第 十 五 讲

δ 函 数

北京大学　物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§10.1 — 10.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§5.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§6.5

引言

介绍一种新的"函数"——δ函数

引言

介绍一种新的"函数"——δ函数

- 由物理学家Dirac引进
- 可用于描写物理学中的点量，例如点质量，点电荷，脉冲等
- 在近代物理学中有着广泛的应用
- 在数学上，δ 函数属于广义函数，但仍可以当作普通函数一样进行运算，如计算微分和积分， 甚至应用于求解微分方程
- 可以为我们处理有关的数学物理问题，带来极大的便利

引言

介绍一种新的“函数”——δ函数

- 由物理学家Dirac引进
- 可用于描写物理学中的点量，例如点质量，点电荷，脉冲等
- 在近代物理学中有着广泛的应用
- 在数学上，δ 函数属于广义函数，但仍可以当作普通函数一样进行运算，如计算微分和积分， 甚至应用于求解微分方程
- 可以为我们处理有关的数学物理问题，带来极大的便利

引言

介绍一种新的“函数”——δ函数

- 由物理学家Dirac引进
- 可用于描写物理学中的点量，例如点质量，点电荷，脉冲等
- 在近代物理学中有着广泛的应用
- 在数学上，δ 函数属于广义函数，但仍可以当作普通函数一样进行运算，如计算微分和积分， 甚至应用于求解微分方程
- 可以为我们处理有关的数学物理问题，带来极大的便利

引言

介绍一种新的“函数”——δ函数

- 由物理学家Dirac引进
- 可用于描写物理学中的点量，例如点质量，点电荷，脉冲等
- 在近代物理学中有着广泛的应用
- 在数学上，δ 函数属于广义函数，但仍可以当作普通函数一样进行运算，如计算微分和积分，甚至应用于求解微分方程
- 可以为我们处理有关的数学物理问题，带来极大的便利

引言

介绍一种新的“函数”——δ函数

- 由物理学家Dirac引进
- 可用于描写物理学中的点量，例如点质量，点电荷，脉冲等
- 在近代物理学中有着广泛的应用
- 在数学上, δ 函数属于广义函数，但仍可以当作普通函数一样进行运算，如计算微分和积分， 甚至应用于求解微分方程
- 可以为我们处理有关的数学物理问题, 带来极大的便利

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

- 作为δ函数的物理背景，先讨论点源、例如点电荷的电荷分布密度函数的数学表示
- 为简单起见，先讨论一维情形
- 设在无穷直线上$0 < x < l$区间内有均匀的电荷分布，总电荷量为1个单位，在区间外无电荷，则电荷密度函数为

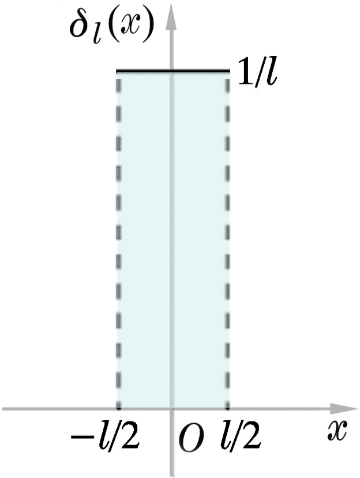
$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x < -l/2 \\ \dfrac{1}{l} & \text{当} -l/2 < x < l/2 \\ 0 & \text{当} x > l/2 \end{cases}$$

- 作为δ函数的物理背景，先讨论点源、例如点电荷的电荷分布密度函数的数学表示
- 为简单起见，先讨论一维情形
- 设在无穷直线上$0 < x < l$区间内有均匀的电荷分布，总电荷量为1个单位，在区间外无电荷，则电荷密度函数为

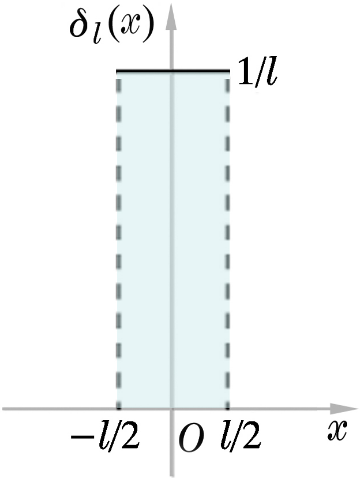
$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x < -l/2 \\ \dfrac{1}{l} & \text{当} -l/2 < x < l/2 \\ 0 & \text{当} x > l/2 \end{cases}$$

- 作为δ函数的物理背景，先讨论点源、例如点电荷的电荷分布密度函数的数学表示
- 为简单起见，先讨论一维情形
- 设在无穷直线上$0 < x < l$区间内有均匀的电荷分布，总电荷量为1个单位，在区间外无电荷， 则电荷密度函数为

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x < -l/2 \\ \dfrac{1}{l} & \text{当} -l/2 < x < l/2 \\ 0 & \text{当} x > l/2 \end{cases}$$



若令$l \to 0$，将得到什么结果?



若令$l \to 0$，将得到什么结果?

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x < -l/2 \\ \dfrac{1}{l} & \text{当} -l/2 < x < l/2 \\ 0 & \text{当} x > l/2 \end{cases}$$

$$\lim_{l\to 0} \delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x \neq 0 \\ \infty & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

若记 $\lim_{l\to 0} \delta_l(x) = \delta(x)$，$\delta(x)$有什么意义?

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x < -l/2 \\ \dfrac{1}{l} & \text{当} -l/2 < x < l/2 \\ 0 & \text{当} x > l/2 \end{cases}$$

$$\lim_{l\to 0} \delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x \neq 0 \\ \infty & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

若记 $\lim\limits_{l\to 0} \delta_l(x) = \delta(x)$，$\delta(x)$有什么意义?

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x < -l/2 \\ \dfrac{1}{l} & \text{当} -l/2 < x < l/2 \\ 0 & \text{当} x > l/2 \end{cases}$$

$$\lim_{l\to 0} \delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x \neq 0 \\ \infty & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

若记 $\lim_{l\to 0} \delta_l(x) = \delta(x)$，$\delta(x)$有什么意义？

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x < -l/2 \\ \dfrac{1}{l} & \text{当} -l/2 < x < l/2 \\ 0 & \text{当} x > l/2 \end{cases}$$

$$\lim_{l\to 0} \delta_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x \neq 0 \\ \infty & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

若记 $\lim\limits_{l\to 0} \delta_l(x) = \delta(x)$，$\delta(x)$有什么意义?

$\delta(x)$的意义

对于任意一个在$-l/2 < x < l/2$内连续的函数$f(x)$，根据中值定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(\theta l) \qquad -1/2 \le \theta \le 1/2$$

取极限$l \to 0$，对于任意一个在$x = 0$点连续的函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

特别是
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

$\delta(x)$的意义

对于任意一个在$-l/2 < x < l/2$内连续的函数$f(x)$，根据中值定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(\theta l) \qquad -1/2 \leq \theta \leq 1/2$$

取极限$l \to 0$，对于任意一个在$x = 0$点连续的函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

特别是
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

$\delta(x)$的意义

对于任意一个在$-l/2 < x < l/2$内连续的函数$f(x)$，根据中值定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(\theta l) \qquad -1/2 \le \theta \le 1/2$$

取极限$l \to 0$，对于任意一个在$x = 0$点连续的函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

特别是
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$才是$\delta$函数的定义
- 严格说来，$f(x)$应当满足：(1) 任意阶导数均存在，(2) 具有有限支集
- 积分限不一定是$\pm\infty$．只要$f(x)$的支集属于(a,b)，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

- δ函数属于广义函数(*generalized function*，或*distribution*)

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$才是$\delta$函数的定义
- 严格说来，$f(x)$应当满足：(1) 任意阶导数均存在，(2) 具有有限支集
- 积分限不一定是$\pm\infty$．只要$f(x)$的支集属于(a,b)，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

