第 十 二 讲

留数定理及其应用(二)

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 留数定理计算定积分(续)
   - 含三角函数的无穷积分
   - 实轴上有奇点的情形
   - 多值函数的积分

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§7.4 — 7.6
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§4.2, 4.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§5.3, 5.4, 5.5

讲授要点

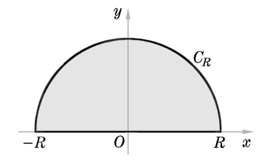
1. 留数定理计算定积分(续)
   - 含三角函数的无穷积分
   - 实轴上有奇点的情形
   - 多值函数的积分

预备知识：Jordan引理

设在$0\leq\arg z\leq\pi$范围内，当$|z|\to\infty$时$Q(z)\rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=0$$

其中$p>0$，C_R是以原点为圆心、R为半径的上半圆



【证】当z在C_R上时，$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^\pi Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}pR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right|$$

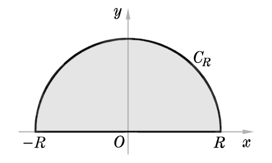
$$\leq\int_0^\pi\left|Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta$$

预备知识：Jordan引理

设在$0 \leq \arg z \leq \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时$Q(z) \rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0$$

其中$p > 0$，C_R是以原点为圆心、R为半径的上半圆



【证】 当z在C_R上时，$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}pR(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right|$$

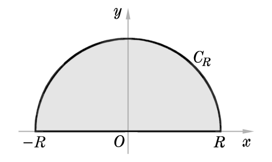
$$\leq \int_0^\pi \left|Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta$$

预备知识：Jordan引理

设在$0 \leq \arg z \leq \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时$Q(z) \rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} Q(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}pz} \mathrm{d}z = 0$$

其中$p > 0$，C_R是以原点为圆心、R为半径的上半圆



【证】当z在C_R上时，$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

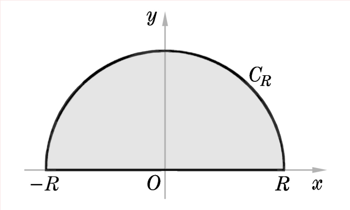
$$\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}pR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)} R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left|Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{e}^{-pR\sin\theta} R\mathrm{d}\theta$$

Jordan引理 （要点）

设在$0\le\arg z\le\pi$范围内，当$|z|\to\infty$时$Q(z)\rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=0$$



【证】 当z在C_R上时，$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\left|\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|\le\int_0^\pi\left|Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta$$

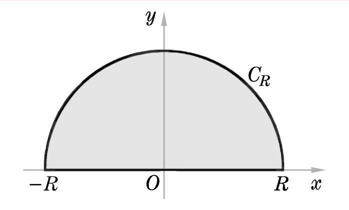
$$\le\varepsilon R\int_0^\pi\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

证明的关键在于精确估计$\sin\theta$值

Jordan引理 （要点）

设在$0 \leq \arg z \leq \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时$Q(z) \rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0$$



【证】 当z在C_R上时，$z = Re^{i\theta}$

$$\left| \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz \right| \leq \int_0^{\pi} \left| Q(Re^{i\theta}) \right| e^{-pR\sin\theta} R d\theta$$

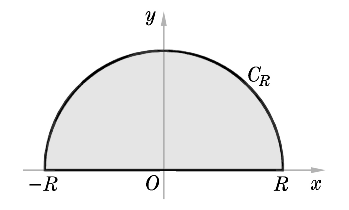
$$\leq \varepsilon R \int_0^{\pi} e^{-pR\sin\theta} d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-pR\sin\theta} d\theta$$

证明的关键在于精确估计$\sin\theta$值

Jordan引理 (要点)

设在$0\leq\arg z\leq\pi$范围内，当$|z|\to\infty$时$Q(z)\rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=0$$



【证】 当z在C_R上时，$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\left|\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|\leq\int_0^{\pi}\left|Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta$$

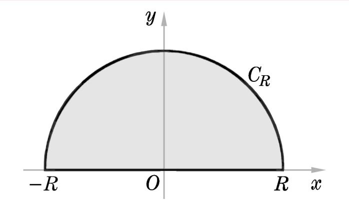
$$\leq\varepsilon R\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

证明的关键在于精确估计$\sin\theta$值

Jordan引理　（要点）

设在$0 \leq \arg z \leq \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时$Q(z) \rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0$$



【证】 当z在C_R上时，$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\left| \int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z \right| \leq \int_0^\pi \left|Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{e}^{-pR\sin\theta} R\mathrm{d}\theta$$

$$\leq \varepsilon R \int_0^\pi \mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

证明的关键在于精确估计$\sin\theta$值

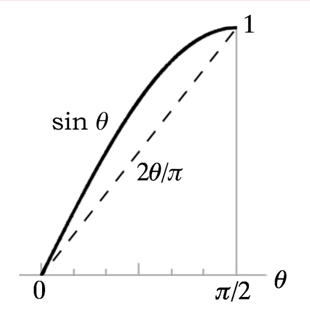
$$\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\cdot 2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\varepsilon R\cdot\frac{\pi}{2pR}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon\pi}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)\longrightarrow 0$$

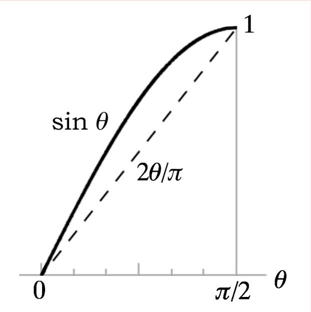


当$0\leq\theta\leq\pi/2$时

$$\sin\theta\geq 2\theta/\pi$$

$$\therefore\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \quad \square$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|
&\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
&\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\cdot 2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= 2\varepsilon R\cdot\frac{\pi}{2pR}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right) \\
&= \frac{\varepsilon\pi}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)\to 0
\end{aligned}
$$

