第 十 四 讲
Laplace 变 换

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. Laplace变换
   - 定义
   - Laplace变换的基本性质
2. Laplace变换的反演
   - Laplace变换像函数的必要条件
   - Laplace变换的反演
   - 普遍反演公式

讲授要点

1. Laplace变换
   - 定义
   - Laplace变换的基本性质
2. Laplace变换的反演
   - Laplace变换像函数的必要条件
   - Laplace变换的反演
   - 普遍反演公式

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，第9章
- 梁昆淼，《数学物理方法》，第6章
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§6.1, 6.2, 6.3

- Laplace变换(简称拉氏变换)是常用的一种积分变换. 在数学、物理及工程科学中有广泛的应用
- 本节介绍Laplace变换的定义及其基本性质

- Laplace变换(简称拉氏变换)是常用的一种积分变换．在数学、物理及工程科学中有广泛的应用

- 本节介绍Laplace变换的定义及其基本性质

讲授要点

1. Laplace变换
   - 定义
   - Laplace变换的基本性质
2. Laplace变换的反演
   - Laplace变换像函数的必要条件
   - Laplace变换的反演
   - 普遍反演公式

Definition

Laplace变换是一种积分变换，它把$f(t)$变换为$F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- 这里的t是实数，p是复数，$p = s + \mathrm{i}\sigma$
- $F(p)$称为$f(t)$的Laplace换式，简称拉氏换式
- e^{-pt}是Laplace变换的核

Definition

Laplace变换是一种积分变换，它把$f(t)$变换为$F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- 这里的t是实数，p是复数，$p = s + \mathrm{i}\sigma$
- $F(p)$称为$f(t)$的Laplace换式，简称拉氏换式
- e^{-pt}是Laplace变换的核

Definition

Laplace变换是一种积分变换，它把$f(t)$变换为$F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t$$

- 这里的t是实数，p是复数，$p = s + \mathrm{i}\sigma$
- $F(p)$称为$f(t)$的Laplace换式，简称拉氏换式
- e^{-pt}是Laplace变换的核

Definition

Laplace变换是一种积分变换，它把$f(t)$变换为$F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- 这里的t是实数，p是复数，$p = s + \mathrm{i}\sigma$
- $F(p)$称为$f(t)$的Laplace换式，简称拉氏换式
- e^{-pt}是Laplace变换的核

Definition

Laplace变换是一种积分变换，它把$f(t)$变换为$F(p)$

$$F(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t$$

名称：$f(t)$ —— Laplace变换的原函数

$F(p)$ —— Laplace变换的像函数

简写记号

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\} \qquad 或 \qquad F(p) \risingdotseq f(t)$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} \qquad 或 \qquad f(t) \fallingdotseq F(p)$$

Definition

Laplace变换是一种积分变换，它把$f(t)$变换为$F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

名称：$f(t)$ —— Laplace变换的原函数

$F(p)$ —— Laplace变换的像函数

简写记号

$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ 或 $F(p) \fallingdotseq f(t)$

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$ 或 $f(t) \risingdotseq F(p)$

Definition

Laplace变换是一种积分变换，它把$f(t)$变换为$F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

名称：$f(t)$ —— Laplace变换的原函数

$F(p)$ —— Laplace变换的像函数

简写记号

$$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\} \qquad 或 \qquad F(p) \risingdotseq f(t)$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} \qquad 或 \qquad f(t) \fallingdotseq F(p)$$

例14.1

函数$f(t)=1$的Laplace换式为

$$1 \doteqdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Re}\,p>0$$

这里的限制条件$\mathrm{Re}\,p>0$是为了保证积分收敛，或者说，是Laplace变换存在的条件

例14.1

函数$f(t) = 1$的Laplace换式为

$$1 \risingdotseq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Re}\, p > 0$$

这里的限制条件$\mathrm{Re}\, p > 0$是为了保证积分收敛，或者说，是Laplace变换存在的条件

例14.2

函数$f(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}$的Laplace换式为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\alpha t} &\doteqdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}\cdot \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha} \qquad \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha\end{aligned}$$

这里的限制条件$\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha$同样是为了保证积分收敛，即Laplace变换存在

例14.2

函数$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$的Laplace换式为

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\alpha t} &\doteqdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} \cdot \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha} \qquad \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha \end{aligned}$$

这里的限制条件$\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha$同样是为了保证积分收敛，即Laplace变换存在

讨论

- 从例14.1和例14.2可以看出，由于Laplace变换的核是e^{-pt}，所以对于相当广泛的函数$f(t)$，其拉氏换式都存在
- 甚至当$t\to\infty$，$f(t)\to\infty$ 时，$f(t)$的拉氏换式也可能存在

Laplace变换存在的条件

就是积分$\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t$收敛的条件

讨论

- 从例14.1和例14.2可以看出，由于Laplace变换的核是e^{-pt}，所以对于相当广泛的函数$f(t)$，其拉氏换式都存在
- 甚至当$t \to \infty$，$f(t) \to \infty$ 时，$f(t)$的拉氏换式也可能存在

Laplace变换存在的条件

就是积分$\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t$收敛的条件

讨论

- 从例14.1和例14.2可以看出，由于Laplace变换的核是e^{-pt}，所以对于相当广泛的函数$f(t)$，其拉氏换式都存在
- 甚至当$t \to \infty$，$f(t) \to \infty$ 时，$f(t)$的拉氏换式也可能存在

Laplace变换存在的条件

就是积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t$收敛的条件

讨论

- 从例14.1和例14.2可以看出，由于Laplace变换的核是e^{-pt}，所以对于相当广泛的函数$f(t)$，其拉氏换式都存在
- 甚至当$t \to \infty$，$f(t) \to \infty$ 时，$f(t)$的拉氏换式也可能存在