- δ函数属于广义函数(*generalized function*，或*distribution*)

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$才是$\delta$函数的定义

- 严格说来，$f(x)$应当满足：(1) 任意阶导数均存在，(2) 具有有限支集

- 积分限不一定是$\pm\infty$．只要$f(x)$的支集属于(a,b)，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

- δ函数属于广义函数(*generalized function*，或*distribution*)

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$才是$\delta$函数的定义
- 严格说来，$f(x)$应当满足：(1) 任意阶导数均存在，(2) 具有有限支集
- 积分限不一定是$\pm\infty$．只要$f(x)$的支集属于(a, b)，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

- *δ函数属于广义函数(generalized function，或distribution)*

- δ函数，并不是通常意义下的函数：它并没有给出函数与自变量之间的对应关系
- 它给出的对应关系

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x \neq 0 \\ \infty & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

在通常意义下是没有意义的

- 它所给出的“函数值”只是在积分运算中才有意义

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

- δ函数，并不是通常意义下的函数：它并没有给出函数与自变量之间的对应关系
- 它给出的对应关系

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x\neq 0\\ \infty & \text{当}x=0\end{cases}$$

在通常意义下是没有意义的

- 它所给出的“函数值”只是在积分运算中才有意义

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$$

- δ函数，并不是通常意义下的函数：它并没有给出函数与自变量之间的对应关系
- 它给出的对应关系

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{当} x \neq 0 \\ \infty & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

在通常意义下是没有意义的

- 它所给出的“函数值”只是在积分运算中才有意义

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

- δ函数也可以理解为(任意阶可微)函数序列的极限
- 凡是具有

$$\lim_{l\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

性质的函数序列$\delta_l(x)$，或是具有

$$\lim_{n\to \infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

性质的函数序列$\delta_n(x)$，它们的极限都是δ函数

- δ函数也可以理解为(任意阶可微)函数序列的极限
- 凡是具有

$$\lim_{l\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

性质的函数序列$\delta_l(x)$，或是具有

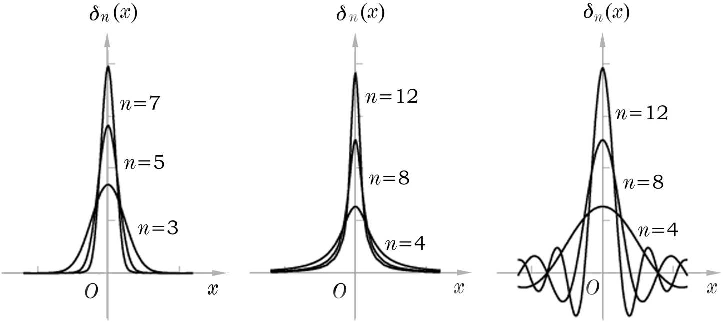
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

性质的函数序列$\delta_n(x)$，它们的极限都是δ函数

- 例如 $\delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$
- 又如 $\delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$
- 甚至有 $\delta(x)=\frac{\sin nx}{\pi x}$

- 例如 $\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$
- 又如 $\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$
- 甚至有 $\delta(x)=\frac{\sin nx}{\pi x}$

- 例如 $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$
- 又如 $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2}$
- 甚至有 $\delta(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$



(a) $\dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$ (b) $\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ (c) $\dfrac{\sin nx}{\pi x}$

δ函数的逼近序列举例

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

δ函数的基本运算规则

引进δ函数的目的，即在于简化对函数序列进行微积分计算、而后取极限的过程

由于函数序列是由具有足够好的连续性质的函数组成的，所以，在计算中可以把δ函数当作(任意阶)连续可微的函数处理

δ函数的基本运算规则

引进δ函数的目的，即在于简化对函数序列进行微积分计算、而后取极限的过程

由于函数序列是由具有足够好的连续性质的函数组成的，所以，在计算中可以把δ函数当作(任意阶) 连续可微的函数处理

δ函数的基本运算规则

❶ δ函数和常数c的乘积，$c\delta(x)$：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) c\delta(x) \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)\delta(x)\mathrm{d}x \\ &= cf(0)\end{aligned}$$

❷ 平移变换，$x \longrightarrow x-a$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)\delta(t)\mathrm{d}t = f(a)$$

δ函数的基本运算规则

❶ δ函数和常数c的乘积，$c\delta(x)$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)c\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)\delta(x)\mathrm{d}x = cf(0)$$

❷ 平移变换，$x \to x-a$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)\delta(t)\mathrm{d}t = f(a)$$

δ函数的基本运算规则

❸ 放大(或缩小)，$x \to \alpha x$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t/\alpha)\delta(t)\frac{\mathrm{d}t}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}f(0)$$

这意味着 $$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

特别是$\alpha = -1$，

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

δ函数的基本运算规则

❸ 放大(或缩小)，$x \to \alpha x$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t/\alpha)\delta(t)\frac{\mathrm{d}t}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}f(0)$$

这意味着
$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

特别是$\alpha = -1$，

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

δ函数的基本运算规则

❸ 放大(或缩小)，$x \to \alpha x$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t/\alpha)\delta(t)\frac{\mathrm{d}t}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}f(0)$$

这意味着
$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

特别是$\alpha = -1$，

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

δ函数的基本运算规则

❹ δ函数的导数$\delta'(x)$： 对于在$x=0$点连续并有连续导数的任意函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x = f(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$
$$= -f'(0)$$

这里就把δ函数当作普通的连续函数一样进行分部积分

δ函数的基本运算规则

❹ δ函数的导数$\delta'(x)$： 对于在$x=0$点连续并有连续导数的任意函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x = f(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$
$$= -f'(0)$$

这里就把δ函数当作普通的连续函数一样进行分部积分

δ函数的基本运算规则

5. δ函数的高阶导数$\delta^{(n)}(x)$： 对于在$x=0$点连续并有n阶连续导数的任意$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x = (-)^n f^{(n)}(0)$$

δ函数的基本运算规则

❻ δ函数与普通函数的乘积，$g(x)\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(0)g(0) \qquad \text{（条件？）}$$

即 $\qquad f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$

例如 $\qquad x\delta(x) = 0$

δ函数的基本运算规则

❻ δ函数与普通函数的乘积，$g(x)\delta(x)$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$
$$= f(0)g(0) \qquad （条件？）$$

即 $$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

例如 $$x\delta(x) = 0$$

δ函数的基本运算规则

❻ δ函数与普通函数的乘积，$g(x)\delta(x)$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$
$$= f(0)g(0) \qquad \text{（条件？）}$$

即 $$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

例如 $$x\delta(x) = 0$$

δ函数的基本运算规则

7 δ函数还可以表示成初等函数的微商

由于

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x=\eta(x)$$

因此

$$\delta(x)=\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}$$

δ函数的基本运算规则

❼ δ函数还可以表示成初等函数的微商

由于

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\mathrm{d}x = \eta(x)$$

因此

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}$$

δ函数的基本运算规则

7 δ函数还可以表示成初等函数的微商

由于

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x=\eta(x)$$

因此

$$\delta(x)=\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}$$

δ函数的基本运算规则

❽ 也可以对δ函数作Laplace变换

$$\delta(t-t_0) \risingdotseq \int_0^\infty \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-pt_0}, \qquad t_0 > 0$$

❾ δ函数也可以表示成初等函数的Fourier积分

因为$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 1$，所以，根据Fourier变换的反演公式，有

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

δ函数的基本运算规则

❽ 也可以对δ函数作Laplace变换

$$\delta(t-t_0) \risingdotseq \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-pt_0}, \qquad t_0 > 0$$

❾ δ函数也可以表示成初等函数的Fourier积分

因为 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 1$，所以，根据Fourier变换的反演公式，有

