第十三讲

Γ函数与B函数

北京大学　物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§8.1 — 8.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，附录13
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§4.3, 4.4

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

Γ函数的常用定义

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\, z>0$$

其中的积分变量t应该理解为$\arg t=0$

称为第二类Euler积分

☞ 这是一个反常积分：既是瑕积分(在$t=0$端)，又是无穷积分

Γ函数的常用定义

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \qquad \operatorname{Re} z > 0$$

其中的积分变量t应该理解为$\arg t = 0$

称为第二类Euler积分

☞ 这是一个反常积分：既是瑕积分(在$t = 0$端)，又是无穷积分

Γ函数的常用定义

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\, z>0$$

其中的积分变量t应该理解为$\arg t=0$

称为第二类Euler积分

☞ 这是一个反常积分：既是瑕积分(在$t=0$端)，又是无穷积分

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

为讨论Γ函数的解析性，需将积分拆成两部分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt}_{\gamma(z,1)} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt}_{\Gamma(z,1)}$$

先先看第二部分 $\Gamma(z,1) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$

为讨论Γ函数的解析性，需将积分拆成两部分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t}_{\gamma(z,1)} + \underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t}_{\Gamma(z,1)}$$

先先看第二部分 $\Gamma(z,1) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$的解析性

- 当$t\geq 1$时，被积函数$e^{-t}t^{z-1}$是t的连续函数
- 作为z的函数，在全平面解析
- 要证明它代表一个解析函数，就只需证明积分一致收敛

$$\boxed{e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} e^t>\dfrac{t^N}{N!} \\ e^{-t}<\dfrac{N!}{t^N} \end{array} \quad \forall N\in\mathbb{N}}$$

$\Gamma(z,1)=\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

- 当$t\geq 1$时，被积函数$\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}$是t的连续函数
- 作为z的函数，在全平面解析
- 要证明它代表一个解析函数，就只需证明积分一致收敛

$$\mathrm{e}^{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l}\mathrm{e}^{t}>\dfrac{t^N}{N!}\\[2ex] \mathrm{e}^{-t}<\dfrac{N!}{t^N}\end{array}\qquad \forall N\in\mathbb{N}$$

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

- 当$t\geq 1$时，被积函数$\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}$是t的连续函数
- 作为z的函数，在全平面解析
- 要证明它代表一个解析函数，就只需证明积分一致收敛

$$\boxed{\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}&\mathrm{e}^t>\frac{t^N}{N!} \\ &\mathrm{e}^{-t}<\frac{N!}{t^N}\end{aligned} \qquad \forall N\in\mathbb{N}}$$

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

- 当$t\geq 1$时，被积函数$\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}$是t的连续函数
- 作为z的函数，在全平面解析
- 要证明它代表一个解析函数，就只需证明积分一致收敛

$$\boxed{\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{e}^t>\dfrac{t^N}{N!} & \\ & \forall N\in\mathbb{N} \\ \mathrm{e}^{-t}<\dfrac{N!}{t^N} & \end{array}}$$

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

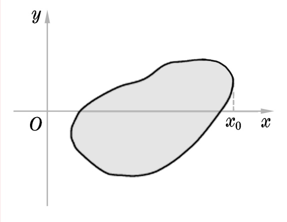
- 当$t\geq 1$时，被积函数$\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}$是t的连续函数
- 作为z的函数，在全平面解析
- 要证明它代表一个解析函数，就只需证明积分一致收敛

$$\boxed{\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}&\mathrm{e}^t>\frac{t^N}{N!}\\&\mathrm{e}^{-t}<\frac{N!}{t^N}\end{aligned}\qquad \forall N\in\mathbb{N}}$$

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

故对于z平面上任一闭区域(区域内任意一点，均有$\mathrm{Re}\, z<x_0$)

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| < N!\cdot t^{x_0-N-1}$$



- 只要选择足够大的N(使得$N>x_0$)

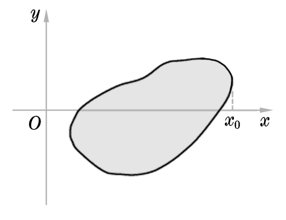
$$\text{积分}\int_1^\infty t^{x_0-N-1}\mathrm{d}t\text{就收敛}$$

- 故$\Gamma(z,1)$在z平面内闭一致收敛
- 因此$\Gamma(z,1)$在全平面解析

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

故对于z平面上任一闭区域(区域内任意一点，均有$\mathrm{Re}\, z<x_0$)

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| < N!\cdot t^{x_0-N-1}$$



- 只要选择足够大的N(使得$N>x_0$)

  积分$\int_1^\infty t^{x_0-N-1}\mathrm{d}t$就收敛

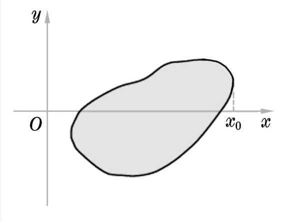
- 故$\Gamma(z,1)$在z平面内闭一致收敛

- 因此$\Gamma(z,1)$在全平面解析

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

故对于z平面上任一闭区域(区域内任意一点，均有$\mathrm{Re}\, z<x_0$)