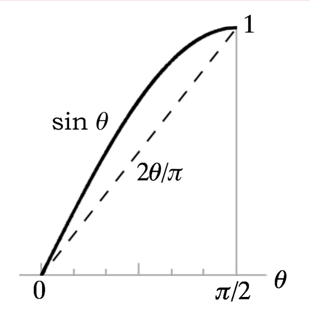


当$0\leq\theta\leq\pi/2$时

$$\sin\theta\geq 2\theta/\pi$$

$$\therefore\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \quad \square$$

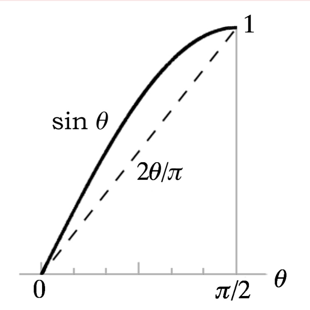
$$\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|$$
$$\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\cdot 2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\varepsilon R\cdot\frac{\pi}{2pR}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)$$
$$= \frac{\varepsilon\pi}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)\to 0$$



当$0\leq\theta\leq\pi/2$时
$$\sin\theta\geq 2\theta/\pi$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \quad \square$$

$$\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|$$
$$\le 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\le 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\cdot 2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\varepsilon R\cdot\frac{\pi}{2pR}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)$$
$$= \frac{\varepsilon\pi}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)\longrightarrow 0$$

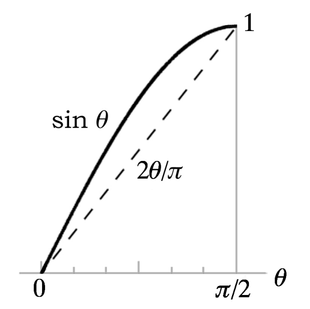


当$0\le\theta\le\pi/2$时

$$\sin\theta\ge 2\theta/\pi$$

$$\therefore\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \quad \square$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right|
&\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\
&\leq 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\cdot 2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta\\
&= 2\varepsilon R\cdot\frac{\pi}{2pR}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)\\
&= \frac{\varepsilon\pi}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)\to 0
\end{aligned}
$$

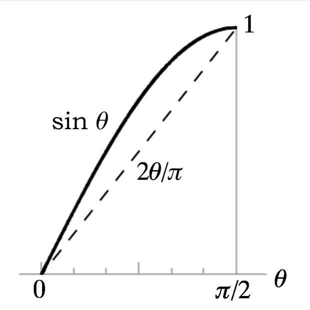


当$0\leq\theta\leq\pi/2$时

$\sin\theta\geq 2\theta/\pi$

$$\therefore\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \quad \square$$

$$\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right| \le 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \le 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\cdot 2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta = 2\varepsilon R\cdot\frac{\pi}{2pR}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right) = \frac{\varepsilon\pi}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right)\to 0$$



当$0\le\theta\le\pi/2$时

$\sin\theta\ge 2\theta/\pi$

$$\therefore\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \quad \Box$$

含三角函数的无穷积分

这类积分的标准形式 （不妨设$p > 0$）

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos px \mathrm{d}x \quad \text{或} \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin px \mathrm{d}x$$

处理这种类型的积分，仍可以采用半圆形的围道

被积函数不能简单地取为$f(z) \cos pz$或$f(z) \sin pz$

原因：不便于直接计算

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) \cos pz \mathrm{d}z \quad \text{或} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) \sin pz \mathrm{d}z$$

含三角函数的无穷积分

这类积分的标准形式 （不妨设$p>0$）

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos px\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$$

处理这种类型的积分，仍可以采用半圆形的围道

被积函数不能简单地取为$f(z)\cos pz$或$f(z)\sin pz$

原因：不便于直接计算

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\cos pz\,\mathrm{d}z \quad 或 \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\sin pz\,\mathrm{d}z$$

含三角函数的无穷积分

这类积分的标准形式 (不妨设$p>0$)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos px\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin px\mathrm{d}x$$

处理这种类型的积分，仍可以采用半圆形的围道

被积函数不能简单地取为$f(z)\cos pz$或$f(z)\sin pz$

原因：不便于直接计算

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\cos pz\mathrm{d}z \quad \text{或} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\sin pz\mathrm{d}z$$

含三角函数的无穷积分

这类积分的标准形式 （不妨设$p>0$）

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\mathrm{d}x \quad 或 \quad I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\mathrm{d}x$$

- 正确的做法是将被积函数取为$f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}$
- 如果函数$f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}$在上半平面内只有有限个奇点，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\left\{f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}$$

含三角函数的无穷积分

这类积分的标准形式　　(不妨设$p>0$)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos px\mathrm{d}x \quad 或 \quad I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin px\mathrm{d}x$$

- 正确的做法是将被积函数取为$f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}$
- 如果函数$f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}$在上半平面内只有有限个奇点，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{上半平面}\mathrm{res}\left\{f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}$$

含三角函数的无穷积分

这类积分的标准形式　　(不妨设$p>0$)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$$

- 如果$f(z)$满足Jordan引理的要求，则有
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{上半平面}\operatorname{res}\left\{f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}$$
- 分别比较实部和虚部，就可以求得
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$$

含三角函数的无穷积分

这类积分的标准形式　　(不妨设$p>0$)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$$

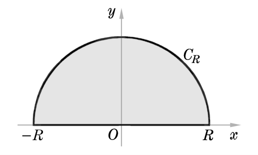
- 如果$f(z)$满足Jordan引理的要求，则有
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{上半平面}\mathrm{res}\,\left\{f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}$$
- 分别比较实部和虚部，就可以求得
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$$

例12.1　计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

【解】考虑复变积分

$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

围道C如右图



$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right\}_{z=\mathrm{i}a}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

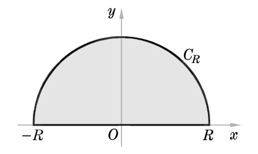
取极限$R\to\infty$

例12.1　计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

【解】考虑复变积分

$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

围道C如右图



$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{res}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right\}_{z=\mathrm{i}a} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a} = \pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