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

δ函数的基本运算规则

❽ 也可以对δ函数作Laplace变换

$$\delta(t-t_0) \risingdotseq \int_0^\infty \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-pt_0}, \qquad t_0 > 0$$

❾ δ函数也可以表示成初等函数的Fourier积分

因为$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 1$，所以，根据Fourier变换的反演公式，有

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

δ函数的基本运算规则

❽ 也可以对δ函数作Laplace变换

$$\delta(t-t_0) \risingdotseq \int_0^\infty \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-pt_0}, \qquad t_0 > 0$$

❾ δ函数也可以表示成初等函数的Fourier积分

因为$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 1$，所以，根据Fourier变换的反演公式，有

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

δ函数的基本运算规则

Remarks

- 有关δ函数的等式，均应从积分意义下去理解
- 对于δ函数的运算，总是(根据连续函数的相应运算)设法转移到“普通函数$f(x)$”上去
- 例如对于$x\delta(x)=0$，就应理解为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)\mathrm{d}x=0$$

δ函数的基本运算规则

Remarks

- 有关δ函数的等式，均应从积分意义下去理解
- 对于δ函数的运算，总是(根据连续函数的相应运算)设法转移到"普通函数$f(x)$"上去
- 例如对于$x\delta(x)=0$，就应理解为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)\mathrm{d}x=0$$

δ函数的基本运算规则

Remarks

- 有关δ函数的等式，均应从积分意义下去理解
- 对于δ函数的运算，总是(根据连续函数的相应运算)设法转移到“普通函数$f(x)$”上去
- 例如对于$x\delta(x)=0$，就应理解为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)\mathrm{d}x = 0$$

例15.1

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分 $F(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin \lambda x}{x}\mathrm{d}x$
- 显然有 $F'(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=2\pi\delta(\lambda)$
- 所以 $F(\lambda)=2\pi\eta(\lambda)+C$，$C$ 为积分常数

例15.1

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分$\displaystyle F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$
- 显然有$\displaystyle F'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\mathrm{d}x=2\pi\delta(\lambda)$
- 所以$F(\lambda)=2\pi\eta(\lambda)+C$，$C$为积分常数

例15.1

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分$F(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$
- 显然有$F'(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\mathrm{d}x=2\pi\delta(\lambda)$
- 所以$F(\lambda)=2\pi\eta(\lambda)+C$，$C$为积分常数

例15.1

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分 $F(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$
- 显然有 $F'(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\mathrm{d}x=2\pi\delta(\lambda)$
- 所以 $F(\lambda)=2\pi\eta(\lambda)+C$，$C$ 为积分常数

例15.1

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- 因为$F(\lambda)$是λ的奇函数，$F(-\lambda)=-F(\lambda)$，由此即可定出$C=-\pi$
- 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=F(1)=\pi$$

例15.1

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- 因为$F(\lambda)$是λ的奇函数，$F(-\lambda)=-F(\lambda)$，由此即可定出$C=-\pi$

- 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=F(1)=\pi$$

例15.2

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分 $F(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$
- 显然

$$F'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}x}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$F''(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^2}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

- 所以 $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$

例15.2

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分 $F(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$
- 显然
$$F'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}x}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$
$$F''(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^2}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$
- 所以 $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分$F(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$
- 显然

$$F'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}x}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$F''(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^2}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

- 所以 $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- 考虑辅助积分$F(\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$
- 显然

$$F'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}x}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$F''(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^2}{x^2+x+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

- 所以 $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$

例15.2

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$是一个特殊的二阶常微分方程：其非齐次项含有$\delta$函数
- 特殊性表现在两方面：
  (1) 当$\lambda\neq 0$时，$\delta(\lambda)=0$，方程是齐次的
  (2) 当$\lambda=0$时，$F(\lambda)$连续

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[F(0-\varepsilon)-F(0+\varepsilon)\right]=0$$

但$F'(\lambda)$不连续

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$是一个特殊的二阶常微分方程： 其非齐次项含有$\delta$函数
- 特殊性表现在两方面：
  (1) 当$\lambda\neq 0$时，$\delta(\lambda)=0$，方程是齐次的
  (2) 当$\lambda=0$时，$F(\lambda)$连续

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[F(0-\varepsilon)-F(0+\varepsilon)\right]=0$$

但$F'(\lambda)$不连续

例15.2

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F'(\lambda)$的不连续性，即$F'(\lambda)$在 $\lambda = 0$点的左右极限存在但不相等，恰好反映了二阶微分方程 $-F''(\lambda) - \mathrm{i}F'(\lambda) + F(\lambda) = 2\pi\delta(\lambda)$的非齐次项为$\delta$函数
- 为了定量描述$F'(\lambda)$在$\lambda = 0$点不连续性，可以将上述微分方程积分，于是就有
$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \left[F''(\lambda) + \mathrm{i}F'(\lambda) - F(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda = -2\pi$$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F'(\lambda)$的不连续性，即$F'(\lambda)$在 $\lambda=0$点的左右极限存在但不相等，恰好反映了二阶微分方程 $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$的非齐次项为$\delta$函数
- 为了定量描述$F'(\lambda)$在$\lambda=0$点不连续性，可以将上述微分方程积分，于是就有

$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}\left[F''(\lambda)+\mathrm{i}F'(\lambda)-F(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda=-2\pi$$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- 为了定量描述$F'(\lambda)$在$\lambda=0$点不连续性，可以将上述微分方程积分，于是就有

$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}\Big[F''(\lambda)+\mathrm{i}F'(\lambda)-F(\lambda)\Big]\mathrm{d}\lambda=-2\pi$$

- 因$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续，故当$\varepsilon\to+0$时，上式左端第二项和第三项的积分均趋于0

$$\lim_{\varepsilon\to+0}F'(\lambda)\Big|_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}=F'(\lambda)\Big|_{0-}^{0+}=-2\pi$$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $\lambda\neq 0$时 $-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$的解为

$$F(\lambda)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+B\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda>0\\ C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+D\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda<0\end{cases}$$

例15.2

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F(\lambda)=\begin{cases} A\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+B\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda>0 \\ C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+D\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda<0 \end{cases}$
- 因为$F(\lambda)$有界，A和D必为0
- 又因为$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续，$B=C$

$$F(\lambda)=\begin{cases} C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda>0 \\ C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda<0 \end{cases}$$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F(\lambda)=\begin{cases} A\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+B\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda>0 \\ C\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+D\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda<0 \end{cases}$
- 因为$F(\lambda)$有界，A和D必为0
- 又因为$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续，$B=C$

$$F(\lambda)=\begin{cases} C\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda>0 \\ C\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda<0 \end{cases}$$

例15.2

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F(\lambda)=\begin{cases} A\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+B\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda>0 \\ C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+D\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda<0 \end{cases}$
- 因为$F(\lambda)$有界，A和D必为0
- 又因为$F(\lambda)$在$\lambda=0$点连续，$B=C$

$$F(\lambda)=\begin{cases} C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda>0 \\ C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}} & \lambda<0 \end{cases}$$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F'(\lambda)\Big|_{0-}^{0+}=-2\pi \quad\Rightarrow\quad B=C=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$
- $F(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2} & \lambda>0\\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2} & \lambda<0\end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\,F(2)=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}\sin 1$

例15.2

计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F'(\lambda)\Big|_{0-}^{0+} = -2\pi \quad\Rightarrow\quad B = C = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$
- $F(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2} & \lambda > 0 \\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2} & \lambda < 0 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\,F(2) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}\sin 1$

例15.2

计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

- $F'(\lambda)\Big|_{0-}^{0+} = -2\pi \quad\Rightarrow\quad B = C = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$
- $F(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2} & \lambda > 0 \\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2} & \lambda < 0 \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\,F(2) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}\sin 1$

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

- 在平面上(x_0, y_0)点处有一个单位点电荷，密度分布函数就是$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$
- 换到平面极坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$$