Laplace变换存在的条件

就是积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$收敛的条件

Laplace变换存在的充分条件

在绝大多数实际问题中，$f(t)$都能满足

1. $f(t)$在区间$0 \le t < \infty$中除了第一类间断点外都是连续的，而且有连续导数，在任何有限区间中这种间断点的数目是有限的
2. $f(t)$有有限的增长指数，即存在正数$M > 0$及$s' \ge 0$，使对于任何t值(实际上，只要对于足够大的t值)，$|f(t)| < Me^{s't}$

如果s'存在的话，它一定并不唯一，因为比s'大的任何正数也符合要求

s'的下确界称为收敛横标，记为s_0

Laplace变换存在的充分条件

在绝大多数实际问题中，$f(t)$都能满足

1. $f(t)$在区间$0 \leq t < \infty$中除了第一类间断点外都是连续的，而且有连续导数，在任何有限区间中这种间断点的数目是有限的
2. $f(t)$有有限的增长指数，即存在正数$M > 0$及$s' \geq 0$，使对于任何t值(实际上，只要对于足够大的t值)，$|f(t)| < Me^{s't}$

如果s'存在的话，它一定并不唯一，因为比s'大的任何正数也符合要求

s'的下确界称为收敛横标，记为s_0

Laplace变换存在的充分条件

在绝大多数实际问题中，$f(t)$都能满足

1. $f(t)$在区间$0 \leq t < \infty$中除了第一类间断点外都是连续的，而且有连续导数，在任何有限区间中这种间断点的数目是有限的
2. $f(t)$有有限的增长指数，即存在正数$M > 0$及$s' \geq 0$，使对于任何t值(实际上，只要对于足够大的t值)，$|f(t)| < M\mathrm{e}^{s't}$

如果s'存在的话，它一定并不唯一，因为比s'大的任何正数也符合要求

s'的下确界称为收敛横标，记为s_0

Laplace变换存在的充分条件

在绝大多数实际问题中，$f(t)$都能满足

1. $f(t)$在区间$0 \le t < \infty$中除了第一类间断点外都是连续的，而且有连续导数，在任何有限区间中这种间断点的数目是有限的
2. $f(t)$有有限的增长指数，即存在正数$M > 0$及$s' \geq 0$，使对于任何t值(实际上，只要对于足够大的t值)，$|f(t)| < M\mathrm{e}^{s't}$

如果s'存在的话，它一定并不唯一，因为比s'大的任何正数也符合要求

s'的下确界称为收敛横标，记为s_0

Laplace变换存在的充分条件

在绝大多数实际问题中，$f(t)$都能满足

1. $f(t)$在区间$0 \leq t < \infty$中除了第一类间断点外都是连续的，而且有连续导数，在任何有限区间中这种间断点的数目是有限的
2. $f(t)$有有限的增长指数，即存在正数$M > 0$及$s' \geq 0$，使对于任何t值(实际上，只要对于足够大的t值)，$|f(t)| < M\mathrm{e}^{s't}$

如果s'存在的话，它一定并不唯一，因为比s'大的任何正数也符合要求

s'的下确界称为收敛横标，记为s_0

讲授要点

1. Laplace变换
   - 定义
   - Laplace变换的基本性质
2. Laplace变换的反演
   - Laplace变换像函数的必要条件
   - Laplace变换的反演
   - 普遍反演公式

性质1：Laplace变换是一个线性变换

$$f_1(t) \doteqdot F_1(p) \quad f_2(t) \doteqdot F_2(p)$$

则

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \doteqdot \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

这个性质很容易从Laplace变换的定义得到，它只不过是积分运算的线性性质的反映

根据这个性质，立即得到下面的结果

性质1：Laplace变换是一个线性变换

$$f_1(t) \doteqdot F_1(p) \quad f_2(t) \doteqdot F_2(p)$$

则

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \doteqdot \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

这个性质很容易从Laplace变换的定义得到，它只不过是积分运算的线性性质的反映

根据这个性质，立即得到下面的结果

性质1：Laplace变换是一个线性变换

$$f_1(t) \risingdotseq F_1(p) \quad f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$$

则

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \risingdotseq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

这个性质很容易从Laplace变换的定义得到，它只不过是积分运算的线性性质的反映

根据这个性质，立即得到下面的结果

例14.3

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}} \\ &\doteqdot \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \omega t &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2} \\ &\doteqdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}\end{aligned}$$

性质2：Laplace换式的解析性

若$f(t)$满足拉普拉斯变换存在的充分条件，则

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-(s-s_0)t} \qquad s = \mathrm{Re}\,p$$

当$s - s_0 \geq \delta > 0$时

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-\delta t}$$

而积分$\int_0^\infty M\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t$收敛，故积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}\,p \geq s_0 + \delta$上一致收敛，因而在$\mathrm{Re}\,p > s_0$的半平面内代表一个解析函数，即$F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\,p > s_0$内解析

这个性质可以用来确定收敛横标s_0

性质2：Laplace换式的解析性

若$f(t)$满足拉普拉斯变换存在的充分条件，则

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-(s-s_0)t} \qquad s = \mathrm{Re}\, p$$

当$s - s_0 \geq \delta > 0$时

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-\delta t}$$

而积分$\int_0^\infty M\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t$收敛，故积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}\, p \geq s_0 + \delta$上一致收敛，因而在$\mathrm{Re}\, p > s_0$的半平面内代表一个解析函数，即$F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\, p > s_0$内解析

这个性质可以用来确定收敛横标s_0

性质2：Laplace换式的解析性

若$f(t)$满足拉普拉斯变换存在的充分条件，则

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-(s-s_0)t} \qquad s = \mathrm{Re}\,p$$

当$s - s_0 \geq \delta > 0$时

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-\delta t}$$

而积分$\int_0^\infty M\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t$收敛，故积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}\,p \geq s_0 + \delta$上一致收敛，因而在$\mathrm{Re}\,p > s_0$的半平面内代表一个解析函数，即$F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\,p > s_0$内解析

这个性质可以用来确定收敛横标s_0

性质2：Laplace换式的解析性

若$f(t)$满足拉普拉斯变换存在的充分条件，则

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-(s-s_0)t} \qquad s = \mathrm{Re}\, p$$