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| < N!\cdot t^{x_0-N-1}$$



- 只要选择足够大的N(使得$N>x_0$)

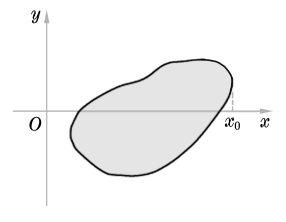
$$积分\int_1^\infty t^{x_0-N-1}\mathrm{d}t就收敛$$

- 故$\Gamma(z,1)$在z平面内闭一致收敛
- 因此$\Gamma(z,1)$在全平面解析

$\Gamma(z,1)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

故对于z平面上任一闭区域(区域内任意一点，均有$\mathrm{Re}\, z<x_0$)

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| < N!\cdot t^{x_0-N-1}$$



- 只要选择足够大的N(使得$N>x_0$)

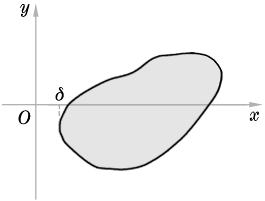
$$积分\int_1^\infty t^{x_0-N-1}\mathrm{d}t就收敛$$

- 故$\Gamma(z,1)$在z平面内闭一致收敛
- 因此$\Gamma(z,1)$在全平面解析

$\gamma(z,1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

关键也是证明它的一致收敛性

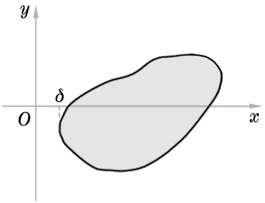
- 因为$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ $(x = \mathrm{Re}\,z)$



$\gamma(z,1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

关键也是证明它的一致收敛性

- 因为$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right|=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$　$(x=\mathrm{Re}\,z)$



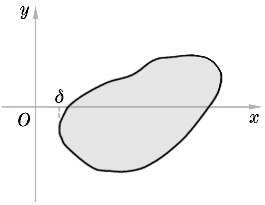
$\gamma(z,1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

关键也是证明它的一致收敛性

- 因为$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \qquad (x=\mathrm{Re}\,z)$
- 所以对于z平面上右半平面的任一区域，有$\mathrm{Re}\,z \geq \delta > 0$

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| \leq t^{\delta-1}$$

- 而$\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$收敛



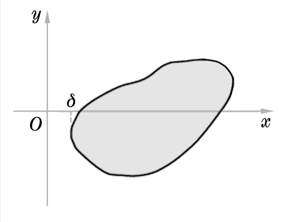
$\gamma(z,1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

关键也是证明它的一致收敛性

- 因为$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \qquad (x=\mathrm{Re}\,z)$

- 所以对于z平面上右半平面的任一区域，有$\mathrm{Re}\,z \geq \delta > 0$
$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| \leq t^{\delta-1}$$

- 而$\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$收敛

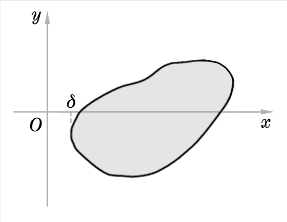


$\gamma(z,1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

关键也是证明它的一致收敛性

- 因为$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \qquad (x=\mathrm{Re}\,z)$

- 所以对于z平面上右半平面的任一区域，有$\mathrm{Re}\,z \geq \delta > 0$
$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| \leq t^{\delta-1}$$
- 而$\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$收敛



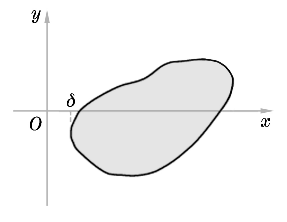
- 故$\gamma(z,1)$在z平面上右半平面内闭一致收敛
- 因此$\gamma(z,1)$在右半平面解析

$\gamma(z,1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

关键也是证明它的一致收敛性

- 因为$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \qquad (x=\mathrm{Re}\, z)$

- 所以对于z平面上右半平面的任一区域，有$\mathrm{Re}\, z \geq \delta > 0$
$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| \leq t^{\delta-1}$$
- 而$\displaystyle\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$收敛



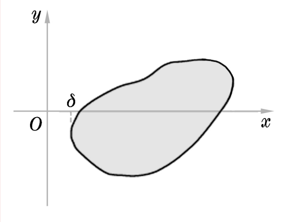
- 故$\gamma(z,1)$在z平面上右半平面内闭一致收敛
- 因此$\gamma(z,1)$在右半平面解析

$\gamma(z,1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$的解析性

关键也是证明它的一致收敛性

- 因为$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \qquad (x=\mathrm{Re}\,z)$

- 所以对于z平面上右半平面的任一区域，有$\mathrm{Re}\,z \geq \delta > 0$
$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| \leq t^{\delta-1}$$
- 而$\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$收敛

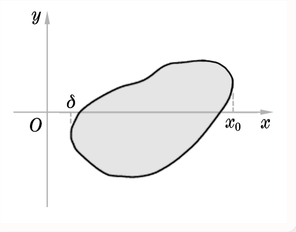


- 故$\gamma(z,1)$在z平面上右半平面内闭一致收敛
- 因此$\gamma(z,1)$在右半平面解析

$\Gamma(z)$的解析性

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\gamma(z,1)}+\underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\Gamma(z,1)}$$