- 如何确定常数c？

$$\iint \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 1$$

- $c=\dfrac{1}{r_0} \Rightarrow \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\dfrac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$

- 在平面上(x_0, y_0)点处有一个单位点电荷，密度分布函数就是$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$
- 换到平面极坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$$

- 如何确定常数c？

$$\iint \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 1$$

- $c = \dfrac{1}{r_0} \Rightarrow \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \dfrac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$

- 在平面上(x_0, y_0)点处有一个单位点电荷，密度分布函数就是$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$
- 换到平面极坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$$

- 如何确定常数c？

$$\iint \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 1$$

- $c = \dfrac{1}{r_0} \Rightarrow \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \dfrac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$

- 在平面上(x_0, y_0)点处有一个单位点电荷，密度分布函数就是$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$
- 换到平面极坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$$

- 如何确定常数c？

$$\iint \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 1$$

- $c = \dfrac{1}{r_0} \Rightarrow \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \dfrac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$

- 三维空间(x_0, y_0, z_0)处有一个单位点电荷，密度分布函数就是 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$

- 换到柱坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \frac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0)$$

- 换到球坐标系?

- 三维空间(x_0, y_0, z_0)处有一个单位点电荷，密度分布函数就是 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$
- 换到柱坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \frac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0)$$

- 换到球坐标系？

- 三维空间(x_0, y_0, z_0)处有一个单位点电荷，密度分布函数就是 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$
- 换到柱坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \\ = \frac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0)$$

- 换到球坐标系?

- 换到球坐标系

$$\begin{aligned}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\ = c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)\end{aligned}$$

- 确定常数c:

$$\begin{aligned}&\iiint\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= c\iiint\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\ &= cr_0^2\sin\theta_0 = 1\end{aligned}$$

- $c = 1/r_0^2\sin\theta_0$

- 换到球坐标系

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)$$

- 确定常数c:

$$\iiint \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= c\iiint \delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$= cr_0^2\sin\theta_0 = 1$$

- $c = 1/r_0^2\sin\theta_0$

- 换到球坐标系

$$\begin{aligned}&\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\&\qquad=c\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)\end{aligned}$$

- 确定常数c:

$$\begin{aligned}&\iiint\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\quad=c\iiint\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\&\quad=cr_0^2\sin\theta_0=1\end{aligned}$$

- $c=1/r_0^2\sin\theta_0$

例15.3

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

- 能否直接将$1/r$微商?
- 在$r \neq 0$处可以微商，直接证明等式成立
- 在$r = 0$点不可导
- 这不是普通函数的等式，而是广义函数的等式

例15.3

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

- 能否直接将$1/r$微商?
- 在$r \neq 0$处可以微商，直接证明等式成立
- 在$r = 0$点不可导
- 这不是普通函数的等式，而是广义函数的等式

例15.3

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

- 能否直接将$1/r$微商?
- 在$r \neq 0$处可以微商，直接证明等式成立
- 在$r = 0$点不可导
- 这不是普通函数的等式，而是广义函数的等式

例15.3

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

- 能否直接将$1/r$微商?
- 在$r \neq 0$处可以微商，直接证明等式成立
- 在$r = 0$点不可导
- 这不是普通函数的等式，而是广义函数的等式

例15.3

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

- 能否直接将$1/r$微商?
- 在$r \neq 0$处可以微商，直接证明等式成立
- 在$r = 0$点不可导
- 这不是普通函数的等式，而是广义函数的等式

例15.3

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

- 等价于求证

$$\iiint\limits_V \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{当}\boldsymbol{r}=0\notin V \\ -4\pi & \text{当}\boldsymbol{r}=0\in V \end{cases}$$

- 下面分别讨论体积V不包含或包含$r=0$点在内的两种情形

例15.3

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

- 等价于求证

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{当}\boldsymbol{r} = 0 \notin V \\ -4\pi & \text{当}\boldsymbol{r} = 0 \in V \end{cases}$$

- 下面分别讨论体积V不包含或包含$r=0$点在内的两种情形

例15.3 证明$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

- 在$r \neq 0$点

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

- $$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

- 因此证得

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \quad r \neq 0$$

例15.3 证明$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

- 在$r\neq 0$点

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

- $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

- 因此证得

$$\nabla^2\frac{1}{r}=0 \quad r\neq 0$$

例15.3 证明$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

- 在$r \neq 0$点

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

- $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

- 因此证得

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \quad r \neq 0$$

例15.3 证明$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

体积V包含$r=0$点，不妨取为全空间

$$\iiint \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{a\to 0}\iiint \nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -\lim_{a\to 0}\iiint \frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$= -12\pi\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r$$

令$r=a\tan\theta$，即可证明积分与a无关

例15.3　证明$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

体积V包含$r=0$点，不妨取为全空间

$$\iiint\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{a\to0}\iiint\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\lim_{a\to0}\iiint\frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$=-12\pi\lim_{a\to0}\int_0^\infty\frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r$$

令$r=a\tan\theta$，即可证明积分与a无关

例15.3　证明$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

体积V包含$r=0$点，不妨取为全空间

$$\iiint \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{a\to 0}\iiint \nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -\lim_{a\to 0}\iiint \frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$= -12\pi\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}\frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\mathrm{d}r$$

令$r = a\tan\theta$，即可证明积分与a无关

例15.3 证明$\nabla^2\dfrac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

体积V包含$r=0$点，不妨取为全空间

$$\iiint \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{a\to 0} \iiint \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -\lim_{a\to 0} \iiint \frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$= -12\pi \lim_{a\to 0} \int_0^\infty \frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} r^2 \mathrm{d}r$$

令$r = a\tan\theta$，即可证明积分与a无关

例15.3 证明$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

$$\iiint \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -12\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$= -12\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= -12\pi\cdot\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -4\pi \quad \square$$

例15.3 证明$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

$$\iiint \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -12\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \mathrm{d}\theta$$

$$= -12\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= -12\pi \cdot \frac{1}{3}\sin^3\theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -4\pi \quad \square$$

例15.3　证明$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

$$\iiint\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-12\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-12\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-12\pi\cdot\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=-4\pi\qquad\square$$

例15.3 证明$\nabla^2\dfrac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

$$\iiint\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-12\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-12\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-12\pi\cdot\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=-4\pi\quad\square$$

Remarks

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

严格说来，应当证明

$$\iiint f(\boldsymbol{r})\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -4\pi f(0)$$

对于“任意函数”$f(\boldsymbol{r}) \equiv f(x,y,z)$均成立

Remarks

证明

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

其中$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

严格说来，应当证明

$$\iiint f(\boldsymbol{r})\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -4\pi f(0)$$

对于“任意函数”$f(\boldsymbol{r}) \equiv f(x,y,z)$均成立

常微分方程的Green函数问题

$$\begin{cases} \text{非齐次项为}\delta\text{函数的常微分方程} \\ \text{齐次定解条件} \end{cases}$$

举例

在上面的例15.2中

$$-F''(\lambda) - \mathrm{i}F'(\lambda) + F(\lambda) = 2\pi\delta(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} F(\lambda)\text{有界}$$

常微分方程的Green函数问题

$$\begin{cases}\text{非齐次项为}\delta\text{函数的常微分方程}\\ \text{齐次定解条件}\end{cases}$$

举例

在上面的例15.2中

$$-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}F(\lambda)\text{有界}$$

Remarks

在传统的意义下，这类常微分方程没有意义

- 正像δ函数应当理解为连续函数序列$\{\delta_n(x)\}$的极限一样，非齐次项为δ函数的微分方程也应当解为非齐次项为 $\delta_n(x)$的微分方程的极限
- 非齐次项为δ函数的微分方程的解也应当理解为非齐次项为$\delta_n(x)$的微分方程的解的极限(先解微分方程再取极限)
- 引进δ函数的好处就在于可以直接处理这种极限情形的微分方程求解问题，而不必考虑具体的函数序列以及它的极限过程

