \neq l$，不妨假设$k < l$

代入连带Legendre函数的定义

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x$$

分部积分

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} & \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x \\ &= (1-x^2)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathsf{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} \\ &\quad - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathsf{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x \\
&\qquad = -\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right] \frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right] \frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\mathrm{d}x$$

★ 分部积分一次，出现一个负号

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\mathrm{d}x$$

★ 分部积分一次，出现一个负号

★ 分部积分一次，对$\mathrm{P}_l(x)$的微商减少一次

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x=0\qquad k\neq l$$

证明

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\mathrm{d}x$$

★ 分部积分一次，出现一个负号
★ 分部积分一次，对$\mathrm{P}_l(x)$的微商减少一次
★ 分部积分一次，对剩余的因子的微商增加一次

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

分部积分m次

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x$$

$$= (-)^m \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

k次多项式

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k < l \quad \square$$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

分部积分m次

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x$$

$$= (-)^m \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

k次多项式

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k < l \quad \square$$

连带Legendre函数的正交性

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l$$

证明

分部积分m次

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x$$

$$= (-)^m \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

k次多项式

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k < l \quad \square$$

推论：连带Legendre函数的模方 $\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_l^m(x)\mathrm{d}x$

依据： $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^l\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x=2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$

$$\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_l^m(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\text{中}x^l\text{的系数}\times\int_{-1}^{1}x^l\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{(2l)!}{(l-m)!}\frac{(l+m)!}{l!}\times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$$

推论：连带Legendre函数的模方 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x$

依据： $$\int_{-1}^{1}x^l\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\text{中}x^l\text{的系数}\times\int_{-1}^{1}x^l\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{(2l)!}{(l-m)!}\frac{(l+m)!}{l!}\times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$$

推论：连带Legendre函数的模方 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x$

依据： $\int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m \frac{\mathrm{d}^m \mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m \frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m \frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right] \text{中} x^l \text{的系数} \times \int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\frac{(2l)!}{(l-m)!}\frac{(l+m)!}{l!} \times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$$

推论：连带Legendre函数的模方 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x$

依据： $$\int_{-1}^{1} x^l\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\text{中}x^l\text{的系数}\times\int_{-1}^{1}x^l\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\frac{(2l)!}{(l-m)!}\frac{(l+m)!}{l!}\times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$$

推论：连带Legendre函数的模方 $\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_l^m(x)\mathrm{d}x$

依据： $\int_{-1}^{1} x^l\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x = 2^{l+1}\dfrac{l!l!}{(2l+1)!}$

$$\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_l^m(x)\mathsf{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathsf{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}\left(x^2-1\right)^l}{\mathrm{d}x^{l+m}}\right]\text{中}x^l\text{的系数}\times\int_{-1}^{1}x^l\mathsf{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{(2l)!}{(l-m)!}\frac{(l+m)!}{l!}\times 2^{l+1}\frac{l!l!}{(2l+1)!}=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$$

连带Legendre函数的正交归一性

- 将连带Legendre函数的正交性和模方合并写成

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_k^m(x)\mathsf{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

- 即 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathsf{P}_k^m(\cos\theta)\mathsf{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathsf{P}_k^m(\cos\theta)$和$\mathsf{P}_l^m(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\sin\theta\Theta = 0$$

中本征值λ后的函数$\sin\theta$

连带Legendre函数的正交归一性

- 将连带Legendre函数的正交性和模方合并写成

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

- 即 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathrm{P}_k^m(\cos\theta)$和$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\sin\theta\Theta = 0$$

中本征值λ后的函数$\sin\theta$

连带Legendre函数的正交归一性

- 将连带Legendre函数的正交性和模方合并写成

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

- 即 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathrm{P}_k^m(\cos\theta)$和$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\sin\theta\Theta = 0$$

中本征值λ后的函数$\sin\theta$

连带Legendre函数的正交归一性

- 将连带Legendre函数的正交性和模方合并写成

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

- 即 $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$
- $\mathrm{P}_k^m(\cos\theta)$和$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$在区间$[0,\pi]$上以权函数$\sin\theta$正交
- 这里的权函数$\sin\theta$正好就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left[\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\sin\theta\Theta=0$$

中本征值λ后的函数$\sin\theta$

讲授要点

1. 连带Legendre函数
   - 连带Legendre方程的本征值问题
   - 连带Legendre函数的正交性
2. 球面调和函数
   - 背景
   - 球面调和函数
   - 归一化的球面调和函数

背景

本节引进连带Legendre函数时，已经讨论过

球坐标系下的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi}\qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\text{有界}\qquad u\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}\qquad u\Big|_{r=a}=f(\theta,\phi)$$

背景

令$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，将上面的方程和齐次边界条件分离变量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\lambda R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$S\big|_{\theta=0}$有界 $\qquad$ $S\big|_{\theta=\pi}$有界

$$S\big|_{\phi=0}=S\big|_{\phi=2\pi} \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

