第 二 讲

分离变量法(一)

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. 两端固定弦的自由振动
   - 分离变量法
   - 本征函数正交性的证明
   - 总结
2. 若干重要评述
   - 本征函数的正交性
   - 解的唯一性

讲授要点

1. 两端固定弦的自由振动
   - 分离变量法
   - 本征函数正交性的证明
   - 总结
2. 若干重要评述
   - 本征函数的正交性
   - 解的唯一性

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§14.1
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§8.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§10.3

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§14.1
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§8.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§10.3

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§14.1
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§8.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§10.3

引言

“由偏微分方程通解求整个定解问题的解”，这种方法在多数情况下并不实用

- 对于二阶及更高阶的偏微分方程定解问题，即使可以先求出偏微分方程的通解，由于通解中含有待定函数，一般说来，难以直接根据定解条件定出
- 偏微分方程的通解结构，随自变量数目的增加而明显复杂，计算量急剧增大

引言

“由偏微分方程通解求整个定解问题的解”，这种方法在多数情况下并不实用

- 对于二阶及更高阶的偏微分方程定解问题，即使可以先求出偏微分方程的通解，由于通解中含有待定函数，一般说来，难以直接根据定解条件定出
- 偏微分方程的通解结构，随自变量数目的增加而明显复杂，计算量急剧增大

引言

“由偏微分方程通解求整个定解问题的解”，这种方法在多数情况下并不实用

- 对于二阶及更高阶的偏微分方程定解问题，即使可以先求出偏微分方程的通解，由于通解中含有待定函数，一般说来，难以直接根据定解条件定出
- 偏微分方程的通解结构，随自变量数目的增加而明显复杂，计算量急剧增大

引言

- 有界区间上的波动方程定解问题?
- 热传导方程的通解?
- 有必要寻找求解偏微分方程定解问题的新方法
- 希望这种求解方法的适用范围广
- 分离变量法是求解偏微分方程定解问题的最常用方法
- 以“两端固定弦的自由振动”为例

引言

- 有界区间上的波动方程定解问题?
- 热传导方程的通解?
- 有必要寻找求解偏微分方程定解问题的新方法
- 希望这种求解方法的适用范围广
- 分离变量法是求解偏微分方程定解问题的最常用方法
- 以“两端固定弦的自由振动”为例

引言

- 有界区间上的波动方程定解问题?
- 热传导方程的通解?
- 有必要寻找求解偏微分方程定解问题的新方法
- 希望这种求解方法的适用范围广
- 分离变量法是求解偏微分方程定解问题的最常用方法
- 以“两端固定弦的自由振动”为例

引言

- 有界区间上的波动方程定解问题?
- 热传导方程的通解?
- 有必要寻找求解偏微分方程定解问题的新方法
- 希望这种求解方法的适用范围广
- 分离变量法是求解偏微分方程定解问题的最常用方法
- 以“两端固定弦的自由振动”为例

引言

- 有界区间上的波动方程定解问题?
- 热传导方程的通解?
- 有必要寻找求解偏微分方程定解问题的新方法
- 希望这种求解方法的适用范围广
- 分离变量法是求解偏微分方程定解问题的最常用方法
- 以“两端固定弦的自由振动”为例

引言

- 有界区间上的波动方程定解问题?
- 热传导方程的通解?
- 有必要寻找求解偏微分方程定解问题的新方法
- 希望这种求解方法的适用范围广
- 分离变量法是求解偏微分方程定解问题的最常用方法
- 以“两端固定弦的自由振动”为例

引言

学习中应注意的问题

- 通过具体实例，掌握分离变量法的基本精神与解题步骤
- 明确分离变量法的理论依据
(现在只是提出问题)
- 有意义的重要结论
- 具体的计算技巧

引言

学习中应注意的问题

- 通过具体实例，掌握分离变量法的基本精神与解题步骤
- 明确分离变量法的理论依据(现在只是提出问题)
- 有意义的重要结论
- 具体的计算技巧

引言

学习中应注意的问题

- 通过具体实例，掌握分离变量法的基本精神与解题步骤
- 明确分离变量法的理论依据(现在只是提出问题)
- 有意义的重要结论
- 具体的计算技巧

引言

学习中应注意的问题

- 通过具体实例，掌握分离变量法的基本精神与解题步骤
- 明确分离变量法的理论依据(现在只是提出问题)
- 有意义的重要结论
- 具体的计算技巧

两端固定的弦(弦l)的自由振动

定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

两端固定的弦(弦l)的自由振动

定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

讲授要点

1. 两端固定弦的自由振动
   - 分离变量法
   - 本征函数正交性的证明
   - 总结
2. 若干重要评述
   - 本征函数的正交性
   - 解的唯一性

定解问题

考虑长为l、两端固定的弦的自由振动，方程及定解条件为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\big|_{x=0} = 0 \qquad u\big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

希望求得的特解具有分离变量的形式，即

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \Longrightarrow \boxed{X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \Longrightarrow \boxed{\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}}$$

寻找分离变量形式$u(x,t) = X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \end{array}}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \end{array}}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=0}=0}$$