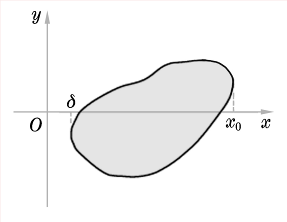
- $\Gamma(z,1)$在全平面解析
- $\gamma(z,1)$在右半平面解析
- 因此$\Gamma(z)$在右半平面解析



$\Gamma(z)$的解析性

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\gamma(z,1)}+\underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\Gamma(z,1)}$$

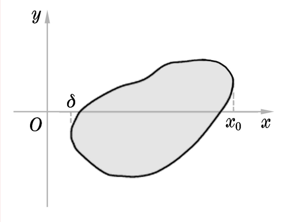
- $\Gamma(z,1)$在全平面解析
- $\gamma(z,1)$在右半平面解析
- 因此$\Gamma(z)$在右半平面解析



$\Gamma(z)$的解析性

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\gamma(z,1)}+\underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\Gamma(z,1)}$$

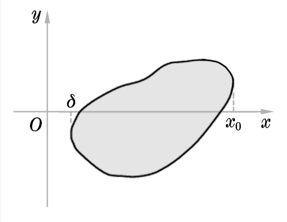
- $\Gamma(z,1)$在全平面解析
- $\gamma(z,1)$在右半平面解析
- 因此$\Gamma(z)$在右半平面解析



$\Gamma(z)$的解析性

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\gamma(z,1)}+\underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\Gamma(z,1)}$$

- $\Gamma(z,1)$在全平面解析
- $\gamma(z,1)$在右半平面解析
- 因此$\Gamma(z)$在右半平面解析



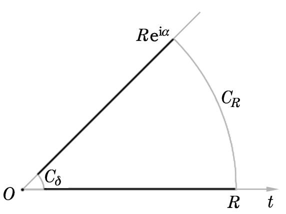
积分路径的修改

- 上面的积分定义中，积分路径并不需要限定在实轴上，而可修改为

$$\Gamma(z)=\int_L \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,z>0$$

积分路径L是t平面上从$t=0$出发的半射线

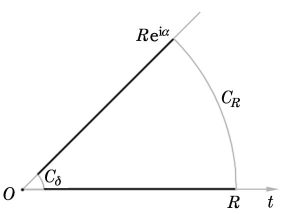
$\arg t=\alpha$为常数，$|\alpha|<\pi/2$



- 进一步修改：积分路径L可以是t平面上从$t=0$出发的任意分段光滑曲线，只要最后以$\mathrm{Re}\,t\to+\infty$的方式趋于无穷远点即可

积分路径的修改

- 上面的积分定义中，积分路径并不需要限定在实轴上，而可修改为
  $$\Gamma(z) = \int_L e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$
  积分路径L是t平面上从$t=0$出发的半射线
  $$\arg t = \alpha \text{为常数，} |\alpha| < \pi/2$$



- 进一步修改：积分路径L可以是t平面上从$t=0$出发的任意分段光滑曲线，只要最后以$\mathrm{Re}\, t \to +\infty$的方式趋于无穷远点即可

解析延拓

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\gamma(z,1)}+\underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\Gamma(z,1)}$$

- Γ函数的上述定义只适用于$\mathrm{Re}\, z>0$
- 积分的第一部分在右半平面解析，第二部分在全平面解析
- 因此，为了延拓到z的全平面，只要用适当的方法将积分第一部分延拓到全平面即可

解析延拓

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\gamma(z,1)}+\underbrace{\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t}_{\Gamma(z,1)}$$

- Γ函数的上述定义只适用于$\mathrm{Re}\, z > 0$
- 积分的第一部分在右半平面解析，第二部分在全平面解析
- 因此，为了延拓到z的全平面，只要用适当的方法将积分第一部分延拓到全平面即可

解析延拓

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\underbrace{\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt}_{\gamma(z,1)}+\underbrace{\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt}_{\Gamma(z,1)}$$

- Γ函数的上述定义只适用于$\mathrm{Re}\,z>0$
- 积分的第一部分在右半平面解析，第二部分在全平面解析
- 因此，为了延拓到z的全平面，只要用适当的方法将积分第一部分延拓到全平面即可

解析延拓

- 比较直接的方法是将指数函数作Taylor展开

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$$

- 这个结果是在$\mathrm{Re}\, z > 0$的条件下得到的
- 但右端的级数显然在全平面上($z \neq 0, -1, -2, \cdots$)一致收敛，因而在全平面解析($z \neq 0, -1, -2, \cdots$)

解析延拓

- 比较直接的方法是将指数函数作Taylor展开

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$$

- 这个结果是在$\mathrm{Re}\,z > 0$的条件下得到的
- 但右端的级数显然在全平面上($z \neq 0, -1, -2, \cdots$)一致收敛，因而在全平面解析($z \neq 0, -1, -2, \cdots$)

解析延拓

- 比较直接的方法是将指数函数作Taylor展开
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$$
- 这个结果是在$\mathrm{Re}\, z > 0$的条件下得到的
- 但右端的级数显然在全平面上$(z \neq 0, -1, -2, \cdots)$一致收敛，因而在全平面解析$(z \neq 0, -1, -2, \cdots)$