当$s - s_0 \geq \delta > 0$时

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-\delta t}$$

而积分$\int_0^\infty M\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t$收敛，故积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}\, p \geq s_0 + \delta$上一致收敛，因而在$\mathrm{Re}\, p > s_0$的半平面内代表一个解析函数，即$F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\, p > s_0$内解析

这个性质可以用来确定收敛横标s_0

性质2：Laplace换式的解析性

若$f(t)$满足拉普拉斯变换存在的充分条件，则

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-(s-s_0)t} \qquad s = \mathrm{Re}\, p$$

当$s - s_0 \geq \delta > 0$时

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-\delta t}$$

而积分$\int_0^\infty M\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t$收敛，故积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}\, p \geq s_0 + \delta$上一致收敛，因而在$\mathrm{Re}\, p > s_0$的半平面内代表一个解析函数，即$F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\, p > s_0$内解析

这个性质可以用来确定收敛横标s_0

性质2：Laplace换式的解析性

若$f(t)$满足拉普拉斯变换存在的充分条件，则

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-(s-s_0)t} \qquad s = \mathrm{Re}\,p$$

当$s - s_0 \geq \delta > 0$时

$$|\mathrm{e}^{-pt}f(t)| < M\mathrm{e}^{-\delta t}$$

而积分$\int_0^\infty M\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t$收敛，故积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}\,p \geq s_0 + \delta$上一致收敛，因而在$\mathrm{Re}\,p > s_0$的半平面内代表一个解析函数，即$F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\,p > s_0$内解析

这个性质可以用来确定收敛横标s_0

性质3

若$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，则

$$F(p) \to 0 \quad \text{当} \, \mathrm{Re}\, p = s \to +\infty$$

性质4：原函数的导数的Laplace变换

设$f(t)$及$f'(t)$都满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t) \risingdotseq F(p)$，则

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$$

对原函数$f(t)$的微商运算转化为对像函数$F(p)$的乘法运算，而且还自动包括了$f(t)$的初值

正因为这个特点，所以Laplace变换方法是求解微分方程的一种重要方法

性质4：原函数的导数的Laplace变换

设$f(t)$及$f'(t)$都满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t) \doteqdot F(p)$，则

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$$

对原函数$f(t)$的微商运算转化为对像函数$F(p)$的乘法运算，而且还自动包括了$f(t)$的初值

正因为这个特点，所以Laplace变换方法是求解微分方程的一种重要方法

性质4：原函数的导数的Laplace变换

设$f(t)$及$f'(t)$都满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t) \risingdotseq F(p)$，则

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$$

对原函数$f(t)$的微商运算转化为对像函数$F(p)$的乘法运算，而且还自动包括了$f(t)$的初值

正因为这个特点，所以Laplace变换方法是求解微分方程的一种重要方法

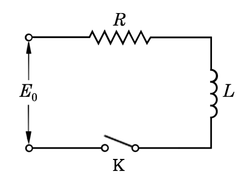
推论

只要$f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$都满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t) \risingdotseq F(p)$，则

$$\begin{aligned}
f''(t) &\risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \\
f^{(3)}(t) &\risingdotseq p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(t) &\risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) \\
&\quad - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

例14.4

LR串联电路如右图，K合上前电路中没有电流，求K合上后电路中的电流



解

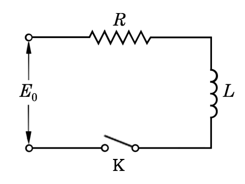
根据基尔霍夫定律，可列出微分方程初值问题

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E \qquad i(0)=0$$

设$i(t)\doteq I(p)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\doteq pI(p)-i(0)=pI(p)$

例14.4

LR串联电路如右图，K合上前电路中没有电流，求K合上后电路中的电流



解

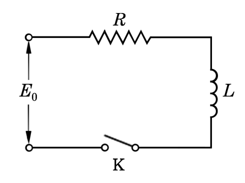
根据基尔霍夫定律，可列出微分方程初值问题

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E \qquad i(0)=0$$

设$i(t)\doteqdot I(p)$，则 $\quad \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\doteqdot pI(p)-i(0)=pI(p)$

例14.4

LR串联电路如右图，K合上前电路中没有电流，求K合上后电路中的电流



解

根据基尔霍夫定律，可列出微分方程初值问题

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E \qquad i(0) = 0$$

设$i(t) \doteqdot I(p)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \doteqdot pI(p) - i(0) = pI(p)$

例14.4

LR串联电路如图，K合上前电路中没有电流，求K合上后电路中的电流

解(续)

$$LpI(p)+RI(p)=\frac{E}{p}\qquad (Lp+R)I(p)=\frac{E}{p}$$

$$I(p)=\frac{E}{p}\frac{1}{Lp+R}=\frac{E}{R}\left[\frac{1}{p}-\frac{L}{Lp+R}\right]$$

反演即得

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-\mathrm{e}^{-(R/L)t}\right]$$

例14.4

LR串联电路如图，K合上前电路中没有电流，求K合上后电路中的电流

解(续)

$$LpI(p) + RI(p) = \frac{E}{p} \qquad (Lp+R)I(p) = \frac{E}{p}$$

$$I(p) = \frac{E}{p}\frac{1}{Lp+R} = \frac{E}{R}\left[\frac{1}{p} - \frac{L}{Lp+R}\right]$$

反演即得

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\right]$$

例14.4

LR串联电路如图，K合上前电路中没有电流，求K合上后电路中的电流

解(续)

$$LpI(p)+RI(p)=\frac{E}{p}\qquad (Lp+R)I(p)=\frac{E}{p}$$

$$I(p)=\frac{E}{p}\frac{1}{Lp+R}=\frac{E}{R}\left[\frac{1}{p}-\frac{L}{Lp+R}\right]$$

反演即得

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-\mathrm{e}^{-(R/L)t}\right]$$