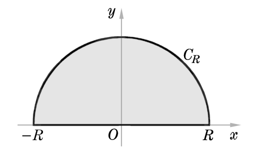
取极限$R\to\infty$

例12.1 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

【解】考虑复变积分

$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

围道C如右图



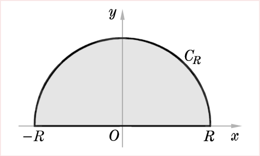
$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right\}_{z=\mathrm{i}a} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a} = \pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

取极限$R\to\infty$

例12.1　计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

【解】考虑复变积分
$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$
围道C如右图



$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right\}_{z=\mathrm{i}a} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a} = \pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

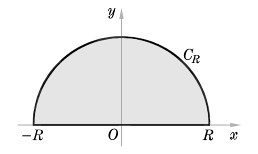
取极限$R\to\infty$

例12.1　计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

【解】考虑复变积分

$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

围道C如右图



$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right\}_{z=\mathrm{i}a}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

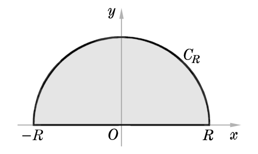
取极限$R\to\infty$

例12.1　计算积分 $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

【解】 考虑复变积分

$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

围道C如右图



$$\oint_C \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\left\{\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right\}_{z=\mathrm{i}a} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a} = \pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

取极限$R\to\infty$

例12.1 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty}\frac{z}{z^2+a^2}=0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=0 \qquad (\text{Jordan引理})$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

例12.1　计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

$\because$
$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^2+a^2} = 0$$

$\therefore$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{(Jordan引理)}$$

$\therefore$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

例12.1 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x \quad a>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \mathrm{d}z = \pi \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-a}$$

$\because$ $$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^2+a^2} = 0$$

$\therefore$ $$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \mathrm{d}z = 0 \qquad \text{(Jordan引理)}$$

$\therefore$ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \mathrm{d}x = \pi \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-a}$$

例12.1 计算积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

$\because$
$$\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z^2+a^2}=0$$

$\therefore$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=0 \qquad \text{(Jordan引理)}$$

$\therefore$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}$$

例12.1　计算积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

分别比较实部和虚部，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^{-a}$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}$$

例12.1 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x \quad a>0$

分别比较实部和虚部，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-a}$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-a}$$

例12.1　计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad a>0$

分别比较实部和虚部，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{e}^{-a}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}$$

讲授要点

1. 留数定理计算定积分(续)
   - 含三角函数的无穷积分
   - 实轴上有奇点的情形
   - 多值函数的积分

瑕积分(设瑕点为c)的定义是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果这两个极限单独都不存在，但是

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

存在，则称为瑕积分的主值存在，记为

$$\mathrm{v.p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

当然，如果瑕积分及其主值都存在，那么它们一定相等

瑕积分(设瑕点为c)的定义是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果这两个极限单独都不存在，但是

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

存在，则称为瑕积分的主值存在，记为

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

当然，如果瑕积分及其主值都存在，那么它们一定相等

瑕积分(设瑕点为c)的定义是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果这两个极限单独都不存在，但是

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

存在，则称为瑕积分的主值存在，记为

$$\mathrm{v.p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

当然，如果瑕积分及其主值都存在，那么它们一定相等

- 如果实变积分是一个瑕积分，在处理相应的复变积分$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$时， 实轴上的瑕点也是被积函数的奇点，必须绕开奇点而构成闭合的积分围道
- 由于实变积分的被积函数与复变积分的被积函数形式不见得相同，不排除实变积分不是瑕积分， 但复变积分的被积函数在实轴上有奇点
- 下面通过两个例子来具体说明处理这类积分的基本精神

- 如果实变积分是一个瑕积分，在处理相应的复变积分$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$时，实轴上的瑕点也是被积函数的奇点，必须绕开奇点而构成闭合的积分围道
- 由于实变积分的被积函数与复变积分的被积函数形式不见得相同，不排除实变积分不是瑕积分，但复变积分的被积函数在实轴上有奇点
- 下面通过两个例子来具体说明处理这类积分的基本精神

- 如果实变积分是一个瑕积分，在处理相应的复变积分$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$时，实轴上的瑕点也是被积函数的奇点，必须绕开奇点而构成闭合的积分围道
- 由于实变积分的被积函数与复变积分的被积函数形式不见得相同，不排除实变积分不是瑕积分，但复变积分的被积函数在实轴上有奇点
- 下面通过两个例子来具体说明处理这类积分的基本精神

例12.2 计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}$

【分析】这是一个反常积分，反常性既表现在积分限为$\pm\infty$， 又表现为被积函数在$x=0$点不连续($x=0$点为瑕点)．此积分在主值意义下存在

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\\
&=\lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\lim_{R_2\to\infty}\int_{1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\\
&\quad+\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-1}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\right]
\end{aligned}$$

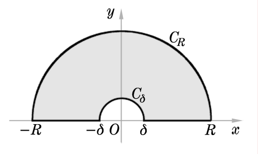
例12.2　计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}$

【分析】这是一个反常积分，反常性既表现在积分限为±∞，又表现为被积函数在$x=0$点不连续($x=0$点为瑕点)．此积分在主值意义下存在

$$
\begin{aligned}
&\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\\
=&\lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\lim_{R_2\to\infty}\int_{1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\\
&+\lim_{\delta\to0}\left[\int_{-1}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\right]
\end{aligned}
$$

例12.2 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x+x^2\right)}$

【解】取积分路径C如右图，计算复变积分$\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$

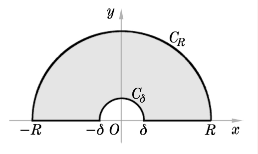


$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\times\operatorname{res}\frac{1}{z(1+z+z^2)}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