解析延拓

- 这说明，等式

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$$

右端的级数表达式就是左端积分表达式在全平面上的解析延拓

- 因此，$\Gamma(z)$的下列表达式在全平面有效

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$$

$$(z \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

解析延拓

- 这说明，等式
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$$
右端的级数表达式就是左端积分表达式在全平面上的解析延拓
- 因此，$\Gamma(z)$的下列表达式在全平面有效
$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$$
$$(z \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

性质1

$\Gamma(1) = 1$

【证】直接在Γ函数的定义中代入$z = 1$即得

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

性质1

$\Gamma(1) = 1$

【证】直接在Γ函数的定义中代入$z=1$即得

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

性质1

$\Gamma(1) = 1$

【证】 直接在Γ函数的定义中代入$z=1$即得

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{1-1} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = 1$$

性质1

$\Gamma(1)=1$

【证】 直接在Γ函数的定义中代入$z=1$即得

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{1-1}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$$

性质1

$\Gamma(1) = 1$

【证】 直接在Γ函数的定义中代入$z=1$即得

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{1-1} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = 1$$

性质2

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

【证】根据Γ函数的定义

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^z\mathrm{d}t\\&=-\mathrm{e}^{-t}t^z\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}zt^{z-1}\mathrm{d}t\\&=z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\\&=z\Gamma(z)\qquad\square\end{aligned}$$

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

【证】根据Γ函数的定义

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt$$

$$= -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt$$

$$= z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$= z\Gamma(z) \qquad \square$$

性质2

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

【证】 根据Γ函数的定义

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^z\mathrm{d}t$$

$$=-\mathrm{e}^{-t}t^z\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}zt^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$=z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$=z\Gamma(z) \qquad \square$$

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

【证】 根据Γ函数的定义

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^z \mathrm{d}t$$

$$= -\mathrm{e}^{-t} t^z \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} z t^{z-1} \mathrm{d}t$$

$$= z \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

$$= z\Gamma(z) \qquad \square$$

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

【证】 根据Γ函数的定义

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^z \mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-t} t^z \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} z t^{z-1} \mathrm{d}t \\ &= z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \\ &= z\Gamma(z) \qquad \square\end{aligned}$$

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

第一种看法

- 证明过程中用到了条件$\mathrm{Re}\, z > 0$
- $\Gamma(z+1)$和$z\Gamma(z)$都在全平面解析($z = 0, -1, -2, \cdots$除外)
- 因此，根据解析延拓原理，可以断定，这一递推关系在全平面均成立

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第一种看法

- 证明过程中用到了条件$\mathrm{Re}\, z > 0$
- $\Gamma(z+1)$和$z\Gamma(z)$都在全平面解析 ($z = 0, -1, -2, \cdots$ 除外)
- 因此，根据解析延拓原理，可以断定，这个递推关系在全平面均成立

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第一种看法

- 证明过程中用到了条件$\mathrm{Re}\, z > 0$
- $\Gamma(z+1)$和$z\Gamma(z)$都在全平面解析 $(z = 0, -1, -2, \cdots$ 除外$)$
- 因此，根据解析延拓原理，可以断定，这个递推关系在全平面均成立

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

第一种看法

- 证明过程中用到了条件$\mathrm{Re}\, z > 0$
- $\Gamma(z+1)$和$z\Gamma(z)$都在全平面解析 ($z = 0, -1, -2, \cdots$ 除外)
- 因此，根据解析延拓原理，可以断定，这个递推关系在全平面均成立

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

第二种看法

直接通过此递推关系来完成Γ函数的解析延拓

- 将递推关系改写成$\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}\Gamma(z+1)$
- 左端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > 0$上解析
- 右端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > -1$上解析

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

直接通过此递推关系来完成Γ函数的解析延拓

- 将递推关系改写成$\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}\Gamma(z+1)$
- 左端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > 0$上解析
- 右端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > -1$上解析
- 两者在公共区域$\mathrm{Re}\, z > 0$上相等
- $\Gamma(z+1)/z$就是右端的$\Gamma(z)$在区域$\mathrm{Re}\, z > -1$上的解析延拓

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

直接通过此递推关系来完成Γ函数的解析延拓

- 将递推关系改写成$\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}\Gamma(z+1)$
- 左端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > 0$上解析
- 右端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > -1$上解析
- 两者在公共区域$\mathrm{Re}\, z > 0$上相等
- $\Gamma(z+1)/z$就是右端的$\Gamma(z)$在区域$\mathrm{Re}\, z > -1$上的解析延拓

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

直接通过此递推关系来完成Γ函数的解析延拓

- 将递推关系改写成$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$
- 左端的函数在半平面$\operatorname{Re} z > 0$上解析
- 右端的函数在半平面$\operatorname{Re} z > -1$上解析
- 两者在公共区域$\operatorname{Re} z > 0$上相等
- $\Gamma(z+1)/z$就是右端的$\Gamma(z)$在区域$\operatorname{Re} z > -1$上的解析延拓