Remarks

在传统的意义下，这类常微分方程没有意义

- 正像δ函数应当理解为连续函数序列$\{\delta_n(x)\}$的极限一样，非齐次项为δ函数的微分方程也应当解为非齐次项为 $\delta_n(x)$的微分方程的极限
- 非齐次项为δ函数的微分方程的解也应当理解为非齐次项为$\delta_n(x)$的微分方程的解的极限(先解微分方程再取极限)
- 引进δ函数的好处就在于可以直接处理这种极限情形的微分方程求解问题，而不必考虑具体的函数序列以及它的极限过程

Remarks

在传统的意义下，这类常微分方程没有意义

- 正像δ函数应当理解为连续函数序列$\{\delta_n(x)\}$的极限一样，非齐次项为δ函数的微分方程也应当解为非齐次项为 $\delta_n(x)$的微分方程的极限
- 非齐次项为δ函数的微分方程的解也应当理解为非齐次项为$\delta_n(x)$的微分方程的解的极限(先解微分方程再取极限)
- 引进δ函数的好处就在于可以直接处理这种极限情形的微分方程求解问题，而不必考虑具体的函数序列以及它的极限过程

Remarks

在传统的意义下，这类常微分方程没有意义

- 正像δ函数应当理解为连续函数序列$\{\delta_n(x)\}$的极限一样，非齐次项为δ函数的微分方程也应当解为非齐次项为 $\delta_n(x)$的微分方程的极限
- 非齐次项为δ函数的微分方程的解也应当理解为非齐次项为$\delta_n(x)$的微分方程的解的极限(先解微分方程再取极限)
- 引进δ函数的好处就在于可以直接处理这种极限情形的微分方程求解问题，而不必考虑具体的函数序列以及它的极限过程

Remarks

正因为δ函数不是传统意义下的函数，这使得非齐次项为δ函数的微分方程的解具有独特的连续性质

- 就二阶常微分方程而言，我们将要看到，它的解是连续的，但是解的一阶导数不连续
- 正是由于一阶导数的不连续，才使得它正好是非齐次项为δ函数的常微分方程的解

Remarks

正因为δ函数不是传统意义下的函数，这使得非齐次项为δ函数的微分方程的解具有独特的连续性质

- 就二阶常微分方程而言，我们将要看到，它的解是连续的，但是解的一阶导数不连续
- 正是由于一阶导数的不连续，才使得它正好是非齐次项为δ函数的常微分方程的解

Remarks

正因为δ函数不是传统意义下的函数，这使得非齐次项为δ函数的微分方程的解具有独特的连续性质

- 就二阶常微分方程而言，我们将要看到，它的解是连续的，但是解的一阶导数不连续
- 正是由于一阶导数的不连续，才使得它正好是非齐次项为δ函数的常微分方程的解

Remarks

常微分方程的非齐次项为δ函数，这是一种特殊的非齐次方程

- 除了在使δ函数的宗量为零的个别点外，方程是齐次的
- 使得这种非齐次常微分方程又很容易求解
- 特殊情形下甚至可以直接积分而求得方程的通解
- 潜在的应用前景

Remarks

常微分方程的非齐次项为δ函数，这是一种特殊的非齐次方程

- 除了在使δ函数的宗量为零的个别点外，方程是齐次的
- 使得这种非齐次常微分方程又很容易求解
- 特殊情形下甚至可以直接积分而求得方程的通解
- 潜在的应用前景

Remarks

常微分方程的非齐次项为δ函数，这是一种特殊的非齐次方程

- 除了在使δ函数的宗量为零的个别点外，方程是齐次的
- 使得这种非齐次常微分方程又很容易求解
- 特殊情形下甚至可以直接积分而求得方程的通解
- 潜在的应用前景

Remarks

常微分方程的非齐次项为δ函数，这是一种特殊的非齐次方程

- 除了在使δ函数的宗量为零的个别点外，方程是齐次的
- 使得这种非齐次常微分方程又很容易求解
- 特殊情形下甚至可以直接积分而求得方程的通解
- 潜在的应用前景

Remarks

常微分方程的非齐次项为δ函数，这是一种特殊的非齐次方程

- 除了在使δ函数的宗量为零的个别点外，方程是齐次的
- 使得这种非齐次常微分方程又很容易求解
- 特殊情形下甚至可以直接积分而求得方程的通解
- 潜在的应用前景

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

例15.4 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

直接积分 $\quad \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \eta(x-t) + \alpha(t)$

再积分一次 $\quad g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(t) = 0$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t)$$

例15.4 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

直接积分 $$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \eta(x-t) + \alpha(t)$$

再积分一次 $$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = 0$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t)$$

例15.4　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

直接积分　$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \eta(x-t) + \alpha(t)$$

再积分一次　$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(t) = 0$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t)$$

例15.4　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

直接积分　$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \eta(x-t) + \alpha(t)$$

再积分一次　$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(t) = 0$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t)$$

例15.4 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

直接积分 $$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \eta(x-t) + \alpha(t)$$

再积分一次 $$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(t) = 0$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t)$$

例15.4 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

直接积分 $$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \eta(x-t) + \alpha(t)$$

再积分一次 $$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta(t) = 0$$

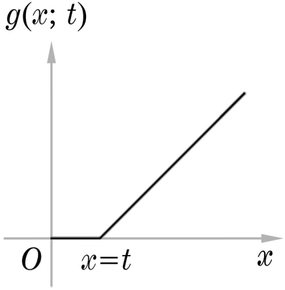
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(t) = 0$$

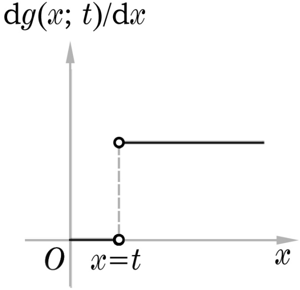
$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t)$$

例15.4　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$





$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t)$$

例15.4的应用

设有常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f(x)\qquad x>0$$
$$y(0)=0\qquad y'(0)=0$$

因为 $$f(x)=\int_0^\infty f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t$$

故根据线性常微分方程解的叠加性，有(形式)解

$$y(x)=\int_0^\infty g(x;t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

例15.4的应用

设有常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \qquad x > 0$$
$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

因为 $$f(x) = \int_0^\infty f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t$$

故根据线性常微分方程解的叠加性，有(形式)解

$$y(x) = \int_0^\infty g(x;t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

例15.4的应用

设有常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \qquad x > 0$$
$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

因为 $\quad f(x) = \int_0^{\infty} f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t$

故根据线性常微分方程解的叠加性，有(形式)解

$$y(x) = \int_0^{\infty} g(x;t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x} (x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0$$

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

- 能否直接写出非齐次常微分方程的通解?
- 当$x \neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间$(0,t)$内既满足齐次方程、又满足齐次初始条件的解…………………一定为零解
- 写出区间(t,∞)内齐次微分方程的解
- 由$x=t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.5 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

- 能否直接写出非齐次常微分方程的通解?
- 当$x \neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间$(0,t)$内既满足齐次方程、又满足齐次初始条件的解……………………一定为零解
- 写出区间(t,∞)内齐次微分方程的解
- 由$x = t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

- 能否直接写出非齐次常微分方程的通解?
- 当$x \neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间$(0,t)$内既满足齐次方程、又满足齐次初始条件的解……………………一定为零解
- 写出区间(t,∞)内齐次微分方程的解
- 由$x=t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.5 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

- 能否直接写出非齐次常微分方程的通解?
- 当$x \neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间$(0,t)$内既满足齐次方程、又满足齐次初始条件的解…………………一定为零解
- 写出区间(t,∞)内齐次微分方程的解
- 由$x=t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0$$