寻找分离变量形式$u(x,t) = X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \end{array}}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=0} = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{X(0)T(t) = 0}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \end{array}}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=0}=0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{X(0)=0}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \end{array}}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=0}=0} \Longrightarrow \boxed{X(0)=0}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=l}=0} \Longrightarrow \boxed{X(l)=0}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \end{array}}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=0}=0} \Longrightarrow \boxed{X(0)=0}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=l}=0} \Longrightarrow \boxed{X(l)=0}$$

$$\boxed{u\Big|_{t=0}=\phi(x)}$$

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \end{array}}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=0}=0} \Longrightarrow \boxed{X(0)=0}$$

$$\boxed{u\Big|_{x=l}=0} \Longrightarrow \boxed{X(l)=0}$$

$$\boxed{u\Big|_{t=0}=\phi(x)}$$

不能分离变量

寻找分离变量形式$u(x,t)=X(x)T(t)$的解

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \end{array}}$$

$$\boxed{u\big|_{x=0}=0} \Longrightarrow \boxed{X(0)=0}$$

$$\boxed{u\big|_{x=l}=0} \Longrightarrow \boxed{X(l)=0}$$

$$\boxed{u\big|_{t=0}=\phi(x)}$$ 不能分离变量

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)}$$ 不能分离变量

分离变量法步骤之一

以上就是

分离变量法求解偏微分方程定解问题步骤之一

分离变量

分离变量

- 目标：分离变量形式的非零解 $u(x,t)=X(x)T(t)$
- 结果：函数$X(x)$满足的常微分方程和边界条件以及$T(t)$满足的常微分方程

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

$$X(0)=0 \qquad X(l)=0$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

- 条件：偏微分方程和边界条件都是齐次的

分离变量

- 目标：分离变量形式的非零解
$u(x,t)=X(x)T(t)$
- 结果：函数$X(x)$满足的常微分方程和边界条件以及$T(t)$满足的常微分方程

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$
$$X(0)=0 \qquad X(l)=0$$
$$T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0$$

- 条件：偏微分方程和边界条件都是齐次的

分离变量

- 目标：分离变量形式的非零解
  $u(x,t) = X(x)T(t)$

- 结果：函数$X(x)$满足的常微分方程和边界条件以及$T(t)$满足的常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$
$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

- 条件：偏微分方程和边界条件都是齐次的

小结

现在出现的函数$X(x)$的常微分方程定解问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

小结

现在出现的函数$X(x)$的常微分方程定解问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

$$X(0)=0 \qquad X(l)=0$$

☞ 特点：微分方程中含有待定常数λ，定解条件是一对齐次边界条件．这样的定解问题不同于常微分方程的初值问题

小结

现在出现的函数$X(x)$的常微分方程定解问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

☞ 并非对于任何λ值，都有既满足齐次常微分方程、又满足齐次边界条件的非零解

小结

现在出现的函数$X(x)$的常微分方程定解问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

☞ 只有当λ取某些特定值时，才有既满足齐次常微分方程、又满足齐次边界条件的非零解$X(x)$

小结

现在出现的函数$X(x)$的常微分方程定解问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

☞ λ的这些特定值称为本征值

小结

现在出现的函数$X(x)$的常微分方程定解问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

☞ λ的这些特定值称为本征值

☞ 相应的非零解称为本征函数

小结

现在出现的函数$X(x)$的常微分方程定解问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

- λ的这些特定值称为本征值
- 相应的非零解称为本征函数
- 函数$X(x)$的常微分方程定解问题，称为本征值问题

分离变量法步骤之二

分离变量法求解偏微分方程定解问题步骤之二

求解本征值问题

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ 若$\lambda = 0$

微分方程的通解 $X(x) = A_0 x + B_0$

边界条件 $\Longrightarrow$ $A_0 = 0,\ B_0 = 0$

说明$\lambda = 0$时只有零解．即$\lambda = 0$不是本征值

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ 若$\lambda = 0$

微分方程的通解 $X(x) = A_0 x + B_0$

边界条件 $\Longrightarrow$ $A_0 = 0,\ B_0 = 0$

说明$\lambda = 0$时只有零解．即$\lambda = 0$不是本征值

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ 若$\lambda = 0$

微分方程的通解 $X(x) = A_0 x + B_0$

边界条件 $\Longrightarrow$ $A_0 = 0,\ B_0 = 0$

说明$\lambda = 0$时只有零解．即$\lambda = 0$不是本征值

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ 若$\lambda = 0$

微分方程的通解 $X(x) = A_0 x + B_0$

边界条件 $\Longrightarrow$ $A_0 = 0,\ B_0 = 0$

说明$\lambda = 0$时只有零解．即$\lambda = 0$不是本征值

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ 若$\lambda \neq 0$

微分方程通解 $X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$

边界条件 $\Longrightarrow$ $\boxed{B = 0 \quad A\sin\sqrt{\lambda}l = 0}$

因为$A \neq 0$

$$\boxed{\sqrt{\lambda}l = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \cdots}$$

求解本征值问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$
$$X(0)=0 \qquad X(l)=0$$

Answer

☞ 若$\lambda\neq 0$

微分方程通解 $X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$

边界条件 $\Longrightarrow$ $\boxed{B=0 \quad A\sin\sqrt{\lambda}l=0}$

因为$A\neq 0$

$$\boxed{\sqrt{\lambda}l=n\pi \qquad n=1,2,3,\cdots}$$

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ 若$\lambda \neq 0$

微分方程通解 $X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$

边界条件 $\Longrightarrow$ $\boxed{B = 0 \quad A\sin\sqrt{\lambda}l = 0}$

因为$A \neq 0$

$$\boxed{\sqrt{\lambda}l = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \cdots}$$