例12.2　计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x+x^2\right)}$

【解】取积分路径C如右图，计算复变积分$\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$

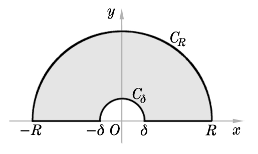


$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$$
$$+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\times\operatorname{res}\left.\frac{1}{z(1+z+z^2)}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

例12.2　计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x+x^2\right)}$

【解】取积分路径C如右图，计算复变积分$\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$

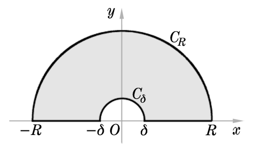


$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\times\operatorname{res}\left.\frac{1}{z(1+z+z^2)}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

例12.2 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x+x^2\right)}$

【解】取积分路径C如右图，计算复变积分 $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$



$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\times\operatorname{res}\left.\frac{1}{z(1+z+z^2)}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

取极限$R\to\infty,\delta\to 0$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=0 \quad (大圆弧引理)$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}$$
$$+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

取极限$R\to\infty, \delta\to 0$

$$\because \qquad \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=0$$

$$\therefore \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=0 \qquad \text{(大圆弧引理)}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

取极限$R\to\infty,\delta\to 0$

$$\because \qquad \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=0$$

$$\therefore \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=0 \qquad \text{(大圆弧引理)}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

取极限$R\to\infty, \delta\to 0$

$$\because \quad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=1$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\pi\mathrm{i} \qquad (\text{小圆弧引理})$$

$$\therefore \quad \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

取极限$R\to\infty, \delta\to 0$

$$\because \quad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=1$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\pi\mathrm{i} \qquad (\text{小圆弧引理})$$

$$\therefore \quad \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi\mathrm{i}$$

取极限$R\to\infty, \delta\to 0$

$$\because \qquad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}=1$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}=-\pi\mathrm{i} \qquad \text{(小圆弧引理)}$$

$$\therefore \qquad \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

评述

从上面的计算中可以看出，对于积分路径上有奇点的情形，总要计算围绕奇点的小圆弧积分的极限值

思考题

- 如果积分围道中的小半圆弧是从下半平面绕过$z=0$点，因而把$z=0$点包围在围道内，是否会得到不同的结果？为什么？
- 是否可以将积分围道取在下半平面？

评述

从上面的计算中可以看出，对于积分路径上有奇点的情形，总要计算围绕奇点的小圆弧积分的极限值

思考题

- 如果积分围道中的小半圆弧是从下半平面绕过$z=0$点， 因而把$z=0$点包围在围道内，是否会得到不同的结果？ 为什么？
- 是否可以将积分围道取在下半平面？

评述

从上面的计算中可以看出，对于积分路径上有奇点的情形，总要计算围绕奇点的小圆弧积分的极限值

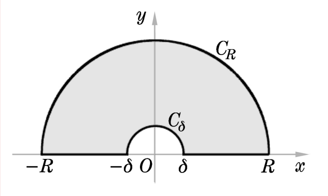
思考题

- 如果积分围道中的小半圆弧是从下半平面绕过$z=0$点， 因而把$z=0$点包围在围道内，是否会得到不同的结果？为什么？
- 是否可以将积分围道取在下半平面？

例12.3　计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

【解】取积分路径C如右图，

计算复变积分$\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$



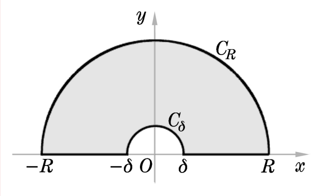
$$\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$$

$=0$　　(因为积分围道内无奇点)

例12.3　计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

【解】 取积分路径C如右图，

计算复变积分 $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$



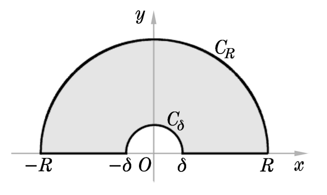
$$\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$$

$$=0$$ (因为积分围道内无奇点)

例12.3　计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

【解】取积分路径C如右图，

计算复变积分 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$



$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z + \int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$$

$$= 0 \qquad \text{(因为积分围道内无奇点)}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0$$

取极限$R\to\infty,\delta\to 0$

$$\because\quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0\qquad(\text{Jordan引理})$$

$$\because\quad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i}\qquad(\text{小圆弧引理})$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0$$

取极限$R\to\infty, \delta\to 0$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0 \qquad (\text{Jordan引理})$$

$$\because \quad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}=1$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i} \qquad (\text{小圆弧引理})$$

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = 0$$

取极限$R \to \infty, \delta \to 0$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = 0 \qquad (\text{Jordan引理})$$

$$\because \quad \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i} \qquad (\text{小圆弧引理})$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0$$

取极限$R\to\infty,\delta\to 0$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0 \qquad \text{(Jordan引理)}$$

$$\because \quad \lim_{z\to 0}z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}=1$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i} \qquad \text{(小圆弧引理)}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0$$

取极限$R\to\infty, \delta\to 0$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0 \qquad \text{(Jordan引理)}$$

$$\because \quad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}=1$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i} \qquad \text{(小圆弧引理)}$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0$$

取极限$R\to\infty, \delta\to 0$

$$\therefore \qquad \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}$$

分别比较等式两端的实部和虚部，即得

$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi$$

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=0$$

取极限$R\to\infty,\delta\to 0$

$$\therefore \qquad \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}$$

分别比较等式两端的实部和虚部，即得

$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi$$

评述

- 计算这些积分，关键在于正确地选择复变积分的被积函数
- 例如，为了计算积分
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$
就应该考虑复变积分
$$\oint_C \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2}\mathrm{d}z$$

评述

- 计算这些积分，关键在于正确地选择复变积分的被积函数

- 例如，为了计算积分
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$
就应该考虑复变积分
$$\oint_C\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2}\mathrm{d}z$$

评述

- 就复变积分而言，在实轴上可以有奇点
- 但这种奇点，一般说来，只能是可去奇点或一阶极点．这从小圆弧引理就可以看出
- 如果是二阶或二阶以上的极点，或是本性奇点，沿小圆弧C_δ的积分就可能趋于∞