性质5：原函数的积分的Laplace变换

设$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，则

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$$

对原函数$f(t)$的(变上限)积分转化为对像函数$F(p)$的除法

所以Laplace变换方法也可以用于求解积分(微分)方程

性质5：原函数的积分的Laplace变换

设$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，则

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

对原函数$f(t)$的(变上限)积分转化为对像函数$F(p)$的除法

所以Laplace变换方法也可以用于求解积分(微分)方程

性质5：原函数的积分的Laplace变换

设$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，则

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

对原函数$f(t)$的(变上限)积分转化为对像函数$F(p)$的除法

所以Laplace变换方法也可以用于求解积分(微分)方程

Laplace变换的反演

- 从像函数反过来求原函数的问题称为反演
- 求Laplace变换的反演，首先遇到反演的唯一性问题，即对于任意给定的像函数$F(p)$，是否可能存在不止一个原函数，例如两个不同的原函数$f_1(t)$和$f_1(t)$，使得

$$f_1(t) \doteq F(p), \qquad f_2(t) \doteq F(p)$$

- 或者说，是否存在$g(t) \equiv f_1(t) - f_2(t) \not\equiv 0$，使得$g(t) \doteq 0$
- 回答是：如果限定$g(t)$为连续函数，则由$g(t) \doteq 0$一定能推出$g(t) \equiv 0$

- 从像函数反过来求原函数的问题称为反演
- 求Laplace变换的反演，首先遇到反演的唯一性问题，即对于任意给定的像函数$F(p)$，是否可能存在不止一个原函数，例如两个不同的原函数$f_1(t)$和$f_1(t)$，使得

$$f_1(t) \fallingdotseq F(p), \qquad f_2(t) \fallingdotseq F(p)$$

- 或者说，是否存在$g(t) \equiv f_1(t) - f_2(t) \neq 0$，使得$g(t) \fallingdotseq 0$
- 回答是：如果限定$g(t)$为连续函数，则由$g(t) \fallingdotseq 0$一定能推出$g(t) \equiv 0$

- 从像函数反过来求原函数的问题称为反演
- 求Laplace变换的反演，首先遇到反演的唯一性问题，即对于任意给定的像函数$F(p)$，是否可能存在不止一个原函数，例如两个不同的原函数$f_1(t)$和$f_1(t)$，使得

$$f_1(t) \fallingdotseq F(p), \qquad f_2(t) \fallingdotseq F(p)$$

- 或者说，是否存在$g(t) \equiv f_1(t) - f_2(t) \neq 0$，使得$g(t) \fallingdotseq 0$
- 回答是：如果限定$g(t)$为连续函数，则由$g(t) \fallingdotseq 0$一定能推出$g(t) \equiv 0$

- 从像函数反过来求原函数的问题称为反演
- 求Laplace变换的反演，首先遇到反演的唯一性问题，即对于任意给定的像函数$F(p)$，是否可能存在不止一个原函数，例如两个不同的原函数$f_1(t)$和$f_1(t)$，使得

$$f_1(t) \risingdotseq F(p), \qquad f_2(t) \risingdotseq F(p)$$

- 或者说，是否存在$g(t) \equiv f_1(t) - f_2(t) \not\equiv 0$，使得$g(t) \risingdotseq 0$
- 回答是：如果限定$g(t)$为连续函数，则由$g(t) \risingdotseq 0$一定能推出$g(t) \equiv 0$

- 但若许可$g(t)$不连续，则$g(t)$可以不恒为0(例如在有限个点处不为0，而在其余点处处为0)
- 换言之，如果限定原函数为连续函数，则Laplace变换的反演具有唯一性
- 但若许可原函数不连续，则Laplace变换的反演并不具有唯一性
- 以下的讨论中，将约定原函数均为连续函数

- 但若许可$g(t)$不连续，则$g(t)$可以不恒为0(例如在有限个点处不为0，而在其余点处处为0)
- 换言之，如果限定原函数为连续函数，则Laplace变换的反演具有唯一性
- 但若许可原函数不连续，则Laplace变换的反演并不具有唯一性
- 以下的讨论中，将约定原函数均为连续函数

- 但若许可$g(t)$不连续，则$g(t)$可以不恒为0(例如在有限个点处不为0，而在其余点处处为0)
- 换言之，如果限定原函数为连续函数，则Laplace变换的反演具有唯一性
- 但若许可原函数不连续，则Laplace变换的反演并不具有唯一性
- 以下的讨论中，将约定原函数均为连续函数

- 但若许可$g(t)$不连续，则$g(t)$可以不恒为0(例如在有限个点处不为0，而在其余点处处为0)
- 换言之，如果限定原函数为连续函数，则Laplace变换的反演具有唯一性
- 但若许可原函数不连续，则Laplace变换的反演并不具有唯一性
- 以下的讨论中，将约定原函数均为连续函数

讲授要点

1. Laplace变换
   - 定义
   - Laplace变换的基本性质
2. Laplace变换的反演
   - Laplace变换像函数的必要条件
   - Laplace变换的反演
   - 普遍反演公式

$F(p)$作为Laplace变换的像函数，必须满足下列要求：

- $F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\,p > s_0$内解析
- 若p_0是$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$的收敛点，则当$p$在角域$|\arg(p - p_0)| \le \psi < \pi/2$上趋于$\infty$时$F(p)$一致地趋于0
- $F(p)$不可能是周期函数，否则恒为0

$F(p)$作为Laplace变换的像函数，必须满足下列要求：

- $F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\, p > s_0$内解析
- 若p_0是$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$的收敛点，则当$p$在角域$|\arg(p - p_0)| \leq \psi < \pi/2$上趋于$\infty$时$F(p)$一致地趋于0
- $F(p)$不可能是周期函数，否则恒为0