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ 若$\lambda \neq 0$

微分方程通解 $X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$

边界条件 $\Longrightarrow$ $\boxed{B = 0 \quad A\sin\sqrt{\lambda}l = 0}$

因为$A \neq 0$

$$\boxed{\sqrt{\lambda}l = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \cdots}$$

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ $\lambda \neq 0$

本征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

本征函数 $X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi}{l} x$

求解本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

Answer

☞ $\lambda \neq 0$

本 征 值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

本征函数 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$

小结

本征值问题

$$\boxed{\begin{array}{l} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0 \qquad X(l)=0 \end{array}}$$

小结

本征值问题

$$\boxed{\begin{aligned} & X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ & X(0) = 0 \qquad X(l) = 0 \end{aligned}}$$

并非对于任何λ值，都有既满足齐次常微分方程、又满足齐次边界条件的非零解

小结

本征值问题
$$\boxed{\begin{array}{ll} X''(x)+\lambda X(x)=0 & \\ X(0)=0 & X(l)=0 \end{array}}$$

只有当λ取某些特定值

$$\boxed{\text{本征值}\qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots}$$

时，才有既满足齐次常微分方程、又满足齐次边界条件的非零解$X(x)$

$$\boxed{\text{本征函数}\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

小结

本征值问题

$$\boxed{\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \qquad X(l) = 0 \end{array}}$$

本征值有无穷多个，可以用正整数n标记

相应地，本征值和本征函数都应记为λ_n和$X_n(x)$

本征值问题

$$\boxed{\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \qquad X(l) = 0 \end{array}}$$

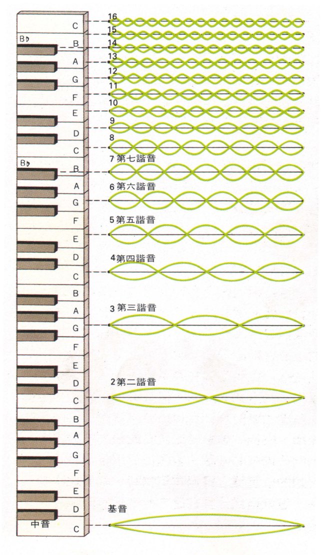
本征值

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

本征函数

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$$



分离变量法步骤之三

分离变量法求解偏微分方程定解问题步骤之三

求特解，并叠加出一般解

求特解

对于每一个本征值λ_n

$$\boxed{T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T_n(t) = C_n \sin \frac{n\pi}{l} at + D_n \cos \frac{n\pi}{l} at}$$

求特解

因此，满足偏微分方程和边界条件的特解为

$$\boxed{\begin{aligned} u_n(x,t) = \left(C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}}$$

求特解

因此，满足偏微分方程和边界条件的特解为

$$\boxed{u_n(x,t) = \left(C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2, 3, \cdots}$$

☞ 这样的特解有无穷多个

求特解

因此，满足偏微分方程和边界条件的特解为

$$\boxed{\begin{aligned} u_n(x,t) = \left(C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ n = 1,2,3,\cdots \end{aligned}}$$

☞ 每一个特解都满足齐次偏微分方程和齐次边界条件

求特解

因此，满足偏微分方程和边界条件的特解为

$$\boxed{\begin{aligned} u_n(x,t) = \left(C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}}$$

☞ 一般说来，单独任何一个特解不可能也恰好满足定解问题中的初始条件，即一般无法找到常数C_n和D_n，满足

$$D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \qquad C_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)$$

叠加出一般解

☞ 把全部无穷多个特解叠加起来

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

叠加出一般解

- 把全部无穷多个特解叠加起来

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

- 只要级数具有足够好的收敛性(例如，可以逐项求二阶偏微商)，那么，这样得到的$u(x,t)$也仍然是齐次偏微分方程在齐次边界条件下的解

叠加出一般解

- 把全部无穷多个特解叠加起来

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

- 这种形式的解称为一般解

叠加出一般解

☞ 把全部无穷多个特解叠加起来

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

☞ 这种形式的解称为一般解

它不同于偏微分方程的通解

一般解不只满足偏微分方程，而且满足边界条件

叠加出一般解

- 把全部无穷多个特解叠加起来

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

- 这种形式的解称为一般解
- 这样得到的一般解能否满足初始条件?

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

叠加出一般解

- 把全部无穷多个特解叠加起来

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

- 这种形式的解称为一般解
- 这样得到的一般解能否满足初始条件?

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

- 换言之，能否由初始条件定出叠加系数C_n和D_n?