评述

- 就复变积分而言，在实轴上可以有奇点
- 但这种奇点，一般说来，只能是可去奇点或一阶极点．这从小圆弧引理就可以看出
- 如果是二阶或二阶以上的极点，或是本性奇点，沿小圆弧C_δ的积分就可能趋于∞

评述

- 就复变积分而言，在实轴上可以有奇点
- 但这种奇点，一般说来，只能是可去奇点或一阶极点．这从小圆弧引理就可以看出
- 如果是二阶或二阶以上的极点，或是本性奇点，沿小圆弧C_δ的积分就可能趋于∞

讲授要点

1. 留数定理计算定积分(续)
   - 含三角函数的无穷积分
   - 实轴上有奇点的情形
   - 多值函数的积分

基本约定

☞ 这里所说的多值函数的积分，是从复变函数的角度说的

☞ 从复数域来看，实变定积分中的积分变量x在$x > 0$时应该理解为$\arg x = 0$

含幂函数的积分

$$I=\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

其中s为实数，$Q(x)$单值，在正实轴上没有奇点

为了保证积分收敛，要求

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot x^{s-1}Q(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot x^{s-1}Q(x)=0$$

考虑相应的复变积分$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$

含幂函数的积分

$$I = \int_0^{\infty} x^{s-1} Q(x) \mathrm{d}x$$

其中s为实数，$Q(x)$单值，在正实轴上没有奇点

为了保证积分收敛，要求

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot x^{s-1} Q(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot x^{s-1} Q(x) = 0$$

考虑相应的复变积分$\oint_C z^{s-1} Q(z) \mathrm{d}z$

含幂函数的积分

$$I=\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

其中s为实数，$Q(x)$单值，在正实轴上没有奇点

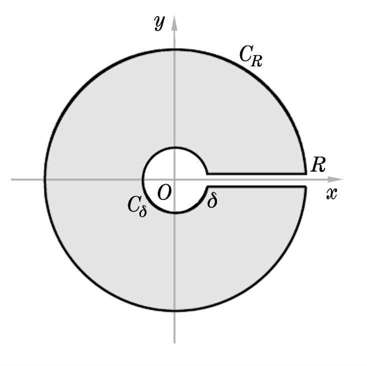
为了保证积分收敛，要求

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot x^{s-1}Q(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot x^{s-1}Q(x)=0$$

考虑相应的复变积分$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$

由于$z=0$及$z=\infty$是被积函数的枝点，所以需要将平面沿正实轴割开，并规定沿割线上岸$\arg z=0$

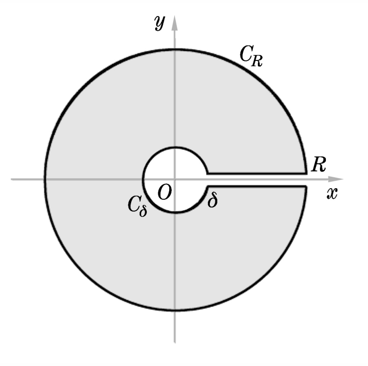
这时的积分路径由割开的大小圆弧(半径分别为R和δ)及割线上下岸组成



沿割线上下岸的积分显然直接与所要计算的实变积分有关

由于$z=0$及$z=\infty$是被积函数的枝点，所以需要将平面沿正实轴割开，并规定沿割线上岸$\arg z=0$

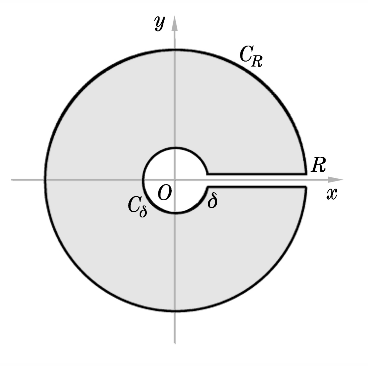
这时的积分路径由割开的大小圆弧(半径分别为R和δ)及割线上下岸组成



沿割线上下岸的积分显然直接与所要计算的实变积分有关

$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z + \int_R^\delta (x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$



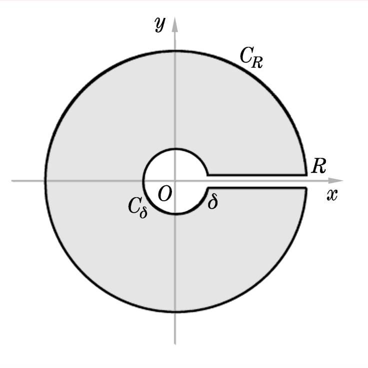
$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta \left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$



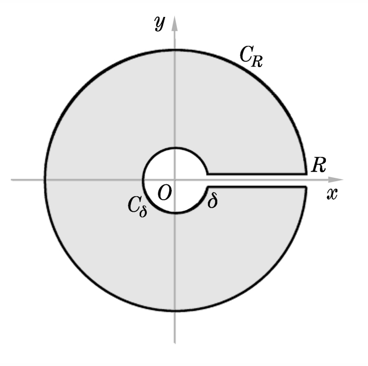
$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta (x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$



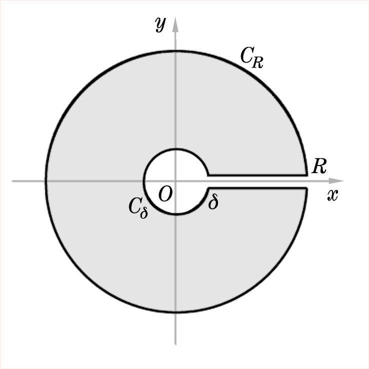
$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