$F(p)$作为Laplace变换的像函数，必须满足下列要求：

- $F(p)$在半平面$\mathrm{Re}\, p > s_0$内解析
- 若p_0是$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$的收敛点，则当$p$在角域$|\arg(p - p_0)| \le \psi < \pi/2$上趋于$\infty$时$F(p)$一致地趋于0
- $F(p)$不可能是周期函数，否则恒为0

讲授要点

1. Laplace变换
   - 定义
   - Laplace变换的基本性质
2. Laplace变换的反演
   - Laplace变换像函数的必要条件
   - Laplace变换的反演
   - 普遍反演公式

像函数的导数的反演

设$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，

$f(t) \doteq F(p)$，则$F(p)$在$\mathrm{Re}\, p \geq s_1 > s_0$的半平面中解析，因而可以在积分号下求导

$$F^{(n)}(p) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty (-t)^n f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$$

所以

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$$

像函数的导数的反演

设$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t) \doteq F(p)$，则$F(p)$在$\mathrm{Re}\, p \geq s_1 > s_0$的半平面中解析，因而可以在积分号下求导

$$F^{(n)}(p) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (-t)^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

所以

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$$

像函数的导数的反演

设$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t) \risingdotseq F(p)$，则$F(p)$在$\mathrm{Re}\,p \geq s_1 > s_0$的半平面中解析，因而可以在积分号下求导

$$F^{(n)}(p) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (-t)^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

所以

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)$$

像函数的导数的反演

设$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件，$f(t) \risingdotseq F(p)$，则$F(p)$在$\mathrm{Re}\, p \geq s_1 > s_0$的半平面中解析，因而可以在积分号下求导

$$F^{(n)}(p) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \int_0^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} (-t)^n f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$$

所以

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-t)^n f(t)$$

例14.5

$$\frac{1}{p^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} \doteqdot t$$

$$\frac{1}{p^3} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p} \doteqdot \frac{1}{2}t^2$$

若$F(p)$是有理函数，总可以通过部分分式求反演

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}$$

$$\doteqdot \frac{1}{2\alpha}t^2 - \frac{1}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

例14.5

$$\frac{1}{p^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p}\risingdotseq t$$

$$\frac{1}{p^3}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p}\risingdotseq\frac{1}{2}t^2$$

若$F(p)$是有理函数，总可以通过部分分式求反演

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)}=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3}-\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}$$

$$\risingdotseq\frac{1}{2\alpha}t^2-\frac{1}{\alpha^2}t+\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

例14.5

$$\frac{1}{p^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} \risingdotseq t$$

$$\frac{1}{p^3} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p} \risingdotseq \frac{1}{2}t^2$$

若$F(p)$是有理函数，总可以通过部分分式求反演

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2\alpha}t^2 - \frac{1}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

例14.5

$$\frac{1}{p^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} \risingdotseq t$$

$$\frac{1}{p^3} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p} \risingdotseq \frac{1}{2}t^2$$

若$F(p)$是有理函数，总可以通过部分分式求反演

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2\alpha}t^2 - \frac{1}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

例14.5

$$\frac{1}{p^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} \doteq t$$

$$\frac{1}{p^3} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p} \doteq \frac{1}{2}t^2$$

若$F(p)$是有理函数，总可以通过部分分式求反演

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}$$

$$\doteq \frac{1}{2\alpha}t^2 - \frac{1}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

例14.5

$$\frac{1}{p^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} \doteqdot t$$

$$\frac{1}{p^3} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p} \doteqdot \frac{1}{2}t^2$$

若$F(p)$是有理函数，总可以通过部分分式求反演

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}$$

$$\doteqdot \frac{1}{2\alpha}t^2 - \frac{1}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

像函数的积分的反演

如果$\displaystyle\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q$存在，且当$t\to 0$时，$|f(t)/t|$有界，则

$$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$$

这里的积分上限应了解为$\mathrm{Re}\,p\to+\infty$，并且积分路径在$F(p)$的解析区域内，因而积分与路径无关

利用这个公式，又可得到许多函数的Laplace变换

例如，$\displaystyle\frac{\sin\omega t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty}\frac{\omega}{q^2+\omega^2}\,\mathrm{d}q = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{p}{\omega}$

像函数的积分的反演

如果$\displaystyle\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q$存在，且当$t\to 0$时，$|f(t)/t|$有界，则

$$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$$

这里的积分上限应了解为$\mathrm{Re}\,p\to+\infty$，并且积分路径在$F(p)$的解析区域内，因而积分与路径无关

利用这个公式，又可得到许多函数的Laplace变换

例如，$\displaystyle\frac{\sin\omega t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty}\frac{\omega}{q^2+\omega^2}\,\mathrm{d}q = \frac{\pi}{2}-\arctan\frac{p}{\omega}$

像函数的积分的反演

如果$\displaystyle\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q$存在，且当$t\to 0$时，$|f(t)/t|$有界，则

$$\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$$

这里的积分上限应了解为$\mathrm{Re}\,p\to+\infty$，并且积分路径在$F(p)$的解析区域内，因而积分与路径无关

利用这个公式，又可得到许多函数的Laplace变换

例如，$\displaystyle\frac{\sin\omega t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{\omega}{q^2+\omega^2}\,\mathrm{d}q = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{p}{\omega}$

像函数的积分的反演

如果$\displaystyle\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q$存在，且当$t \to 0$时，$|f(t)/t|$有界，则

$$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q \doteq \frac{f(t)}{t}$$

这里的积分上限应了解为$\mathrm{Re}\,p \to +\infty$，并且积分路径在$F(p)$的解析区域内，因而积分与路径无关

利用这个公式，又可得到许多函数的Laplace变换

例如，$\displaystyle\frac{\sin \omega t}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{\omega}{q^2+\omega^2}\,\mathrm{d}q = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{p}{\omega}$

$$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q \doteqdot \frac{f(t)}{t}$$

即
$$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t$$

特殊情形

如果$p \to 0$时，上式两端的积分均存在，则有

$$\int_0^{\infty} F(p)\,\mathrm{d}p = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$$