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

直接通过此递推关系来完成Γ函数的解析延拓

- 将递推关系改写成$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$
- 左端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > 0$上解析
- 右端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > -1$上解析
- 两者在公共区域$\mathrm{Re}\, z > 0$上相等
- $\Gamma(z+1)/z$就是右端的$\Gamma(z)$在区域$\mathrm{Re}\, z > -1$上的解析延拓

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

直接通过此递推关系来完成Γ函数的解析延拓

- 将递推关系改写成$\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}\Gamma(z+1)$
- 左端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > 0$上解析
- 右端的函数在半平面$\mathrm{Re}\, z > -1$上解析
- 两者在公共区域$\mathrm{Re}\, z > 0$上相等
- $\Gamma(z+1)/z$就是右端的$\Gamma(z)$在区域$\mathrm{Re}\, z > -1$上的解析延拓

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

- 仍将$\Gamma(z+1)/z$记为$\Gamma(z)$
- 这就是说，可以把

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \qquad z \neq 0$$

看成是$\Gamma(z)$在区域$\mathrm{Re}\, z > 1$上的定义

- $z = 0$点是Γ 函数的一阶极点

$$\mathrm{res}\,\Gamma(0) = 1$$

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

- 仍将$\Gamma(z+1)/z$记为$\Gamma(z)$
- 这就是说，可以把
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \qquad z \neq 0$$
看成是$\Gamma(z)$在区域$\mathrm{Re}\, z > 1$上的定义
- $z=0$点是Γ 函数的一阶极点
$$\mathrm{res}\,\Gamma(0) = 1$$

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

- 仍将$\Gamma(z+1)/z$记为$\Gamma(z)$
- 这就是说，可以把
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \qquad z \neq 0$$
看成是$\Gamma(z)$在区域$\mathrm{Re}\, z > 1$上的定义
- $z = 0$点是Γ 函数的一阶极点
$$\mathrm{res}\,\Gamma(0) = 1$$

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

第二种看法

- 重复上述步骤，还可以将Γ函数延拓到区域 $\operatorname{Re} z > -2$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2) \qquad z \neq 0, -1$$

$z=-1$也是Γ函数的一阶极点，$\operatorname{res}\Gamma(-1)=-1$

- 如此继续，就可将Γ函数解析延拓到全平面，而$z = 0, -1, -2, \cdots$都是Γ函数的一阶极点

$$\operatorname{res}\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

性质2

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

第二种看法

- 重复上述步骤，还可以将Γ函数延拓到区域$\mathrm{Re}\, z > -2$
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2) \qquad z \neq 0, -1$$
$z = -1$也是Γ函数的一阶极点，$\mathrm{res}\,\Gamma(-1) = -1$
- 如此继续，就可将Γ函数解析延拓到全平面，而$z = 0, -1, -2, \cdots$都是Γ函数的一阶极点
$$\mathrm{res}\,\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

推论

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

正是因为这个原因，Γ函数又称为阶乘函数

性质2

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

推论

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

正是因为这个原因，Γ函数又称为阶乘函数

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

证明见下节

推论

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

只要在性质3中代入$z=1/2$，并注意$\Gamma(1/2)>0$（因为被积函数值恒为正）即可得此结果

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

证明见下节

推论

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

只要在性质3中代入$z=1/2$，并注意$\Gamma(1/2)>0$（因为被积函数值恒为正)即可得此结果

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

证明见下节

推论

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

只要在性质3中代入$z=1/2$，并注意$\Gamma(1/2)>0$（因为被积函数值恒为正）即可得此结果

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

证明见下节

推论

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

只要在性质3中代入$z=1/2$，并注意$\Gamma(1/2)>0$（因为被积函数值恒为正)即可得此结果

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

推论　Γ函数在全平面无零点

- 因为$\pi/\sin\pi z\neq 0$，所以$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\neq 0$
- 这样，如果在$z=z_0$点有$\Gamma(z_0)=0$，则必有$\Gamma(1-z_0)=\infty$
- 这只能发生在$1-z_0=-n$　（亦即$z_0=n+1$），$n=0,1,2,\cdots$时
- 但此时$\Gamma(z_0)=\Gamma(n+1)=n!$，与所设矛盾
- 因此Γ函数在全平面无零点

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

推论　Γ函数在全平面无零点

- 因为$\pi/\sin\pi z\neq 0$，所以$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\neq 0$
- 这样，如果在$z=z_0$点有$\Gamma(z_0)=0$，则必有$\Gamma(1-z_0)=\infty$
- 这只能发生在$1-z_0=-n$（亦即$z_0=n+1$），$n=0,1,2,\cdots$时
- 但此时$\Gamma(z_0)=\Gamma(n+1)=n!$，与所设矛盾
- 因此Γ函数在全平面无零点

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

推论　Γ函数在全平面无零点

- 因为$\pi/\sin\pi z\neq 0$，所以$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\neq 0$
- 这样，如果在$z=z_0$点有$\Gamma(z_0)=0$，则必有$\Gamma(1-z_0)=\infty$
- 这只能发生在$1-z_0=-n$　（亦即$z_0=n+1$），$n=0,1,2,\cdots$时
- 但此时$\Gamma(z_0)=\Gamma(n+1)=n!$，与所设矛盾
- 因此Γ函数在全平面无零点