背景

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$$S\Big|_{\theta=0}\text{有界},\qquad S\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}$$

$$S\Big|_{\phi=0}=S\Big|_{\phi=2\pi}\qquad \frac{\partial S}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial S}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

也是一个本征值问题，偏微分方程的本征值问题

而且，实际上也已经求出了这个本征值问题的解

背景

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$$S\Big|_{\theta=0}\text{有界}, \qquad S\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}$$

$$S\Big|_{\phi=0}=S\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial S}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial S}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

也是一个本征值问题，偏微分方程的本征值问题

而且，实际上也已经求出了这个本征值问题的解

背景

分离变量，$S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，就得到

$$\Phi''+\mu\Phi=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left[\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

$\Theta(0)$有界　　$\Theta(\pi)$有界

$$\mu=m^2$$
$$\Phi(\phi)=\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}$$
$$m=0,1,2,\cdots$$

$$\lambda_l=l(l+1)$$
$$\Theta_l(\theta)=\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$$
$$l=m,m+1,m+2,\cdots$$

讲授要点

1. 连带Legendre函数
   - 连带Legendre方程的本征值问题
   - 连带Legendre函数的正交性
2. 球面调和函数
   - 背景
   - 球面调和函数
   - 归一化的球面调和函数

本征值问题

问题：当λ取何值时，

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$$S\big|_{\theta=0}\text{有界，}\qquad S\big|_{\theta=\pi}\text{有界}$$

$$S\big|_{\phi=0}=S\big|_{\phi=2\pi}\qquad \left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

有非零解？

本征值问题

回答：当$\lambda_l = l(l+1)$，$l = 0, 1, 2, \cdots$ 时，

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2} + \lambda S(\theta,\phi) = 0$$

$S\big|_{\theta=0}$有界，　　$S\big|_{\theta=\pi}$有界

$$S\big|_{\phi=0} = S\big|_{\phi=2\pi} \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

非零解是

$$S_{lm}(\theta,\phi) = \begin{cases} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m = 0, 1, 2, \cdots, l \\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m = 1, 2, \cdots, l \end{cases}$$

球面调和函数

换言之，本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$S\big|_{\theta=0}$有界，　　$S\big|_{\theta=\pi}$有界

$$S\big|_{\phi=0}=S\big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial S}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0}=\frac{\partial S}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=2\pi}$$

的解是

本征值　$\lambda_l=l(l+1) \quad l=0,1,2,3,\cdots$

本征函数　$S_{lm}(\theta,\phi)=\begin{cases}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m=0,1,2,\cdots,l\\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m=1,2,\cdots,l\end{cases}$

球面调和函数

本 征 值 $\lambda_l = l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots$

本征函数 $S_{lm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m = 0, 1, 2, \cdots, l \\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m = 1, 2, \cdots, l \end{cases}$

- 有无穷多个本征值
- 对应一个本征值λ_l，有$2l+1$个本征函数（“$2l+1$重简并”）
- 这些本征函数统称球面调和函数，或球面谐函数

球面调和函数

本征值 $\lambda_l = l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots$

本征函数 $S_{lm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m = 0, 1, 2, \cdots, l \\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m = 1, 2, \cdots, l \end{cases}$

- 有无穷多个本征值
- 对应一个本征值λ_l，有$2l+1$个本征函数（“$2l+1$重简并”）
- 这些本征函数统称球面调和函数，或球面谐函数

球面调和函数

本 征 值 $\lambda_l = l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots$

本征函数 $S_{lm}(\theta,\phi) = \begin{cases} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m = 0, 1, 2, \cdots, l \\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m = 1, 2, \cdots, l \end{cases}$

- 有无穷多个本征值
- 对应一个本征值λ_l，有$2l+1$个本征函数（“$2l+1$重简并”）
- 这些本征函数统称球面调和函数，或球面谐函数

☞ 在原子物理及量子力学中，习惯上将对应于$l=0,1,2,3,\cdots$的本征函数(本征态，或轨道)称为s态、p态、d态、f态、$\cdots$

☞ $r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi$和$r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi$都是$x,y,z$的齐次式

☞ 在原子物理及量子力学中，习惯上将对应于 $l=0,1,2,3,\cdots$ 的本征函数(本征态，或轨道)称为 s 态、p 态、d 态、f 态、$\cdots$

☞ $r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi$ 和 $r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi$ 都是 x,y,z 的齐次式

l	m	归一化的本征函数	
0	0	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\mathrm{P}_1(\cos\theta)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{z}{r}$
	1	$\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\cos\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{x}{r}$
		$\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\sin\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{y}{r}$

l	m	归一化的本征函数	
2	0	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}\mathsf{P}_2(\cos\theta)$	$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}\dfrac{3z^2-r^2}{r^2}$
	1	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3\pi}}\mathsf{P}_2^1(\cos\theta)\cos\phi$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\dfrac{xz}{r^2}$
		$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3\pi}}\mathsf{P}_2^1(\cos\theta)\sin\phi$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\dfrac{yz}{r^2}$
	2	$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{5}{3\pi}}\mathsf{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi$	$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\dfrac{x^2-y^2}{r^2}$
		$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{5}{3\pi}}\mathsf{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\dfrac{xy}{r^2}$