分离变量法步骤之四

分离变量法求解偏微分方程定解问题步骤之四

利用本征函数正交性定叠加系数

利用本征函数正交性定叠加系数

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \qquad (\maltese)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \qquad (\divideontimes)$$

利用本征函数正交性定叠加系数

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \qquad (✠)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \qquad (※)$$

理论依据　本征函数的正交性

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m$$

利用本征函数正交性定叠加系数

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \qquad (\maltese)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \qquad (\divideontimes)$$

在$(\maltese)$式两端同乘以$\sin\frac{m\pi}{l}x$

$$\int_0^l \phi(x)\sin\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

利用本征函数正交性定叠加系数

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \qquad (\maltese)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \qquad (\divideontimes)$$

逐项积分

$$\int_0^l \phi(x)\sin\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$= D_m \cdot \frac{l}{2}$$

利用本征函数正交性定叠加系数

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \qquad (✠)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \qquad (※)$$

所以由(✠)式 $$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

利用本征函数正交性定叠加系数

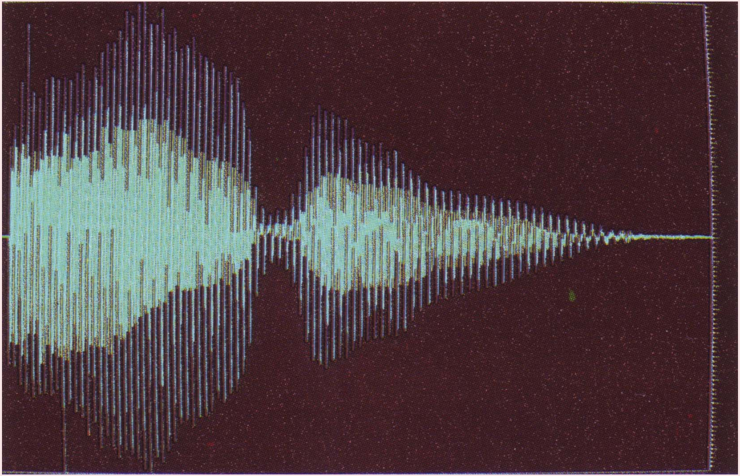
$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \tag{✠}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \tag{※}$$

所以由(✠)式 $\quad D_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$

同样由(※)式 $\quad C_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$

“频谱分解” “语音合成”



讲授要点

1. 两端固定弦的自由振动
   - 分离变量法
   - 本征函数正交性的证明
   - 总结
2. 若干重要评述
   - 本征函数的正交性
   - 解的唯一性

补遗

有关本征函数正交性的证明

本征函数的正交性

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$X(0) = 0 \quad X(l) = 0$$

本征函数的正交性：对应不同本征值的本征函数在区间$[0, l]$上正交

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m$$

本征函数的正交性

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$
$$X(0)=0 \quad X(l)=0$$

本征函数的正交性：对应不同本征值的本征函数在区间$[0,l]$上正交

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0, \quad n\neq m$$

本征函数正交性的证明

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \quad X_m(x)=\sin\frac{m\pi}{l}x$$

分别对应于本征值λ_n和λ_m

$$\begin{array}{l} X_n''(x)+\lambda_n X_n(x)=0 \\ X_n(0)=0 \quad X_n(l)=0 \end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{l} X_m''(x)+\lambda_m X_m(x)=0 \\ X_m(0)=0 \quad X_m(l)=0 \end{array}$$

本征函数正交性的证明

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \quad X_m(x) = \sin\frac{m\pi}{l}x$$

分别对应于本征值λ_n和λ_m

$$\begin{aligned}&X_n''(x)+\lambda_n X_n(x)=0\\&X_n(0)=0 \quad X_n(l)=0\end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned}&X_m''(x)+\lambda_m X_m(x)=0\\&X_m(0)=0 \quad X_m(l)=0\end{aligned}$$

用$X_m(x)$乘以$X_n(x)$的方程
用$X_n(x)$乘以$X_m(x)$的方程，相减

$$\begin{aligned}&[X_m(x)X_n''(x) - X_n(x)X_m''(x)]\\&\qquad + (\lambda_n - \lambda_m)\,X_m(x)X_n(x) = 0\end{aligned}$$

本征函数正交性的证明

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \quad X_m(x)=\sin\frac{m\pi}{l}x$$

分别对应于本征值λ_n和λ_m

$$\begin{matrix} X_n''(x)+\lambda_n X_n(x)=0 \\ X_n(0)=0 \quad X_n(l)=0 \end{matrix} \quad 和 \quad \begin{matrix} X_m''(x)+\lambda_m X_m(x)=0 \\ X_m(0)=0 \quad X_m(l)=0 \end{matrix}$$

在区间$[0,l]$上积分，即得

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^l \left[X_n(x)X_m''(x)-X_m(x)X_n''(x)\right]\mathrm{d}x$$

本征函数正交性的证明

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \quad X_m(x) = \sin\frac{m\pi}{l}x$$

分别对应于本征值λ_n和λ_m

$$\begin{matrix} X_n''(x)+\lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = 0 \quad X_n(l) = 0 \end{matrix} \quad \text{和} \quad \begin{matrix} X_m''(x)+\lambda_m X_m(x) = 0 \\ X_m(0) = 0 \quad X_m(l) = 0 \end{matrix}$$

计算出右端的积分

$$\begin{aligned} &(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[X_n(x)X_m'(x) - X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l \end{aligned}$$

本征函数正交性的证明

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \quad X_m(x) = \sin\frac{m\pi}{l}x$$

分别对应于本征值λ_n和λ_m

$$\begin{matrix} X_n''(x)+\lambda_n X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = 0 \quad X_n(l) = 0 \end{matrix} \quad 和 \quad \begin{matrix} X_m''(x)+\lambda_m X_m(x) = 0 \\ X_m(0) = 0 \quad X_m(l) = 0 \end{matrix}$$