- 能否直接写出非齐次常微分方程的通解?
- 当$x\neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间$(0,t)$内既满足齐次方程、又满足齐次初始条件的解…………………一定为零解
- 写出区间(t,∞)内齐次微分方程的解
- 由$x=t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

区间$(0,t)$内

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g = 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

在$x=t$点

$$g(x;t)\Big|_{t-0}^{t+0} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{t-0}^{t+0} = 1$$

区间(t,∞)

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g = 0$$

例15.5 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

$$g(x;t) = \Big[C(t)\sin kx + D(t)\cos kx\Big]\eta(x-t)$$

$$g(x;t)\text{连续} \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{t-0}^{t+0} = 1$$

$$C(t) = \frac{1}{k}\cos kt \qquad D(t) = -\frac{1}{k}\sin kt$$

$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{dg}{dx}\Big|_{x=0} = 0$$

$$g(x;t) = \Big[C(t)\sin kx + D(t)\cos kx\Big]\eta(x-t)$$

$$g(x;t)\text{连续} \qquad \frac{dg(x;t)}{dx}\Bigg|_{t-0}^{t+0} = 1$$

$$C(t) = \frac{1}{k}\cos kt \qquad D(t) = -\frac{1}{k}\sin kt$$

$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

例15.5 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0$$

$$g(x;t)=\Big[C(t)\sin kx+D(t)\cos kx\Big]\eta(x-t)$$

$$g(x;t)\text{连续} \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\Big|_{t-0}^{t+0}=1$$

$$C(t)=\frac{1}{k}\cos kt \qquad D(t)=-\frac{1}{k}\sin kt$$

$$g(x;t)=\frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

$$g(x;t) = \Big[C(t)\sin kx + D(t)\cos kx\Big]\eta(x-t)$$

$$g(x;t)\text{连续} \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\Big|_{t-0}^{t+0} = 1$$

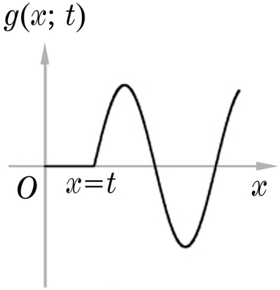
$$C(t) = \frac{1}{k}\cos kt \qquad D(t) = -\frac{1}{k}\sin kt$$

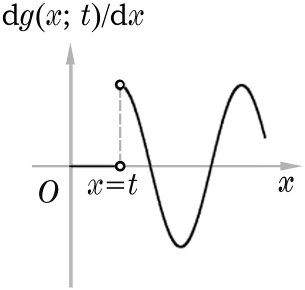
$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

例15.5 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x, t > 0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$





$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0$$

$$g(x;t)=\frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

思考题：现在能否写出非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t) \qquad x,t>0$$

的通解？

例15.5　求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x,t>0$$

$$g\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0$$

$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

思考题：现在能否写出非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad x,t>0$$

的通解？

也能将例15.5的解用于求解非齐次方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y(x) = f(x) \qquad x > 0$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t$$

也能将例15.5的解用于求解非齐次方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y(x) = f(x) \qquad x > 0$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t$$

Remarks

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)\quad x,t>0$$

$$g(0;t)=0\qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

且相应的齐次微分方程无奇点

- $g(x;t)$在$x<t$时一定为0
- $g(x;t)$在$x=t$点一定连续
- $\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0}=\frac{1}{p(t)}$

Remarks

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t) \quad x,t>0$$

$$g(0;t)=0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

且相应的齐次微分方程无奇点

- $g(x;t)$在$x<t$时一定为0
- $g(x;t)$在$x=t$点一定连续
- $\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0}=\frac{1}{p(t)}$

Remarks

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)\quad x,t>0$$

$$g(0;t)=0\qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

且相应的齐次微分方程无奇点

- $g(x;t)$在$x<t$时一定为0
- $g(x;t)$在$x=t$点一定连续
- $\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0}=\frac{1}{p(t)}$

Remarks

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t) \quad x,t>0$$

$$g(0;t)=0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

且相应的齐次微分方程无奇点

- $g(x;t)$在$x<t$时一定为0
- $g(x;t)$在$x=t$点一定连续
- $\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0}=\frac{1}{p(t)}$

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

例15.6　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

微分方程与例15.4相同，故有相同的通解

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$a\alpha(t) + \beta(t) = 0 \qquad b - t + b\alpha(t) + \beta(t) = 0$$

$$\alpha(t) = -\frac{b-t}{b-a} \qquad \beta(t) = \frac{a(b-t)}{b-a}$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) - \frac{b-t}{b-a}(x-a)$$

例15.6　求解常微分方程边值问题

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

微分方程与例15.4相同，故有相同的通解

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$a\alpha(t) + \beta(t) = 0 \qquad b - t + b\alpha(t) + \beta(t) = 0$$

$$\alpha(t) = -\frac{b-t}{b-a} \qquad \beta(t) = \frac{a(b-t)}{b-a}$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) - \frac{b-t}{b-a}(x-a)$$

例15.6　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$
$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

微分方程与例15.4相同，故有相同的通解

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$a\alpha(t) + \beta(t) = 0 \qquad b - t + b\alpha(t) + \beta(t) = 0$$

$$\alpha(t) = -\frac{b-t}{b-a} \qquad \beta(t) = \frac{a(b-t)}{b-a}$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) - \frac{b-t}{b-a}(x-a)$$

例15.6 求解常微分方程边值问题

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$
$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

微分方程与例15.4相同，故有相同的通解

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$a\alpha(t) + \beta(t) = 0 \qquad b - t + b\alpha(t) + \beta(t) = 0$$

$$\alpha(t) = -\frac{b-t}{b-a} \qquad \beta(t) = \frac{a(b-t)}{b-a}$$

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) - \frac{b-t}{b-a}(x-a)$$

例15.6　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

微分方程与例15.4相同，故有相同的通解

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t)$$

$$a\alpha(t) + \beta(t) = 0 \qquad b - t + b\alpha(t) + \beta(t) = 0$$

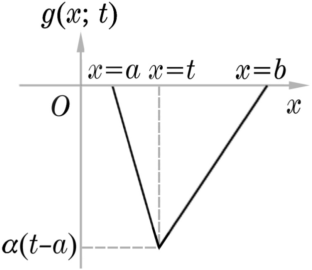
$$\alpha(t) = -\frac{b-t}{b-a} \qquad \beta(t) = \frac{a(b-t)}{b-a}$$

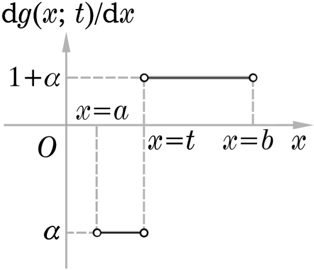
$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) - \frac{b-t}{b-a}(x-a)$$

例15.6 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$





$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) - \frac{b-t}{b-a}(x-a)$$

例15.6　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

问题

本题中的Green函数$g(x;t)$是否仍满足

$g(x;t)$在$x=t$点连续

$\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}$在$x=t$点不连续　　$\left.\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0} = 1$

例15.7 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

解法1 （梗概）

- 例15.5提供了（非齐次）微分方程的特解
- 因此可以写出非齐次常微分方程的通解

$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t) + A(t)\sin kx + B(t)\cos kx$$

- 再代入边界条件，即可定出叠加常数

例15.7 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

解法1 （梗概）

- 例15.5提供了(非齐次)微分方程的特解
- 因此可以写出非齐次常微分方程的通解

$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t) + A(t)\sin kx + B(t)\cos kx$$

- 再代入边界条件，即可定出叠加常数

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$
$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

解法1　(梗概)