这个结果，可以用于计算$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$型的积分

$$\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q \doteq \frac{f(t)}{t}$$

即
$$\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

特殊情形

如果$p \to 0$时，上式两端的积分均存在，则有

$$\int_0^\infty F(p)\,\mathrm{d}p = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

这个结果，可以用于计算$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$型的积分

$$\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$$

即
$$\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

特殊情形

如果$p \to 0$时，上式两端的积分均存在，则有

$$\int_0^\infty F(p)\,\mathrm{d}p = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

这个结果，可以用于计算$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$型的积分

$$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q \doteq \frac{f(t)}{t}$$

即
$$\int_p^{\infty} F(q)\,\mathrm{d}q = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

特殊情形

如果$p \to 0$时，上式两端的积分均存在，则有

$$\int_0^{\infty} F(p)\,\mathrm{d}p = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

这个结果，可以用于计算$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$型的积分

例14.6之一

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}\,\mathrm{d}p = \frac{\pi}{2}$$

这个积分可以应用留数定理计过．这里的计算更为简便

例14.6之一

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}\mathrm{d}p = \frac{\pi}{2}$$

这个积分可以应用留数定理计过．这里的计算更为简便

例14.6之二

有些积分用留数定理计算比较复杂，但却可以方便地用这个办法计算

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2}\right)\mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\bigg|_0^\infty$$

$$= \ln b - \ln a \qquad a>0 \quad b>0$$

例14.6之二

有些积分用留数定理计算比较复杂，但却可以方便地用这个办法计算

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2}\right)\mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\bigg|_0^\infty$$

$$= \ln b - \ln a \qquad a>0 \quad b>0$$

例14.6之二

有些积分用留数定理计算比较复杂，但却可以方便地用这个办法计算

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2}\right)\mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\bigg|_0^\infty$$

$$= \ln b - \ln a \qquad a > 0 \quad b > 0$$

例14.6之二

有些积分用留数定理计算比较复杂，但却可以方便地用这个办法计算

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2}\right)\mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\bigg|_0^\infty$$

$$= \ln b - \ln a \qquad a>0 \quad b>0$$

根据Laplace变换的线性性质，如果Laplace换式$F(p)$可以分解为两个函数$F_1(p)$和$F_2(p)$之和，那么，它的反演问题当然就很简单：只要$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数都存在，$F(p)$的原函数就是$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数之和

如果$F(p)$可以分解为$F_1(p)$和$F_2(p)$之积，其反演问题就需要用到下面的卷积定理

卷积定理 （证明见书）

设$F_1(p) \doteq f_1(t)$，$F_2(p) \doteq f_2(t)$，则

$$F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

根据Laplace变换的线性性质，如果Laplace换式$F(p)$可以分解为两个函数$F_1(p)$和$F_2(p)$之和，那么，它的反演问题当然就很简单：只要$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数都存在，$F(p)$的原函数就是$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数之和

如果$F(p)$可以分解为$F_1(p)$和$F_2(p)$之积，其反演问题就需要用到下面的卷积定理

卷积定理 （证明见书）

设$F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$，$F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$，则

$$F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

根据Laplace变换的线性性质，如果Laplace换式$F(p)$可以分解为两个函数$F_1(p)$和$F_2(p)$之和，那么，它的反演问题当然就很简单：只要$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数都存在，$F(p)$的原函数就是$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数之和

如果$F(p)$可以分解为$F_1(p)$和$F_2(p)$之积，其反演问题就需要用到下面的卷积定理

卷积定理　（证明见书）

设$F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$，$F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$，则

$$F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

根据Laplace变换的线性性质，如果Laplace换式$F(p)$可以分解为两个函数$F_1(p)$和$F_2(p)$之和，那么，它的反演问题当然就很简单：只要$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数都存在，$F(p)$的原函数就是$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数之和

如果$F(p)$可以分解为$F_1(p)$和$F_2(p)$之积，其反演问题就需要用到下面的卷积定理

卷积定理 （证明见书）

设$F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$，$F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$，则

$$F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

根据Laplace变换的线性性质，如果Laplace换式$F(p)$可以分解为两个函数$F_1(p)$和$F_2(p)$之和，那么，它的反演问题当然就很简单：只要$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数都存在，$F(p)$的原函数就是$F_1(p)$和$F_2(p)$的原函数之和

如果$F(p)$可以分解为$F_1(p)$和$F_2(p)$之积，其反演问题就需要用到下面的卷积定理

卷积定理 （证明见书）

设$F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$，$F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$，则

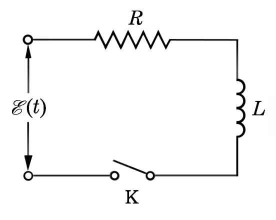
$$F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

例14.7 在LR串联电路中加一方形脉冲电压

$$\mathscr{E}(t)=\begin{cases} E_0 & 0\leq t\leq T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

求电路中的电流$i(t)$，

设$i(0)=0$



解

根据基尔霍夫定律，可列出微分方程初值问题

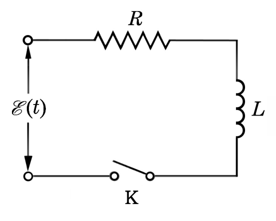
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=\mathscr{E} \qquad i(0)=0$$

设$i(t)\risingdotseq I(p)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\risingdotseq pI(p)-i(0)=pI(p)$

例14.7 在LR串联电路中加一方形脉冲电压

$$\mathscr{E}(t)=\begin{cases} E_0 & 0\le t\le T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

求电路中的电流$i(t)$，设$i(0)=0$



解

根据基尔霍夫定律，可列出微分方程初值问题

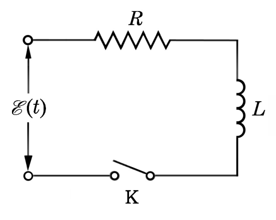
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=\mathscr{E}\qquad i(0)=0$$

设$i(t)\doteqdot I(p)$，则 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\doteqdot pI(p)-i(0)=pI(p)$