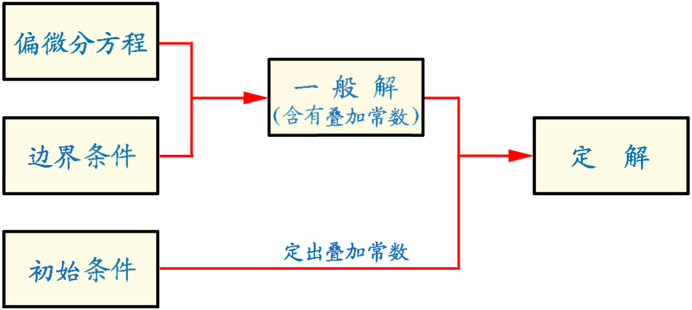
代入边界条件，就得出，当$\lambda_n \neq \lambda_m$时

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad n \neq m \quad \square$$

讲授要点

1. 两端固定弦的自由振动
   - 分离变量法
   - 本征函数正交性的证明
   - 总结
2. 若干重要评述
   - 本征函数的正交性
   - 解的唯一性

总结(一)



总结(一)

分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤

总结(一)

分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤

☞ 第一步，分离变量

总结(一)

分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤

☞ 第一步，分离变量

这一步之所以能够实现，先决条件是偏微分方程和边界条件都是齐次的．而分离变量的结果，是得到了(一个或多个)含有待定常数的齐次常微分方程和齐次边界条件，即(一个或多个)本征值问题

总结(一)

分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤

- ☞ 第一步，分离变量
- ☞ 第二步，求解本征值问题

总结(一)

分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤

- 第一步，分离变量
- 第二步，求解本征值问题
- 第三步，求出全部的特解，并进一步叠加出一般解

总结(一)

分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤

- 第一步，分离变量
- 第二步，求解本征值问题
- 第三步，求出全部的特解，并进一步叠加出一般解

显然事先没有任何理由弃去其中的任何一个特解

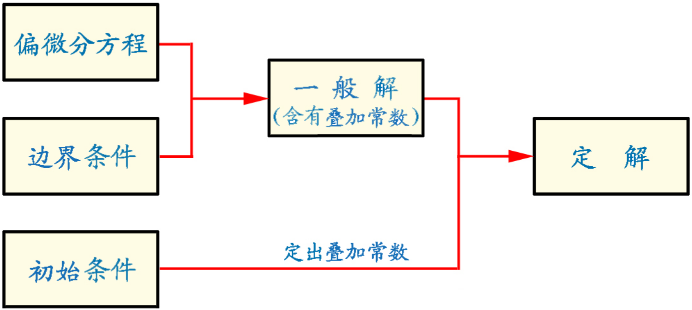
总结(一)

分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤

- ☞ 第一步，分离变量
- ☞ 第二步，求解本征值问题
- ☞ 第三步，求出全部的特解，并进一步叠加出一般解
- ☞ 第四步，利用本征函数的正交性定叠加系数

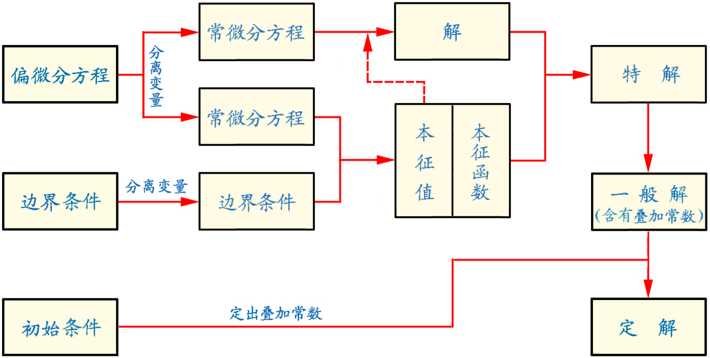
总结(一)

分离变量法图解之一



总结(一)

分离变量法图解之二



总结(二)

- 严格说来，上面得到的还只是形式解
- 至少还必须验证：
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足偏微分方程
    换言之，级数解可否逐项求二阶偏微商
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足边界条件
    换言之，级数解的和函数是否连续
  - △ 在定叠加系数时，逐项积分是否合法
- 关于这三个问题，都涉及级数解的收敛性
  由于系数C_n和D_n是由$\phi(x)$和$\psi(x)$决定的
  因而$\phi(x)$和$\psi(x)$的性质就决定了对这三个问题的回答

总结(二)

☞ 严格说来，上面得到的还只是形式解

☞ 至少还必须验证：

△ 这样得到的$u(x,t)$是否满足偏微分方程

换言之，级数解可否逐项求二阶偏微商

△ 这样得到的$u(x,t)$是否满足边界条件

换言之，级数解的和函数是否连续

△ 在定叠加系数时，逐项积分是否合法

☞ 关于这三个问题，都涉及级数解的收敛性

由于系数C_n和D_n是由$\phi(x)$和$\psi(x)$决定的

因而$\phi(x)$和$\psi(x)$的性质就决定了对这三个问题的回答

总结(二)