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

推论　Γ函数在全平面无零点

- 因为$\pi/\sin\pi z\neq 0$，所以$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\neq 0$
- 这样，如果在$z=z_0$点有$\Gamma(z_0)=0$，则必有$\Gamma(1-z_0)=\infty$
- 这只能发生在$1-z_0=-n$　（亦即$z_0=n+1$），$n=0,1,2,\cdots$时
- 但此时$\Gamma(z_0)=\Gamma(n+1)=n!$，与所设矛盾
- 因此Γ函数在全平面无零点

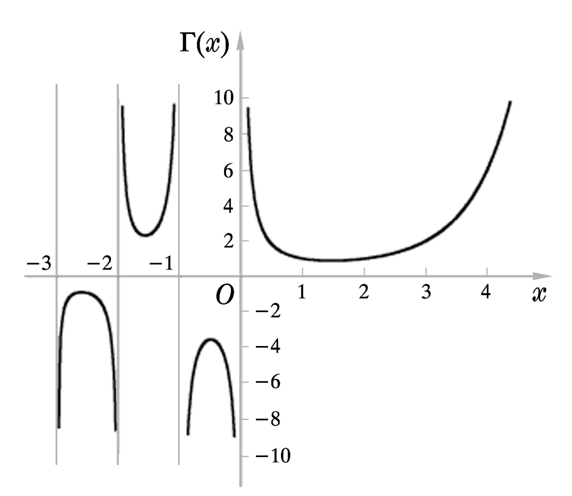
性质3 互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

推论 Γ函数在全平面无零点

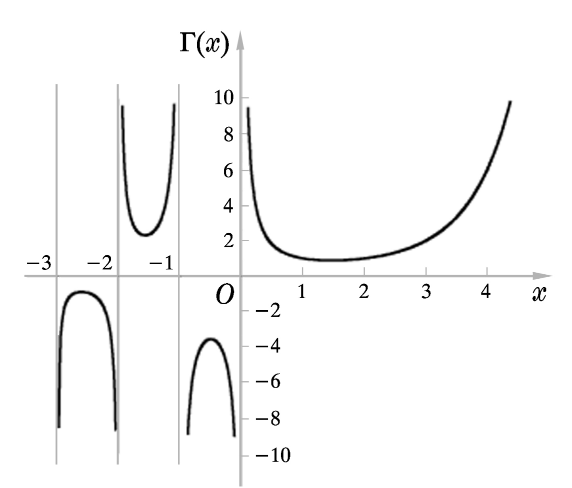
- 因为$\pi/\sin\pi z\neq 0$，所以$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\neq 0$
- 这样，如果在$z=z_0$点有$\Gamma(z_0)=0$，则必有$\Gamma(1-z_0)=\infty$
- 这只能发生在$1-z_0=-n$ （亦即$z_0=n+1$），$n=0,1,2,\cdots$时
- 但此时$\Gamma(z_0)=\Gamma(n+1)=n!$，与所设矛盾
- 因此Γ函数在全平面无零点

x为实数时$\Gamma(x)$的图形



从实数范围直观表现出上述推论及Γ函数的奇点分布

x为实数时$\Gamma(x)$的图形



从实数范围直观表现出上述推论及Γ函数的奇点分布

性质4　倍乘公式

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

证明亦见下节

对此式的理解：$z=n$的特殊情形

$$\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\pi^{-1/2}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)$$

即

$$(2n-1)! = 2^{2n-1}(n-1)!(n-1/2) \times (n-3/2)\cdots(3/2)(1/2)$$

☞ 你能否预测$\Gamma(3z)=$?

性质4 倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

证明亦见下节

对此式的理解：$z=n$的特殊情形

$$\Gamma(2n)=2^{2n-1}\pi^{-1/2}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)$$

即

$$(2n-1)!=2^{2n-1}(n-1)!(n-1/2)\times(n-3/2)\cdots(3/2)(1/2)$$

☞ 你能否预测$\Gamma(3z)=?$

性质4　倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

证明亦见下节

对此式的理解：$z=n$的特殊情形

$$\Gamma(2n)=2^{2n-1}\pi^{-1/2}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)$$

即

$$(2n-1)!=2^{2n-1}(n-1)!(n-1/2)\times(n-3/2)\cdots(3/2)(1/2)$$

☞ 你能否预测$\Gamma(3z)=?$

性质4 倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

证明亦见下节

对此式的理解：$z=n$的特殊情形

$$\Gamma(2n)=2^{2n-1}\pi^{-1/2}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)$$

即

$$\begin{aligned}(2n-1)!=2^{2n-1}&(n-1)!(n-1/2)\\&\times(n-3/2)\cdots(3/2)(1/2)\end{aligned}$$

☞ 你能否预测$\Gamma(3z)=?$

性质4 倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

证明亦见下节

对此式的理解：$z=n$的特殊情形

$$\Gamma(2n)=2^{2n-1}\pi^{-1/2}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)$$

即

$$(2n-1)!=2^{2n-1}(n-1)!(n-1/2)\\ \times(n-3/2)\cdots(3/2)(1/2)$$

☞ 你能否预测$\Gamma(3z)=$?