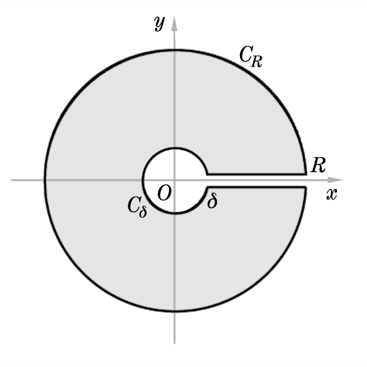
$$+ \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta (x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$



$$
\begin{aligned}
&\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_R^\delta \left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$



$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_R^\delta (x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

1. 如果在$0 \le \arg z \le 2\pi$的范围内

$$\lim_{z\to\infty} z^s Q(z) = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z^s Q(z) = 0$$

则根据大圆弧引理与小圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0$$

2. 如果$Q(z)$在全平面上除了有限个孤立奇点(不在正实轴上)外，是单值解析的，因而可以应用留数定理

$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_R^\delta (x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

1. 如果在$0 \le \arg z \le 2\pi$的范围内

$$\lim_{z\to\infty} z^sQ(z) = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z^sQ(z) = 0$$

则根据大圆弧引理与小圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0$$

2. 如果$Q(z)$在全平面上除了有限个孤立奇点(不在正实轴上)外，是单值解析的，因而可以应用留数定理

$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_R^\delta (x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

1. 如果在$0 \le \arg z \le 2\pi$的范围内

$$\lim_{z\to\infty} z^s Q(z) = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z^s Q(z) = 0$$

则根据大圆弧引理与小圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0$$

2. 如果$Q(z)$在全平面上除了有限个孤立奇点(不在正实轴上)外，是单值解析的，因而可以应用留数定理

$$\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = \int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_R^\delta \left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z$$

1. 如果在$0 \leq \arg z \leq 2\pi$的范围内

$$\lim_{z\to\infty} z^s Q(z) = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z^s Q(z) = 0$$

则根据大圆弧引理与小圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0$$

2. 如果$Q(z)$在全平面上除了有限个孤立奇点(不在正实轴上)外，是单值解析的，因而可以应用留数定理

在取极限$\delta\to 0$, $R\to\infty$后，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}\right)\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}}\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}$$

需要注意，在计算留数时，要遵守上面对于多值函数z^s所作的限制，即$0\le\arg z\le 2\pi$

在取极限$\delta\to 0$, $R\to\infty$后，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}\right)\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x=\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}$$

需要注意，在计算留数时，要遵守上面对于多值函数z^s所作的限制，即$0\le\arg z\le 2\pi$

在取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$后，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}\right)\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s}}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}$$

需要注意，在计算留数时，要遵守上面对于多值函数z^s所作的限制，即$0 \le \arg z \le 2\pi$

思考题

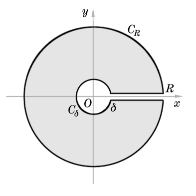
- 如果规定在割线上岸$\arg z = 2\pi$，是否影响最后结果?
- 如果$Q(x)$具有一定的对称性质，例如是x的奇函数或偶函数，是否可以取其他形式的围道?

思考题

- 如果规定在割线上岸$\arg z = 2\pi$，是否影响最后结果?
- 如果$Q(x)$具有一定的对称性质，例如是x的奇函数或偶函数，是否可以取其他形式的围道?

例12.4　计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x,\ 0<\alpha<1$

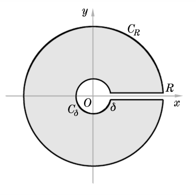
【解】计算复变积分 $\displaystyle\oint_C\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$，取积分路径$C$如右图，并规定割线上岸$\arg z=0$



$$\oint_C\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z=\int_\delta^R\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$$
$$+\int_R^\delta\frac{(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{C_\delta}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$$

例12.4　计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x,\ 0<\alpha<1$

【解】计算复变积分 $\displaystyle\oint_C\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$，取积分路径$C$如右图，并规定割线上岸$\arg z=0$



$$\oint_C\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z=\int_\delta^R\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$$
$$+\int_R^\delta\frac{\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{C_\delta}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\oint_C \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z + \int_R^\delta \frac{\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\because \qquad \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = 0 \qquad (\alpha < 1)$$

$$\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

$$\therefore \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = 0 \qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = 0$$

$$\oint_C \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z + \int_R^\delta \frac{\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$$

$\because$

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = 0 \qquad (\alpha<1)$$

$$\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = 0 \qquad (\alpha>0)$$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = 0$ $\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = 0$

$$\oint_C \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z + \int_R^\delta \frac{(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z$$

$\because$

$$\lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = 0 \qquad (\alpha < 1)$$

$$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

$\therefore$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = 0 \qquad \lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z = 0$$

取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$，就得到

$$\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = 2\pi i \times \operatorname{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right\}_{z=e^{i\pi}}$$

$$= 2\pi i \times e^{i\pi(\alpha-1)}$$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}} \times e^{i\pi(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i\alpha}-1} \times e^{i\pi\alpha}$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{\pi i\alpha}-e^{-\pi i\alpha}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\right)\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\times\operatorname{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right\}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$
$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}-1}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$$
$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\alpha}}$$
$$= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \times \operatorname{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right\}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}-1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\alpha}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \times \mathrm{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right\}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}-1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\alpha}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \times \mathrm{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right\}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}-1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\alpha}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

取极限$\delta\to 0$, $R\to\infty$，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\times \mathrm{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right\}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}}\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}-1}\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$$

$$= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\alpha}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

含对数函数的积分

$$I=\int_0^{\infty}Q(x)\ln x\mathrm{d}x$$

其中$Q(x)$单值，在正实轴上没有奇点

为了保证积分收敛，要求

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot Q(x)\ln x=\lim_{x\to 0}x\cdot Q(x)\ln x=0$$

考虑相应的复变积分$\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z$?

含对数函数的积分

$$I=\int_0^{\infty}Q(x)\ln x\mathrm{d}x$$

其中$Q(x)$单值，在正实轴上没有奇点

为了保证积分收敛，要求

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot Q(x)\ln x=\lim_{x\to0}x\cdot Q(x)\ln x=0$$

考虑相应的复变积分$\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z$?