- ☞ 严格说来，上面得到的还只是形式解
- ☞ 至少还必须验证：
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足偏微分方程
    换言之，级数解可否逐项求二阶偏微商
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足边界条件
    换言之，级数解的和函数是否连续
  - △ 在定叠加系数时，逐项积分是否合法
- ☞ 关于这三个问题，都涉及级数解的收敛性
  由于系数C_n和D_n是由$\phi(x)$和$\psi(x)$决定的
  因而$\phi(x)$和$\psi(x)$的性质就决定了对这三个问题的回答

总结(二)

- ☞ 严格说来，上面得到的还只是形式解
- ☞ 至少还必须验证：
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足偏微分方程
    换言之，级数解可否逐项求二阶偏微商
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足边界条件
    换言之，级数解的和函数是否连续
  - △ 在定叠加系数时，逐项积分是否合法
- ☞ 关于这三个问题，都涉及级数解的收敛性
  由于系数C_n和D_n是由$\phi(x)$和$\psi(x)$决定的
  因而$\phi(x)$和$\psi(x)$的性质就决定了对这三个问题的回答

总结(二)

- ☞ 严格说来，上面得到的还只是形式解
- ☞ 至少还必须验证：
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足偏微分方程
    换言之，级数解可否逐项求二阶偏微商
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足边界条件
    换言之，级数解的和函数是否连续
  - △ 在定叠加系数时，逐项积分是否合法
- ☞ 关于这三个问题，都涉及级数解的收敛性
  由于系数C_n和D_n是由$\phi(x)$和$\psi(x)$决定的
  因而$\phi(x)$和$\psi(x)$的性质就决定了对这三个问题的回答

总结(二)

- ☞ 严格说来，上面得到的还只是形式解
- ☞ 至少还必须验证：
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足偏微分方程
    换言之，级数解可否逐项求二阶偏微商
  - △ 这样得到的$u(x,t)$是否满足边界条件
    换言之，级数解的和函数是否连续
  - △ 在定叠加系数时，逐项积分是否合法
- ☞ 关于这三个问题，都涉及级数解的收敛性
  由于系数C_n和D_n是由$\phi(x)$和$\psi(x)$决定的
  因而$\phi(x)$和$\psi(x)$的性质就决定了对这三个问题的回答

总结(三)

从理论上说，分离变量法的成功，取决于下列几个条件：

1. 本征值问题有解
2. 定解问题的解一定可以按照本征函数展开，换句话说，本征函数的全体是完备的
3. 本征函数一定具有正交性

总结(三)

从理论上说，分离变量法的成功，取决于下列几个条件：

1. 本征值问题有解
2. 定解问题的解一定可以按照本征函数展开，换句话说，本征函数的全体是完备的
3. 本征函数一定具有正交性

以后将在适当时候回答这几个问题

总结(三)

从理论上说，分离变量法的成功，取决于下列几个条件：

1. 本征值问题有解
2. 定解问题的解一定可以按照本征函数展开，换句话说，本征函数的全体是完备的
3. 本征函数一定具有正交性

以后将在适当时候回答这几个问题

总结(三)

从理论上说，分离变量法的成功，取决于下列几个条件：

1. 本征值问题有解
2. 定解问题的解一定可以按照本征函数展开，换句话说，本征函数的全体是完备的
3. 本征函数一定具有正交性

以后将在适当时候回答这几个问题

总结(三)

从理论上说，分离变量法的成功，取决于下列几个条件：

1. 本征值问题有解
2. 定解问题的解一定可以按照本征函数展开，换句话说，本征函数的全体是完备的
3. 本征函数一定具有正交性

以后将在适当时候回答这几个问题

讲授要点

1. 两端固定弦的自由振动
   - 分离变量法
   - 本征函数正交性的证明
   - 总结
2. 若干重要评述
   - 本征函数的正交性
   - 解的唯一性

要点

1. 关于本征函数正交性的进一步讨论 Details
2. 本征函数的模方 Details
3. 定解问题的唯一性 Details

要点

1. 关于本征函数正交性的进一步讨论 Details
2. 本征函数的模方 Details
3. 定解问题的唯一性 Details

要点

1. 关于本征函数正交性的进一步讨论 Details
2. 本征函数的模方 Details
3. 定解问题的唯一性 Details

关于本征函数正交性的进一步讨论

上节关于本征函数正交性的证明可划分为两个主要步骤:

1. 由本征函数所满足的常微分方程$X''+\lambda X=0$推出

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \left[X_n(x)X_m'(x)-X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

2. 代入边界条件证得

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0 \qquad n\neq m$$

关于本征函数正交性的进一步讨论

上节关于本征函数正交性的证明可划分为两个主要步骤：

1. 由本征函数所满足的常微分方程$X''+\lambda X=0$推出

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \left[X_n(x)X'_m(x)-X_m(x)X'_n(x)\right]\Big|_0^l$$

2. 代入边界条件证得

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0 \qquad n\neq m$$

关于本征函数正交性的进一步讨论

上节关于本征函数正交性的证明可划分为两个主要步骤：

1. 由本征函数所满足的常微分方程$X''+\lambda X=0$推出

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \left[X_n(x)X_m'(x)-X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

2. 代入边界条件证得

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0 \qquad n\neq m$$

第二类边界条件下本征函数的正交性

请同学证明：对于本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X'(0) = 0 \qquad X'(l) = 0$$

对应不同本征值的本征函数仍在区间$[0, l]$上正交

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m$$

提示：仍分析上一段中提及的两个主要步骤，在第二类边界条件的情形下将有何异同？

第二类边界条件下本征函数的正交性

请同学证明：对于本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$X'(0) = 0 \qquad X'(l) = 0$$