性质5　Γ函数的渐近展开(Stirling公式)　(不证)

当$|z|\to\infty$，$|\arg z|<\pi$时，有

$$\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\cdots\right\}$$

$$\ln\Gamma(z)\sim\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\frac{1}{1680z^7}+\cdots$$

物理中常用　$\ln n!\sim n\ln n-n$

性质5　Γ函数的渐近展开(Stirling公式)　(不证)

当$|z| \to \infty$，$|\arg z| < \pi$时，有

$$\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} e^{-z} \sqrt{2\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots \right\}$$

$$\ln\Gamma(z) \sim \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \cdots$$

物理中常用　$\ln n! \sim n\ln n - n$

性质5　Γ函数的渐近展开(Stirling公式)　(不证)

当$|z|\to\infty$，$|\arg z|<\pi$时，有

$$\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi}\Big\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\cdots\Big\}$$

$$\ln\Gamma(z)\sim\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\frac{1}{1680z^7}+\cdots$$

物理中常用　$\ln n!\sim n\ln n-n$

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

B函数的常用定义

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

其中的积分变量t应该理解为$\arg t = 0$

这个积分称为第一类Euler积分

作变换$t=\sin^2\theta$，可得到B函数的另一个表达式

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

B函数的常用定义

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

其中的积分变量t应该理解为$\arg t=0$

这个积分称为第一类Euler积分

作变换$t=\sin^2\theta$，可得到B函数的另一个表达式

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

B函数的常用定义

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

其中的积分变量t应该理解为$\arg t=0$

这个积分称为第一类Euler积分

作变换$t=\sin^2\theta$，可得到B函数的另一个表达式

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

作变换$s=1-t$，可得

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_1^0 (1-s)^{p-1}s^{q-1}(-\mathrm{d}s)$$

$$=\int_0^1 s^{q-1}(1-s)^{p-1}\mathrm{d}s$$

$$\therefore \qquad \mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

作变换$s=1-t$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)&=\int_1^0(1-s)^{p-1}s^{q-1}(-\mathrm{d}s)\\&=\int_0^1 s^{q-1}(1-s)^{p-1}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

作变换$s=1-t$，可得

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_1^0 (1-s)^{p-1}s^{q-1}(-\mathrm{d}s)$$

$$=\int_0^1 s^{q-1}(1-s)^{p-1}\mathrm{d}s$$

$$\therefore \qquad \mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

作变换$s=1-t$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)&=\int_1^0 (1-s)^{p-1}s^{q-1}(-\mathrm{d}s)\\&=\int_0^1 s^{q-1}(1-s)^{p-1}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,p>0 \quad \mathrm{Re}\,q>0$$

作变换$s=1-t$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q) &= \int_1^0 (1-s)^{p-1}s^{q-1}(-\mathrm{d}s)\\ &= \int_0^1 s^{q-1}(1-s)^{p-1}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$$

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

【证】在$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$的条件下，显然有

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}y$$

$$\therefore\quad \Gamma(p)\,\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，即得

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

【证】 在$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$的条件下，显然有

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}y$$

$$\therefore\quad \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，即得

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

【证】 在$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$的条件下，显然有

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}y$$

$$\therefore\quad \Gamma(p)\,\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，即得

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

【证】在$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$的条件下，显然有

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}y$$

$$\therefore\quad \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，即得

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

【证】在$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$的条件下，显然有

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}y$$

$$\therefore\quad \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，即得

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r^{2p+2q-2}r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\qquad\square$$

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^\infty\mathrm{e}^{-r^2}r^{2p+2q-2}r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\qquad\square\end{aligned}$$

- 从这个关系式，可以清楚地看出$\mathrm{B}(p,q)$对于p和q对称
- 利用这个关系式，可把B函数解析延拓到p, q的全平面

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r^{2p+2q-2}r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\qquad\square\end{aligned}$$

- 从这个关系式，可以清楚地看出$\mathrm{B}(p,q)$对于p和q对称
- 利用这个关系式，可把B函数解析延拓到p和q的全平面

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^\infty\mathrm{e}^{-r^2}r^{2p+2q-2}r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\qquad\square\end{aligned}$$

- 从这个关系式，可以清楚地看出$\mathrm{B}(p,q)$对于p和q对称
- 利用这个关系式，可把B函数解析延拓到p和q的全平面

B函数可以用Γ函数表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}r^{2p+2q-2}r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\qquad\square\end{aligned}$$

- 从这个关系式，可以清楚地看出$\mathrm{B}(p,q)$对于p和q对称
- 利用这个关系式，可把B函数解析延拓到p和q的全平面

讲授要点

1. Γ函数
   - Γ函数的定义
   - Γ函数的解析性
   - Γ函数的基本性质
2. B函数
   - B函数的定义
   - B函数与Γ函数
   - 有关Γ函数两个公式的证明

补证有关Γ函数的两个性质

性质3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

性质4　倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

互余宗量定理$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$的证明

【证】计算积分

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t$$

作变换$x=t/(1-t)$，上式即可化为

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

这个积分在上一讲已经计算过，这样就求得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

另一方面，将$\mathrm{B}(z,1-z)$表示为Γ函数，即证得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

互余宗量定理$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$的证明

【证】计算积分

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t$$

作变换$x=t/(1-t)$，上式即可化为

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

这个积分在上一讲已经计算过，这样就求得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

另一方面，将$\mathrm{B}(z,1-z)$表示为Γ函数，即证得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