例14.7 在LR串联电路中加一方形脉冲电压

$$\mathscr{E}(t)=\begin{cases} E_0 & 0\leq t\leq T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

求电路中的电流$i(t)$，设$i(0)=0$



解

根据基尔霍夫定律，可列出微分方程初值问题

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=\mathscr{E} \qquad i(0)=0$$

设$i(t)\risingdotseq I(p)$，则 $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\risingdotseq pI(p)-i(0)=pI(p)$$

例14.7 在LR串联电路中加一方形脉冲电压（续）

解

$$LpI(p)+RI(p)=E(p) \quad 即 \quad I(p)=\frac{1}{Lp+R}\cdot E(p)$$

$$i(t)=\int_0^t \mathscr{E}(\tau)\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-R(t-\tau)/L}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}\dfrac{E_0}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-Rt/L}\right) & 0\le t\le T\\[2ex] \dfrac{E_0}{R}\left(\mathrm{e}^{RT/L}-1\right)\mathrm{e}^{-Rt/L} & t>T\end{cases}$$

例14.7　在LR串联电路中加一方形脉冲电压（续）

解

$$LpI(p)+RI(p)=E(p) \quad 即 \quad I(p)=\frac{1}{Lp+R}\cdot E(p)$$

$$i(t)=\int_0^t \mathscr{E}(\tau)\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-R(t-\tau)/L}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}\dfrac{E_0}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-Rt/L}\right) & 0\le t\le T\\ \dfrac{E_0}{R}\left(\mathrm{e}^{RT/L}-1\right)\mathrm{e}^{-Rt/L} & t>T\end{cases}$$

例14.7 在LR串联电路中加一方形脉冲电压（续）

解

$$LpI(p)+RI(p)=E(p) \quad \text{即} \quad I(p)=\frac{1}{Lp+R}\cdot E(p)$$

$$i(t)=\int_0^t \mathscr{E}(\tau)\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-R(t-\tau)/L}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}\dfrac{E_0}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-Rt/L}\right) & 0\le t\le T\\[2ex] \dfrac{E_0}{R}\left(\mathrm{e}^{RT/L}-1\right)\mathrm{e}^{-Rt/L} & t>T\end{cases}$$

讲授要点

1. Laplace变换
   - 定义
   - Laplace变换的基本性质
2. Laplace变换的反演
   - Laplace变换像函数的必要条件
   - Laplace变换的反演
   - 普遍反演公式

普遍反演公式

若函数$F(p)$, $p=s+\mathrm{i}\sigma$满足:

1. $F(p)$在区域$\mathrm{Re}\,p>s_0$中解析
2. 在区域$\mathrm{Re}\,p>s_0$中，$|p|\to\infty$时$F(p)\rightrightarrows 0$
3. 对于所有的$\mathrm{Re}\,p=s>s_0$，沿直线$L:\mathrm{Re}\,p=s$的无穷积分$\displaystyle\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}|F(p)|\,\mathrm{d}\sigma\quad(s>s_0)$收敛

则对于$\mathrm{Re}\,p=s>s_0$，$F(p)$是

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

的Laplace变换，其中t为实变量　　（证明见书）

普遍反演公式

若函数$F(p)$, $p = s + \mathrm{i}\sigma$满足:

1. $F(p)$在区域$\mathrm{Re}\, p > s_0$中解析
2. 在区域$\mathrm{Re}\, p > s_0$中，$|p| \to \infty$时$F(p) \rightrightarrows 0$
3. 对于所有的$\mathrm{Re}\, p = s > s_0$，沿直线$L : \mathrm{Re}\, p = s$的无穷积分$\displaystyle\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\, \mathrm{d}\sigma \quad (s > s_0)$收敛

则对于$\mathrm{Re}\, p = s > s_0$，$F(p)$是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\, \mathrm{e}^{pt}\, \mathrm{d}p$$

的Laplace变换，其中t为实变量　　　　(证明见书)

普遍反演公式

若函数$F(p)$, $p = s + \mathrm{i}\sigma$满足：

1. $F(p)$在区域$\mathrm{Re}\,p > s_0$中解析
2. 在区域$\mathrm{Re}\,p > s_0$中，$|p| \to \infty$时$F(p) \rightrightarrows 0$
3. 对于所有的$\mathrm{Re}\,p = s > s_0$，沿直线 $L : \mathrm{Re}\,p = s$ 的无穷积分$\displaystyle\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\,\mathrm{d}\sigma \quad (s > s_0)$收敛

则对于$\mathrm{Re}\,p = s > s_0$，$F(p)$是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

的Laplace变换，其中t为实变量　　（证明见书）

普遍反演公式

若函数$F(p)$, $p = s + \mathrm{i}\sigma$满足:

1. $F(p)$在区域$\mathrm{Re}\, p > s_0$中解析
2. 在区域$\mathrm{Re}\, p > s_0$中，$|p| \to \infty$时$F(p) \rightrightarrows 0$
3. 对于所有的$\mathrm{Re}\, p = s > s_0$，沿直线 $L: \mathrm{Re}\, p = s$ 的无穷积分$\displaystyle\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\, \mathrm{d}\sigma \quad (s > s_0)$收敛

则对于$\mathrm{Re}\, p = s > s_0$，$F(p)$是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\, \mathrm{e}^{pt}\, \mathrm{d}p$$

的Laplace变换，其中t为实变量　　　（证明见书）

普遍反演公式

若函数$F(p)$, $p=s+\mathrm{i}\sigma$满足:

1. $F(p)$在区域$\mathrm{Re}\,p>s_0$中解析
2. 在区域$\mathrm{Re}\,p>s_0$中，$|p|\to\infty$时$F(p)\rightrightarrows 0$
3. 对于所有的$\mathrm{Re}\,p=s>s_0$，沿直线$L:\mathrm{Re}\,p=s$的无穷积分$$\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}|F(p)|\,\mathrm{d}\sigma\quad(s>s_0)$$收敛