球面调和函数的正交性

球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi)=\begin{cases}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m=0,1,2,\cdots,l\\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

- 对应不同本征值的本征函数正交：
- 对应同一个本征值的$2l+1$个本征函数也正交

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos n\phi d\phi=0$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin n\phi d\phi=0$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\sin n\phi d\phi=0$$

$l\neq k \quad m\neq n$

球面调和函数的正交性

球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi)=\begin{cases}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m=0,1,2,\cdots,l\\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

- 对应不同本征值的本征函数正交：
- 对应同一个本征值的$2l+1$个本征函数也正交

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos n\phi d\phi=0$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin n\phi d\phi=0$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\sin n\phi d\phi=0$$

$$l\neq k\qquad m\neq n$$

球面调和函数的正交性

球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi)=\begin{cases}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m=0,1,2,\cdots,l\\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

- 对应不同本征值的本征函数正交:
- 对应同一个本征值的$2l+1$个本征函数也正交

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos n\phi\mathrm{d}\phi=0$$

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin n\phi\mathrm{d}\phi=0$$

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\sin n\phi\mathrm{d}\phi=0$$

$$l\neq k\qquad m\neq n$$

球面调和函数的正交性

球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi)=\begin{cases}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m=0,1,2,\cdots,l\\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

- 对应不同本征值的本征函数正交：
- 对应同一个本征值的$2l+1$个本征函数也正交

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos n\phi\mathrm{d}\phi=0$$

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin n\phi\mathrm{d}\phi=0$$

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\sin n\phi\mathrm{d}\phi=0$$

$$l\neq k\quad m\neq n$$

球面调和函数的模方

球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi)=\begin{cases}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m=0,1,2,\cdots,l\\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos m\phi\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi}{2l+1}(1+\delta_{m0})$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi}{2l+1}$$

球面调和函数的模方

球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi)=\begin{cases}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi & m=0,1,2,\cdots,l\\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi & m=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos m\phi\mathrm{d}\phi=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi}{2l+1}(1+\delta_{m0})$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi}{2l+1}$$

思考题

写出

球坐标系下的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a}=f(\theta,\phi)$$

的一般解

讲授要点

1. 连带Legendre函数
   - 连带Legendre方程的本征值问题
   - 连带Legendre函数的正交性
2. 球面调和函数
   - 背景
   - 球面调和函数
   - 归一化的球面调和函数

球面调和函数的另一种形式

如果考虑另一种可能

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left[\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0$$

$\Theta(0)$有界　　$\Theta(\pi)$有界

$$\mu = m^2$$
$$\Phi(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\lambda_l = l(l+1)$$
$$\Theta_l(\theta) = \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)$$
$$l = |m|, |m|+1, |m|+2, \cdots$$

球面调和函数的另一种形式

则本征值问题

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

$S\big|_{\theta=0}$有界， $S\big|_{\theta=\pi}$有界

$$S\big|_{\phi=0}=S\big|_{\phi=2\pi} \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

的解是

本征值 $\lambda_l=l(l+1)\ l=0,1,2,3,\cdots$

本征函数$S_{lm}(\theta,\phi)=\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm l$$

球面调和函数的另一种形式

这样定义的球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi) = \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

有更简单的正交归一关系

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} S_{lm}(\theta,\phi)S_{kn}^*(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{lk}\delta_{mn}$$

由于现在的本征函数是复函数，所以在正交关系和模方的公式中，要把其中的一个本征函数取复共轭．直接原因是保证本征函数的模方恒为正值

球面调和函数的另一种形式

这样定义的球面调和函数

$$S_{lm}(\theta,\phi)=\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

有更简单的正交归一关系

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}S_{lm}(\theta,\phi)S_{kn}^{*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$=\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{lk}\delta_{mn}$$

由于现在的本征函数是复函数，所以在正交关系和模方的公式中，要把其中的一个本征函数取复共轭．直接原因是保证本征函数的模方恒为正值

归一化的球面调和函数

还可以进一步定义球面调和函数

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{2l+1}{4\pi}}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

这时正交归一关系为

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)\mathrm{Y}_k^{n*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\delta_{lk}\delta_{mn}$$

应当注意，$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$在不同的文献中常常有不同的定义(不同的相位规定)．使用时需要认真核对

归一化的球面调和函数

还可以进一步定义球面调和函数

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{2l+1}{4\pi}}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

这时正交归一关系为

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)\mathrm{Y}_k^{n*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\delta_{lk}\delta_{mn}$$

应当注意，$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$在不同的文献中常常有不同的定义(不同的相位规定)．使用时需要认真核对

归一化的球面调和函数

还可以进一步定义球面调和函数

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{2l+1}{4\pi}}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

这时正交归一关系为

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)\mathrm{Y}_k^{n*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\delta_{lk}\delta_{mn}$$

应当注意，$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$在不同的文献中常常有不同的定义(不同的相位规定)． 使用时需要认真核对