含对数函数的积分

$$I=\int_0^{\infty}Q(x)\ln x\mathrm{d}x$$

其中$Q(x)$单值，在正实轴上没有奇点

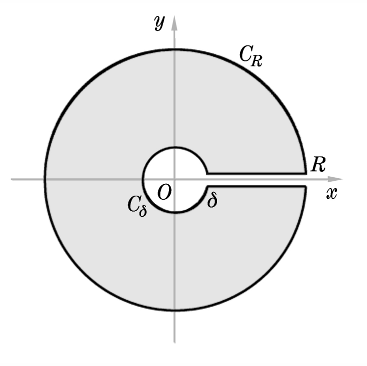
为了保证积分收敛，要求

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot Q(x)\ln x=\lim_{x\to 0}x\cdot Q(x)\ln x=0$$

考虑相应的复变积分$\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z$?

由于$z=0$及$z=\infty$是被积函数的枝点，所以需要将平面沿正实轴割开，并规定沿割线上岸$\arg z=0$

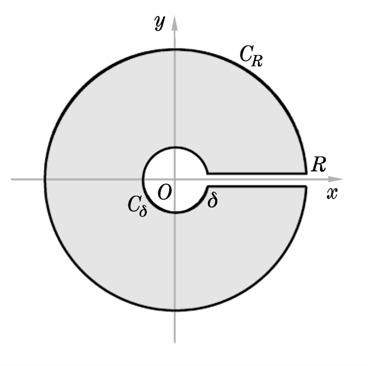
积分路径仍由割开的大小圆弧(半径分别为R和δ)及割线上下岸组成



沿割线上下岸的积分显然直接与所要计算的实变积分有关

由于$z=0$及$z=\infty$是被积函数的枝点，所以需要将平面沿正实轴割开，并规定沿割线上岸$\arg z=0$

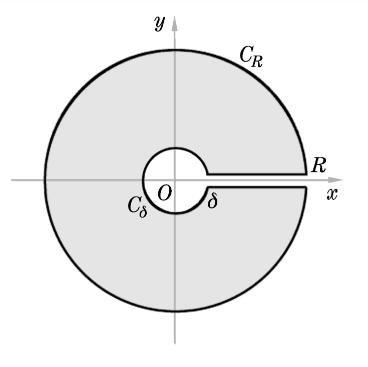
积分路径仍由割开的大小圆弧(半径分别为R和δ)及割线上下岸组成



沿割线上下岸的积分显然直接与所要计算的实变积分有关

$$\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_R^\delta Q(x)\ln\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$



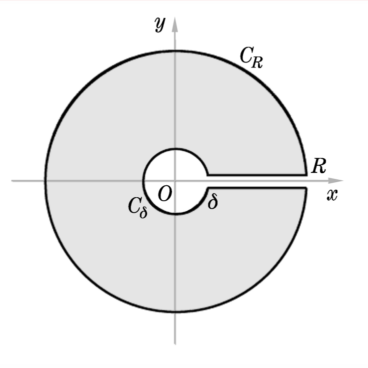
$$\oint_C Q(z)\ln z \mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln x \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln z \mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln z \mathrm{d}z$$



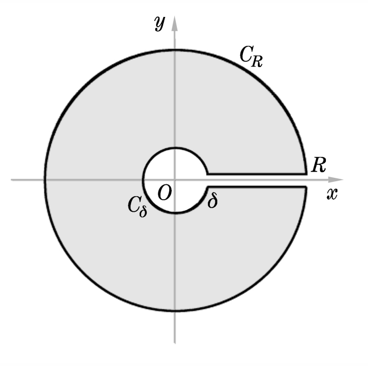
$$\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$



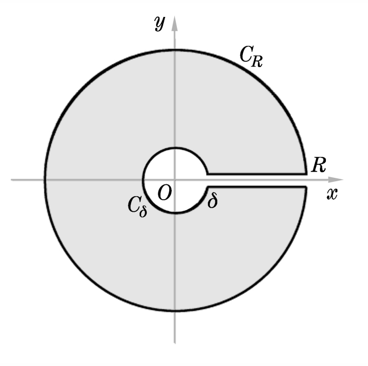
$$\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x$$

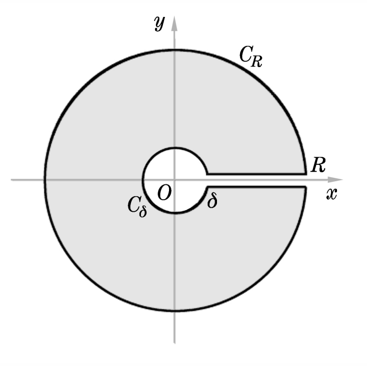
$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z$$



$$\oint_C Q(z)\ln z\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_\delta^R Q(x)\ln x\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln z\,\mathrm{d}z$$
$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\,\mathrm{d}z$$



$$
\begin{aligned}
\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z = & \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x + \int_R^\delta Q(x)[\ln x + 2\pi\mathrm{i}]\mathrm{d}x \\
& + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z \\
= & -2\pi\mathrm{i}\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \\
& + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

- 计算失败！尽管现在沿割线上下岸的积分都与所要计算的积分有关，但是非常不巧，它们却相互抵消掉了，而只剩下一个并非所要计算的定积分 $\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \to \int_0^\infty Q(x)\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z = & \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x + \int_R^\delta Q(x)[\ln x + 2\pi\mathrm{i}]\mathrm{d}x \\
& + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z \\
= & -2\pi\mathrm{i}\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \\
& + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

- 计算失败！尽管现在沿割线上下岸的积分都与所要计算的积分有关，但是非常不巧，它们却相互抵消掉了，而只剩下一个并非所要计算的定积分 $\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \to \int_0^\infty Q(x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z =& \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x + \int_R^\delta Q(x)[\ln x + 2\pi\mathrm{i}]\mathrm{d}x \\ & + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z \\ =& -2\pi\mathrm{i}\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \\ & + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z\end{aligned}$$