则对于$\mathrm{Re}\,p=s>s_0$，$F(p)$是

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

的Laplace变换，其中t为实变量　　(证明见书)

例14.8

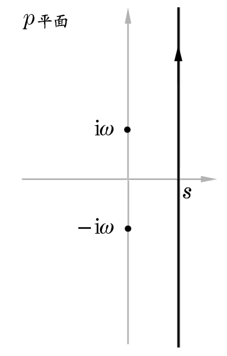
用普遍反演公式求拉普拉斯换式$F(p)=1/(p^2+\omega^2)^2\ (\omega>0)$的原函数

解

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

函数$1/(p^2+\omega^2)^2$的奇点都在虚轴上，故取$s>0$即可

因$t<0$时一定有$f(t)=0$，故只需讨论$t>0$的情形



例14.8

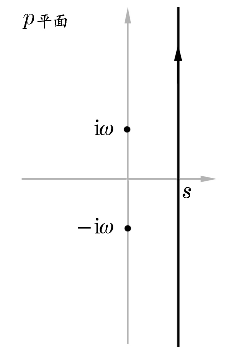
用普遍反演公式求拉普拉斯换式$F(p)=1/(p^2+\omega^2)^2\ (\omega>0)$的原函数

解

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

函数$1/(p^2+\omega^2)^2$的奇点都在虚轴上，故取$s>0$即可

因$t<0$时一定有$f(t)=0$，故只需讨论$t>0$的情形



例14.8

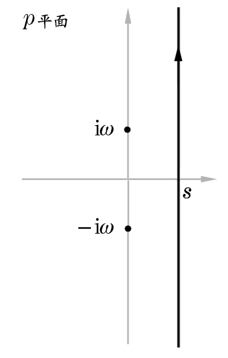
用普遍反演公式求拉普拉斯换式$F(p) = 1/(p^2+\omega^2)^2 \ (\omega > 0)$的原函数

解

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \mathrm{e}^{pt} \mathrm{d}p$$

函数$1/(p^2+\omega^2)^2$的奇点都在虚轴上，故取$s > 0$即可

因$t < 0$时一定有$f(t) = 0$，故只需讨论$t > 0$的情形



例14.8

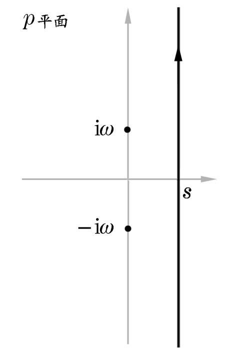
用普遍反演公式求拉普拉斯换式$F(p)=1/(p^2+\omega^2)^2\ (\omega>0)$的原函数

解

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

函数$1/(p^2+\omega^2)^2$的奇点都在虚轴上，故取$s>0$即可

因$t<0$时一定有$f(t)=0$，故只需讨论$t>0$的情形



例14.8 （续）

求$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{1/(p^2+\omega^2)^2\}$ $\qquad (\omega > 0)$

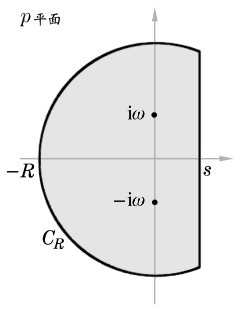
解

可取围道如右图

由于$\displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} = 0$，故根据推广的约当引理，可以断定

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\,\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = 0$$

$$f(t) = \sum_{\text{全平面}} \mathrm{res}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\right\}$$



例14.8 （续）

求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{1/(p^2+\omega^2)^2\}$ $(\omega>0)$

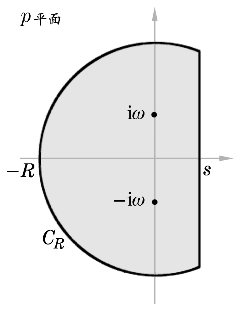
解

可取围道如右图

由于$\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}=0$，故根据推广的约当引理，可以断定

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0$$

$$f(t)=\sum_{全平面}\mathrm{res}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\right\}$$



例14.8 （续）

求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{1/(p^2+\omega^2)^2\}$ $(\omega>0)$

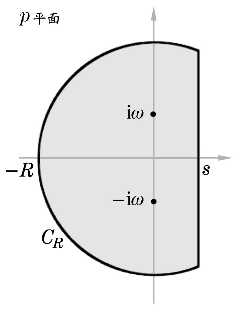
解

可取围道如右图

由于$\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}=0$，故根据推广的约当引理，可以断定

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0$$

$$f(t)=\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\right\}$$



例14.8（续）

求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{1/(p^2+\omega^2)^2\}$ $(\omega>0)$

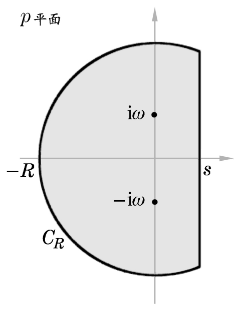
解

可取围道如右图

由于$\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}=0$，故根据推广的约当引理，可以断定

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0$$

$$f(t)=\sum_{\text{全平面}}\text{res}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\right\}$$



例14.8 （续）

求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{1/(p^2+\omega^2)^2\}$ $(\omega>0)$

解

$$
\begin{aligned}
f(t)=&\left\{\left[\frac{t}{(p+\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p+\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=\mathrm{i}\omega}\\
&+\left\{\left[\frac{t}{(p-\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p-\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=-\mathrm{i}\omega}\\
=&\frac{1}{2\omega^3}\left[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right]
\end{aligned}
$$

例14.8 （续）

求$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{1/(p^2+\omega^2)^2\}$ $(\omega>0)$

解

$$\begin{aligned}f(t)&=\left\{\left[\frac{t}{(p+\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p+\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=\mathrm{i}\omega}\\&\quad+\left\{\left[\frac{t}{(p-\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p-\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=-\mathrm{i}\omega}\\&=\frac{1}{2\omega^3}\left[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right]\end{aligned}$$