- 例15.5提供了(非齐次)微分方程的特解
- 因此可以写出非齐次常微分方程的通解

$$g(x;t) = \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t) + A(t)\sin kx + B(t)\cos kx$$

- 再代入边界条件，即可定出叠加常数

例15.7 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

解法1 （梗概）

- 例15.5提供了(非齐次)微分方程的特解
- 因此可以写出非齐次常微分方程的通解

$$\begin{aligned} g(x;t) = & \frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t) \\ & + A(t)\sin kx + B(t)\cos kx \end{aligned}$$

- 再代入边界条件，即可定出叠加常数

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

解法2

- 当$x \neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件的解
- 求出区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件的解
- 由$x=t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.7 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

解法2

- 当$x \neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间(a, t)内既满足齐次方程、又满足$x = a$端齐次边界条件的解
- 求出区间(t, b)内既满足齐次方程、又满足$x = b$端齐次边界条件的解
- 由$x = t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t)\qquad a<x,t<b$$
$$g(a;t)=0\qquad g(b;t)=0$$

解法2

- 当$x\neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件的解
- 求出区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件的解
- 由$x=t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t) \qquad a<x,t<b$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

解法2

- 当$x\neq t$时，方程的非齐次项为0
- 求出区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件的解
- 求出区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件的解
- 由$x=t$点处的连续性的要求定出Green函数

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

区间(a,t)内

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g = 0$$

$$g(a;t) = 0$$

在$x = t$点

$$g(x;t)\Big|_{t-0}^{t+0} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{t-0}^{t+0} = 1$$

区间(t,b)

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g = 0$$

$$g(b;t) = 0$$

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

区间(a,t)内　　$g(x;t) = A(t)\sin k(x-a)$

区间(t,b)内　　$g(x;t) = B(t)\sin k(b-x)$

在$x=t$点

$$g(x;t)\Big|_{t-0}^{t+0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{t-0}^{t+0} = 1$$

$$A(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}$$

$$B(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)}$$

例15.7 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

区间(a,t)内 $\qquad g(x;t) = A(t)\sin k(x-a)$

区间(t,b)内 $\qquad g(x;t) = B(t)\sin k(b-x)$

在$x=t$点

$$g(x;t)\Big|_{t-0}^{t+0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{t-0}^{t+0} = 1$$

$$A(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}$$

$$B(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)}$$

例15.7 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

区间(a,t)内 $\quad g(x;t) = A(t)\sin k(x-a)$

区间(t,b)内 $\quad g(x;t) = B(t)\sin k(b-x)$

在$x=t$点

$$g(x;t)\Big|_{t-0}^{t+0} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{t-0}^{t+0} = 1$$

$$A(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}$$

$$B(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)}$$

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t) \qquad a < x, t < b$$

$$g(a;t) = 0 \qquad g(b;t) = 0$$

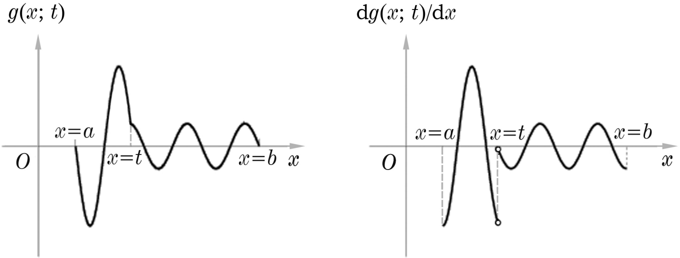
区间(a,t)内　　$g(x;t) = A(t)\sin k(x-a)$

区间(t,b)内　　$g(x;t) = B(t)\sin k(b-x)$

$$g(x;t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{k}\dfrac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}\sin k(x-a) & a < x < t \\ -\dfrac{1}{k}\dfrac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)}\sin k(b-x) & t < x < b \end{cases}$$

例15.7　求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}+k^2 g(x;t)=\delta(x-t)\qquad a<x,t<b$$
$$g(a;t)=0\qquad g(b;t)=0$$



$$g(x;t)=\frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)-\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}\sin k(x-a)$$

思考题

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

其中$a<x,t<b$，且相应的齐次微分方程无奇点

- 设相应齐次方程有线性无关解$y_1(x)$, $y_2(x)$
- 区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件$g(a;t)=0$的解?
- 区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件$g(b;t)=0$的解?

思考题

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

其中$a<x,t<b$，且相应的齐次微分方程无奇点

- 设相应齐次方程有线性无关解$y_1(x)$, $y_2(x)$
- 区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件$g(a;t)=0$的解?
- 区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件$g(b;t)=0$的解?
- ……

思考题

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

其中$a<x,t<b$，且相应的齐次微分方程无奇点

- 设相应齐次方程有线性无关解$y_1(x)$, $y_2(x)$
- 区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件$g(a;t)=0$的解？
- 区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件$g(b;t)=0$的解？
- ······

思考题

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

其中$a<x,t<b$，且相应的齐次微分方程无奇点

- 设相应齐次方程有线性无关解$y_1(x)$, $y_2(x)$
- 区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件$g(a;t)=0$的解？
- 区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件$g(b;t)=0$的解？
- ……

思考题

对于一般的常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

其中$a<x,t<b$，且相应的齐次微分方程无奇点

- 设相应齐次方程有线性无关解$y_1(x)$, $y_2(x)$
- 区间(a,t)内既满足齐次方程、又满足$x=a$端齐次边界条件$g(a;t)=0$的解?
- 区间(t,b)内既满足齐次方程、又满足$x=b$端齐次边界条件$g(b;t)=0$的解?
- ······

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)\qquad x,t>0$$

$$g(0;t)=0\qquad\qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

若$p(-x)=p(x)$，$q(-x)=q(x)$ ，则

$$G(x,t)=G(-t,-x)$$

常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)\quad x,t>0$$

$$g(0;t)=0\qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

若$p(-x)=p(x)$，$q(-x)=q(x)$，则

$$G(x,t)=G(-t,-x)$$

常微分方程初值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)\qquad x,t>0$$

$$g(0;t)=0\qquad\qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

若$p(-x)=p(x)$, $q(-x)=q(x)$ ，则

$$G(x,t)=G(-t,-x)$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;t)\Big|_{x<t}=0\qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x<t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}\left[p(-x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}(-x)}\right]+q(-x)g(-x;-t')=\delta(x-t')$$

$$g(-x;-t')\Big|_{-x<-t'}=0\qquad \frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}(-x)}\Big|_{-x<-t'}=0$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;t)\Big|_{x<t}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x<t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}\left[p(-x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}(-x)}\right]+q(-x)g(-x;-t') = \delta(x-t')$$

$$g(-x;-t')\Big|_{-x<-t'}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}(-x)}\Big|_{-x<-t'}=0$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;t)\Big|_{x<t}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x<t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(-x;-t')=\delta(x-t')$$

$$g(-x;-t')\Big|_{x>t'}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\Big|_{x>t'}=0$$

交叉相乘，相减，再积分

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;t)\Big|_{x<t}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x<t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(-x;-t')=\delta(x-t')$$

$$g(-x;-t')\Big|_{x>t'}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\Big|_{x>t'}=0$$