互余宗量定理$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$的证明

【证】计算积分

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t$$

作变换$x=t/(1-t)$，上式即可化为

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

这个积分在上一讲已经计算过，这样就求得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

另一方面，将$\mathrm{B}(z,1-z)$表示为Γ函数，即证得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

互余宗量定理$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$的证明

【证】计算积分

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t$$

作变换$x=t/(1-t)$，上式即可化为

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

这个积分在上一讲已经计算过，这样就求得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

另一方面，将$\mathrm{B}(z,1-z)$表示为Γ函数，即证得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

互余宗量定理$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$的证明

【解析延拓】以上的证明是在

$$\mathrm{Re}\, z>0 \qquad \mathrm{Re}\,(1-z)>0$$

亦即

$$0<\mathrm{Re}\, z<1$$

的条件下进行的．但是，由于等式的两端在全平面都解析，因此，根据解析延拓原理可知，此等式在全平面成立

互余宗量定理 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ 的证明

【解析延拓】 以上的证明是在

$$\operatorname{Re} z>0 \qquad \operatorname{Re}(1-z)>0$$

亦即

$$0<\operatorname{Re} z<1$$

的条件下进行的．但是，由于等式的两端在全平面都解析，因此，根据解析延拓原理可知，此等式在全平面成立

互余宗量定理$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$的证明

【解析延拓】以上的证明是在

$$\mathrm{Re}\,z>0 \qquad \mathrm{Re}\,(1-z)>0$$

亦即

$$0<\mathrm{Re}\,z<1$$

的条件下进行的．但是，由于等式的两端在全平面都解析，因此，根据解析延拓原理可知，此等式在全平面成立

倍乘公式$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

【证】计算积分$I=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$

❶ 作变换$t=x^2$，即得

$$I=2\int_0^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{B}(z,1/2)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}$$

❷ 作变换$1+x=2t$，$1-x=2(1-t)$，则有

$$I=2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$=2^{2z-1}\mathrm{B}(z,z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

倍乘公式$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

【证】 计算积分$I = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$

❶ 作变换$t = x^2$，即得

$$I = 2\int_0^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x = \int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{B}(z, 1/2) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}$$

❷ 作变换$1+x = 2t$，$1-x = 2(1-t)$，则有

$$I = 2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$= 2^{2z-1}\mathrm{B}(z, z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

倍乘公式$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

【证】 计算积分$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$

❶ 作变换$t=x^2$，即得

$$I=2\int_0^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{B}(z,1/2)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}$$

❷ 作变换$1+x=2t$，$1-x=2(1-t)$，则有

$$I=2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$=2^{2z-1}\mathrm{B}(z,z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

倍乘公式$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

【证】计算积分$I = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$

❶ 作变换$t = x^2$，即得

$$I = 2\int_0^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x = \int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{B}(z, 1/2) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}$$

❷ 作变换$1+x=2t$，$1-x=2(1-t)$，则有

$$I = 2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$= 2^{2z-1}\mathrm{B}(z,z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

倍乘公式$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

【证】计算积分$I=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$

❶ 作变换$t=x^2$，即得

$$I=2\int_0^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{B}(z,1/2)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}$$

❷ 作变换$1+x=2t$，$1-x=2(1-t)$，则有

$$I=2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$=2^{2z-1}\mathrm{B}(z,z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

倍乘公式$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

【证】 计算积分$I = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$

❶ 作变换$t = x^2$，即得

$$I = 2\int_0^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x = \int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{B}(z, 1/2) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}$$

❷ 作变换$1 + x = 2t$，$1 - x = 2(1-t)$，则有

$$I = 2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$= 2^{2z-1}\mathrm{B}(z, z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

倍乘公式$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

【证】计算积分$I=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$

❶ 作变换$t=x^2$，即得

$$I=2\int_0^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{B}(z,1/2)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}$$

❷ 作变换$1+x=2t$，$1-x=2(1-t)$，则有

$$I=2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$

$$=2^{2z-1}\mathrm{B}(z,z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

倍乘公式$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

$$\therefore \qquad I = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)} = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

$$\therefore \qquad \Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \qquad \square$$

【解析延拓】以上的证明是在$\mathrm{Re}\, z > 0$的条件下进行的．但根据解析延拓原理可知，此等式在全平面成立

倍乘公式$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

$$\therefore \qquad I = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{z-1} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)} = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

$$\therefore \qquad \Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \qquad \square$$

【解析延拓】以上的证明是在$\mathrm{Re}\, z > 0$的条件下进行的．但根据解析延拓原理可知，此等式在全平面成立

倍乘公式$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

$$\therefore \qquad I=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

$$\therefore \qquad \Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \qquad \square$$

【解析延拓】以上的证明是在$\mathrm{Re}\,z>0$的条件下进行的．但根据解析延拓原理可知，此等式在全平面成立

倍乘公式$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$的证明

$$\therefore\qquad I=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

$$\therefore\qquad \Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)\qquad\square$$

【解析延拓】以上的证明是在$\operatorname{Re} z>0$的条件下进行的．但根据解析延拓原理可知，此等式在全平面成立