对应不同本征值的本征函数仍在区间$[0, l]$上正交

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m$$

提示：仍分析上一段中提及的两个主要步骤，在第二类边界条件的情形下将有何异同？

第三类边界条件下本征函数的正交性

再证明： 若α_1和β_1、α_2和β_2均不同时为0，则

对于本征值问题
$$\boxed{\begin{array}{l} X'' + \lambda X = 0 \\ \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0 \\ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0 \end{array}}$$

对应不同本征值的本征函数仍在区间$[0, l]$上正交

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq m$$

第三类边界条件下本征函数的正交性

再证明：若α_1和β_1、α_2和β_2均不同时为0，则

对于本征值问题
$$\boxed{\begin{aligned} & X'' + \lambda X = 0 \\ & \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0 \\ & \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0 \end{aligned}}$$

对应不同本征值的本征函数仍在区间$[0, l]$上正交
$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m$$

第三类边界条件下本征函数的正交性

设有本征值$\lambda_m \neq \lambda_n$

$$X_m'' + \lambda_m X_m = 0 \quad X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

则仍可推出

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x$$
$$= \left[X_n(x)X_m'(x) - X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

第三类边界条件下本征函数的正交性

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \left[X_n(x)X_m'(x)-X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

再由边界条件

$$\begin{aligned}\alpha_1X_n(0)+\beta_1X_n'(0)=0\\ \alpha_1X_m(0)+\beta_1X_m'(0)=0\end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned}\alpha_2X_n(l)+\beta_2X_n'(l)=0\\ \alpha_2X_m(l)+\beta_2X_m'(l)=0\end{aligned}$$

第三类边界条件下本征函数的正交性

$$\begin{aligned}(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x\\ =\left[X_n(x)X_m'(x)-X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l\end{aligned}$$

再由边界条件

$$\begin{aligned}\alpha_1X_n(0)+\beta_1X_n'(0)=0\\ \alpha_1X_m(0)+\beta_1X_m'(0)=0\end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned}\alpha_2X_n(l)+\beta_2X_n'(l)=0\\ \alpha_2X_m(l)+\beta_2X_m'(l)=0\end{aligned}$$

第三类边界条件下本征函数的正交性

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \left[X_n(x)X_m'(x) - X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

再由边界条件

$$\begin{aligned}\alpha_1 X_n(0)+\beta_1 X_n'(0)=0\\ \alpha_1 X_m(0)+\beta_1 X_m'(0)=0\end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned}\alpha_2 X_n(l)+\beta_2 X_n'(l)=0\\ \alpha_2 X_m(l)+\beta_2 X_m'(l)=0\end{aligned}$$

α_1和β_1不同时为0 $\quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} X_n(0) & X_n'(0) \\ X_m(0) & X_m'(0)\end{vmatrix} = 0$

第三类边界条件下本征函数的正交性

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \left[X_n(x)X_m'(x) - X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

再由边界条件

$$\begin{aligned}\alpha_1 X_n(0)+\beta_1 X_n'(0)=0\\ \alpha_1 X_m(0)+\beta_1 X_m'(0)=0\end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned}\alpha_2 X_n(l)+\beta_2 X_n'(l)=0\\ \alpha_2 X_m(l)+\beta_2 X_m'(l)=0\end{aligned}$$

α_2和β_2不同时为0 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} X_n(l) & X_n'(l) \\ X_m(l) & X_m'(l) \end{vmatrix} = 0$

第三类边界条件下本征函数的正交性

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \left[X_n(x)X_m'(x) - X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

再由边界条件

$$\begin{aligned}\alpha_1 X_n(0)+\beta_1 X_n'(0)=0\\ \alpha_1 X_m(0)+\beta_1 X_m'(0)=0\end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned}\alpha_2 X_n(l)+\beta_2 X_n'(l)=0\\ \alpha_2 X_m(l)+\beta_2 X_m'(l)=0\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0$$

第三类边界条件下本征函数的正交性

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x$$
$$= \left[X_n(x)X_m'(x) - X_m(x)X_n'(x)\right]\Big|_0^l$$

再由边界条件

$$\begin{matrix} \alpha_1 X_n(0)+\beta_1 X_n'(0)=0 \\ \alpha_1 X_m(0)+\beta_1 X_m'(0)=0 \end{matrix} \quad \text{和} \quad \begin{matrix} \alpha_2 X_n(l)+\beta_2 X_n'(l)=0 \\ \alpha_2 X_m(l)+\beta_2 X_m'(l)=0 \end{matrix}$$

$$\lambda_n \neq \lambda_n \quad \Rightarrow \quad \int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq m$$

结论

conclusion

本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

齐次的第一、二、三类边界条件

中，本征函数均具有正交性

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad n \neq m$$

思考题：若$x = 0$与$x = l$两端的边界条件类型不同，本征函数是否仍具有正交性?

结论

conclusion

本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

齐次的第一、二、三类边界条件

中，本征函数均具有正交性

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad n \neq m$$

思考题：若$x=0$与$x=l$两端的边界条件类型不同，本征函数是否仍具有正交性?