交叉相乘，相减，再积分

$$\int_0^\infty \left\{ g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \Big[g(-x;-t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(-t;-t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]_0^\infty$$

$$= 0$$

$\therefore \quad g(t';t) = g(-t;-t')$ 即 $g(x;t) = g(-t;-x)$

$$\int_0^\infty \left\{ g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \Big[g(-x;-t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(-t;-t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]_0^\infty$$

$$= 0$$

$\therefore\ g(t';t) = g(-t;-t')$ 即 $g(x;t) = g(-t;-x)$

$$\int_0^\infty \left\{ g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \Big[g(-x;-t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(-t;-t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]_0^\infty$$

$$= 0$$

$\therefore\ g(t';t) = g(-t;-t')$ 即 $g(x;t) = g(-t;-x)$

$$\int_0^\infty \left\{ g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \Big[g(-x;-t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(-t;-t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]_0^\infty$$

$$= 0$$

$$\therefore\quad g(t';t) = g(-t;-t') \qquad \text{即} \qquad g(x;t) = g(-t;-x)$$

$$\int_0^\infty \left\{ g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \Big[g(-x;-t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(-t;-t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]_0^\infty$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad g(t';t) = g(-t;-t') \quad \text{即} \quad g(x;t) = g(-t;-x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t)$$

$$y(0)=A \qquad y'(0)=B$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}\left[p(-t)\frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\right]+q(-t)g(-t;-x)=\delta(x-t)$$

$$g(-t;-x)\Big|_{-t<-x}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\bigg|_{-t<-x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;t)\Big|_{t>x}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t>x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t)$$

$$y(0)=A \qquad y'(0)=B$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}\left[p(-t)\frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\right]+q(-t)g(-t;-x)=\delta(x-t)$$

$$g(-t;-x)\Big|_{-t<-x}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\Bigg|_{-t<-x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;t)\Big|_{t>x}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t>x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t)$$

$$y(0)=A \qquad y'(0)=B$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}\left[p(-t)\frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\right]+q(-t)g(-t;-x)=\delta(x-t)$$

$$g(-t;-x)\Big|_{-t<-x}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\Big|_{-t<-x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;t)\Big|_{t>x}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t>x}=0$$

$$\int_0^\infty \left\{ g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] - y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \Big[f(t)g(x,t) - y(t)\delta(x-t)\Big]\mathrm{d}t$$

$$左 = \left\{p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_0^\infty$$

$$= -p(0)\left[Bg(x,0) - A\left.\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right]$$

$$右 = \int_0^x f(t)g(x,t)\mathrm{d}t - y(x)$$

$$\int_0^\infty\left\{g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]-y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty\left[f(t)g(x,t)-y(t)\delta(x-t)\right]\mathrm{d}t$$

$$左=\left\{p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_0^\infty$$

$$=-p(0)\left[Bg(x,0)-A\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right]$$

$$右=\int_0^x f(t)g(x,t)\mathrm{d}t-y(x)$$

$$\int_0^\infty \left\{ g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] - y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \Big[f(t)g(x,t) - y(t)\delta(x-t)\Big]\mathrm{d}t$$

$$\text{左} = \left\{ p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_0^\infty$$

$$= -p(0)\left[Bg(x,0) - A\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\right]$$

$$\text{右} = \int_0^x f(t)g(x,t)\mathrm{d}t - y(x)$$

$$\int_0^\infty \left\{ g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] - y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \left[f(t)g(x,t) - y(t)\delta(x-t)\right]\mathrm{d}t$$

$$左 = \left\{p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_0^\infty$$

$$= -p(0)\left[Bg(x,0) - A\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right]$$

$$右 = \int_0^x f(t)g(x,t)\mathrm{d}t - y(x)$$

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\int_0^x f(t)g(x,t)\mathrm{d}t \\
&+p(0)\left[Bg(x,0) - A\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right]
\end{aligned}
$$

讲授要点

1. δ函数的定义
   - 点源的密度函数
   - δ函数的基本运算规则
   - 二维和三维δ函数
2. 常微分方程的Green函数
   - 常微分方程的Green函数：初值问题
   - 常微分方程的Green函数：边值问题
3. Green函数可能的对称性
   - 初值问题
   - 边值问题

常微分方程边值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)\qquad a<x,t<b$$

$$g(a;t)=0\qquad g(b;t)=0$$

$$G(x,t)=G(t,x)$$

常微分方程边值问题的Green函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t) \quad a<x,t<b$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

$$G(x,t)=G(t,x)$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t')=\delta(x-t')$$

$$g(a;t')=0 \qquad g(b;t')=0$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(a;t)=0 \qquad g(b;t)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t')=\delta(x-t')$$

$$g(a;t')=0 \qquad g(b;t')=0$$

证明

$$\int_a^b \left\{ g(x;t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[g(x;t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(t;t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(x;t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]_a^b = 0$$

$\therefore \quad g(t';t) = g(t;t')$ 即 $g(x;t) = g(t;x)$

证明

$$\int_a^b \left\{ g(x;t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[g(x;t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(t;t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(x;t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]_a^b = 0$$

$\therefore \quad g(t';t) = g(t;t') \quad$ 即 $\quad g(x;t) = g(t;x)$

证明

$$\int_a^b \left\{ g(x;t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[g(x;t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(t;t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(x;t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]_a^b = 0$$

$\therefore \quad g(t';t) = g(t;t') \quad$ 即 $\quad g(x;t) = g(t;x)$

证明

$$\int_a^b \left\{ g(x;t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[g(x;t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(t;t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(x;t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]_a^b = 0$$

$$\therefore \qquad g(t';t) = g(t;t') \quad 即 \quad g(x;t) = g(t;x)$$

证明

$$\int_a^b \left\{ g(x;t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right] \right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[g(x;t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t')\Big]\mathrm{d}x$$

$$g(t;t') - g(t';t)$$

$$= p(x)\left[g(x;t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x,t)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]_a^b = 0$$

$$\therefore \qquad g(t';t) = g(t;t') \quad \text{即} \quad g(x;t) = g(t;x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t)$$

$$y(a)=A \qquad y(b)=B$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(t;x)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(t;x)=\delta(x-t)$$

$$g(a;x)=0 \qquad g(b;x)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;a)=0 \qquad g(x;b)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t)$$
$$y(a)=A \qquad y(b)=B$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(t;x)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(t;x)=\delta(x-t)$$
$$g(a;x)=0 \qquad g(b;x)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t)$$
$$g(x;a)=0 \qquad g(x;b)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t)$$

$$y(a)=A \qquad y(b)=B$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(t;x)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(t;x)=\delta(x-t)$$

$$g(a;x)=0 \qquad g(b;x)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t)$$

$$g(x;a)=0 \qquad g(x;b)=0$$

$$\int_a^b\left\{g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]-y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b\Big[f(t)g(x,t)-y(t)\delta(x-t)\Big]\mathrm{d}t$$

$$\text{左}=\left\{p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_a^b$$
$$=-Bp(b)g(x,b)-Ap(a)g(x,b)$$

$$\text{右}=\int_a^b f(t)g(x,t)\mathrm{d}t-y(x)$$

$$\int_a^b\left\{g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]-y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b\left[f(t)g(x,t)-y(t)\delta(x-t)\right]\mathrm{d}t$$

$$左=\left\{p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_a^b$$

$$=-Bp(b)g(x,b)-Ap(a)g(x,b)$$

$$右=\int_a^b f(t)g(x,t)\mathrm{d}t-y(x)$$

$$\int_a^b \left\{ g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] - y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b \Big[f(t)g(x,t) - y(t)\delta(x-t)\Big]\mathrm{d}t$$

$$左 = \left\{ p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_a^b$$
$$= -Bp(b)g(x,b) - Ap(a)g(x,b)$$

$$右 = \int_a^b f(t)g(x,t)\mathrm{d}t - y(x)$$

$$\int_a^b \left\{ g(x,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] - y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b \Big[f(t)g(x,t) - y(t)\delta(x-t)\Big]\mathrm{d}t$$

$$\text{左} = \left\{p(t)\left[g(x,t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - y(t)\frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}t}\right]\right\}_a^b$$
$$= -Bp(b)g(x,b) - Ap(a)g(x,b)$$

$$\text{右} = \int_a^b f(t)g(x,t)\mathrm{d}t - y(x)$$

$$y(x) = \int_a^b f(t)g(x,t)\mathrm{d}t$$

$$+Bp(b)g(x,b) - Ap(a)g(x,a)$$