Remark

第三类边界条件

$$\alpha X(0)+\beta X'(0)=0$$

涵盖了第一类边界条件和第二类边界条件

- 当$\alpha\neq 0,\ \beta=0$时，即为第一类边界条件$X(0)=0$
- 当$\alpha=0,\ \beta\neq 0$时，即为第二类边界条件$X'(0)=0$

Remark

第三类边界条件

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0$$

涵盖了第一类边界条件和第二类边界条件

- 当$\alpha \neq 0$, $\beta = 0$时，即为第一类边界条件$X(0) = 0$
- 当$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$时，即为第二类边界条件$X'(0) = 0$

Return

Remark

第三类边界条件

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0$$

涵盖了第一类边界条件和第二类边界条件

- 当$\alpha \neq 0$, $\beta = 0$时，即为第一类边界条件$X(0) = 0$
- 当$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$时，即为第二类边界条件$X'(0) = 0$

Return

本征函数的模方

本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

直接计算可得

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

本征函数的模方

本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

直接计算可得

$$\|X_n\|^2 \equiv \int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

本征函数的模方

本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

直接计算可得

$$\|X_n\|^2 \equiv \int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

☞ 此结果的成立条件：第一类边界条件

本征函数的模方

本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

直接计算可得

$$\|X_n\|^2 \equiv \int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

对于第二、三类边界条件，原则上需另行计算

本征函数的模方

本征值问题

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$X(0) = 0 \qquad X(l) = 0$$

直接计算可得

$$\|X_n\|^2 \equiv \int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

常称$1/\|X_n\|$为(本征函数的)归一因子

本征函数的正交归一性

本征值问题的正交性

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0 \quad n\neq m$$

本征函数的模方

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x$$

可统一写成

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=\|X_n\|^2\delta_{nm}$$

此关系式通常称为本征函数的正交归一关系(正交归一性)

本征函数的正交归一性

本征值问题的正交性

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0 \quad n \neq m$$

本征函数的模方

$$\|X_n\|^2 \equiv \int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x$$

可统一写成

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \|X_n\|^2\delta_{nm}$$

此关系式通常称为本征函数的正交归一关系(正交归一性)

Return

本征函数的正交归一性

本征值问题的正交性

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0 \quad n\neq m$$

本征函数的模方

$$\|X_n\|^2\equiv\int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x$$

可统一写成

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=\|X_n\|^2\delta_{nm}$$

此关系式通常称为本征函数的正交归一关系(正交归一性)

Return

本征函数的正交归一性

本征值问题的正交性

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=0 \quad n\neq m$$

本征函数的模方

$$\|X_n\|^2\equiv\int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x$$

可统一写成

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \|X_n\|^2\delta_{nm}$$

此关系式通常称为本征函数的正交归一关系(正交归一性)

Return

讲授要点

1. 两端固定弦的自由振动
   - 分离变量法
   - 本征函数正交性的证明
   - 总结
2. 若干重要评述
   - 本征函数的正交性
   - 解的唯一性

解的唯一性

弦的总能量

在任一时刻t，弦的动能和位能分别是

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x \quad 和 \quad \frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

解的唯一性

弦的总能量

所以，弦的总能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

解的唯一性

弦的总能量

所以，弦的总能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

将解式代入，利用本征函数的正交归一性即得

$$E(t)=\frac{m\pi^2a^2}{4l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[\,|C_n|^2+|D_n|^2\,\right]$$

解的唯一性

弦的总能量

所以，弦的总能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

将解式代入，利用本征函数的正交归一性即得

$$E(t)=\frac{m\pi^2a^2}{4l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[\,|C_n|^2+|D_n|^2\,\right]$$

右端显然是常数(与t无关) $\Longrightarrow$ 弦的总能量守恒

解的唯一性

基本思路：要证明定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

有唯一解，不妨假设此定解问题有两个解，u_1和u_2，而后证明$v \equiv u_1 - u_2$恒为0

解的唯一性

基本思路：要证明定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u\Big|_{x=0} = 0 \qquad u\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u\Big|_{t=0} = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

有唯一解，不妨假设此定解问题有两个解，u_1和u_2，而后证明$v \equiv u_1 - u_2$恒为0

解的唯一性

则$v(x,t)$满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$v\Big|_{x=0} = 0 \qquad v\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$v\Big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

解的唯一性

则$v(x,t)$满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$v\Big|_{x=0} = 0 \qquad v\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$v\Big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

弦的总能量守恒的要求来看，既然$t=0$时弦的总能量为0，因此以后任一时刻t，$E(t)$也一定为0

解的唯一性

则$v(x,t)$满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$v\Big|_{x=0} = 0 \qquad v\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$v\Big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

这意味着一定有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

解的唯一性

则$v(x,t)$满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$v\Big|_{x=0} = 0 \qquad v\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$v\Big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

即$v(x,t)$为常数

解的唯一性

则$v(x,t)$满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$v\Big|_{x=0} = 0 \qquad v\Big|_{x=l} = 0 \qquad t \geq 0$$

$$v\Big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

由初始条件或边界条件，都能定出此常数为0

解的唯一性

则$v(x,t)$满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$v\Big|_{x=0}=0 \qquad v\Big|_{x=l}=0 \qquad t\geq 0$$

$$v\Big|_{t=0}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad 0\leq x\leq l$$

由此即证得(两端固定弦的自由振动)解的唯一性