- 计算失败！尽管现在沿割线上下岸的积分都与所要计算的积分有关，但是非常不巧，它们却相互抵消掉了，而只剩下一个并非所要计算的定积分 $\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \to \int_0^\infty Q(x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z = & \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x + \int_R^\delta Q(x)[\ln x + 2\pi\mathrm{i}]\mathrm{d}x \\ & + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z \\ = & -2\pi\mathrm{i}\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \\ & + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z\end{aligned}$$

- 失败的原因是，和根式函数不同，对数函数$\ln z$的多值性表现在虚部上，因此沿割线上下岸积分时，其实部(即$\ln x$)互相抵消

$$\begin{aligned}\oint_C Q(z)\ln z\mathrm{d}z &= \int_\delta^R Q(x)\ln x\mathrm{d}x + \int_R^\delta Q(x)[\ln x + 2\pi\mathrm{i}]\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z \\ &= -2\pi\mathrm{i}\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z\end{aligned}$$

- 但也提示我们，如果要计算 $\int_0^\infty f(x)\ln x\mathrm{d}x$，则可以考虑复变积分 $\oint_C f(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$

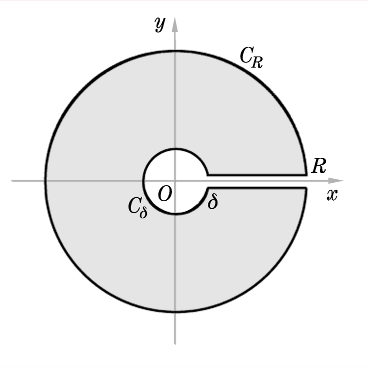
$$\oint_C Q(z) \ln^2 z \mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x) \ln^2 x \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z) \ln^2 z \mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x) \ln^2 \left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right) \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z) \ln^2 z \mathrm{d}z$$



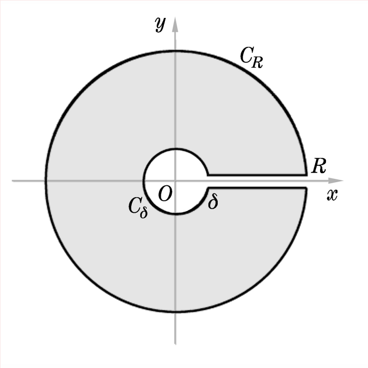
$$\oint_C Q(z)\ln^2 z\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln^2 x\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln^2 z\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln^2\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln^2 z\mathrm{d}z$$



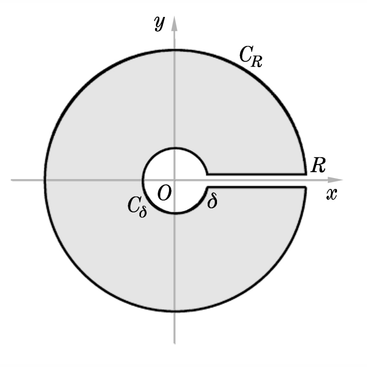
$$\oint_C Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln^2\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$



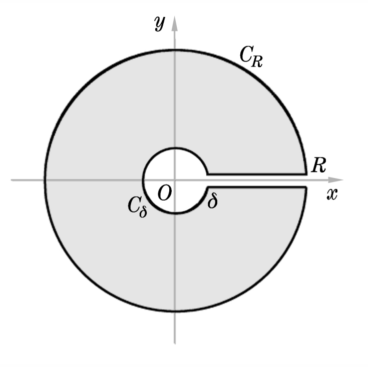
$$\oint_C Q(z)\ln^2 z\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln^2 x\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln^2 z\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln^2\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln^2 z\mathrm{d}z$$



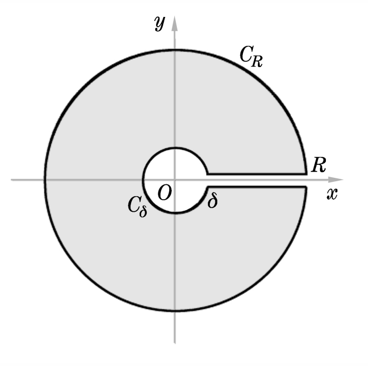
$$\oint_C Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$

$$+ \int_R^\delta Q(x)\ln^2\left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_\delta} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$



$$\oint_C Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\delta^R Q(x)\ln^2 x\,\mathrm{d}x + \int_R^\delta Q(x)[\ln x + 2\pi\mathrm{i}]^2\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$

$$= -4\pi\mathrm{i}\int_\delta^R Q(x)\ln x\,\mathrm{d}x + 4\pi^2\int_\delta^R Q(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{C_R} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z + \int_{C_\delta} Q(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$$

❶ 如果在$0 \le \arg z \le 2\pi$的范围内

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot Q(z)\ln z = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z\cdot Q(z)\ln z = 0$$

则根据大圆弧引理与小圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z = 0$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z = 0$$

❷ 如果$Q(z)$在全平面上除了有限个孤立奇点(不在正实轴上)外，是单值解析的，因而可以应用留数定理

1. 如果在$0 \le \arg z \le 2\pi$的范围内

$$\lim_{z\to\infty} z \cdot Q(z)\ln z = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z \cdot Q(z)\ln z = 0$$

则根据大圆弧引理与小圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\ln z \mathrm{d}z = 0$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} Q(z)\ln z \mathrm{d}z = 0$$

2. 如果$Q(z)$在全平面上除了有限个孤立奇点(不在正实轴上)外，是单值解析的，因而可以应用留数定理

❶ 如果在$0 \le \arg z \le 2\pi$的范围内

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot Q(z)\ln z = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z\cdot Q(z)\ln z = 0$$

则根据大圆弧引理与小圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\ln z\mathrm{d}z = 0$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} Q(z)\ln z\mathrm{d}z = 0$$

❷ 如果$Q(z)$在全平面上除了有限个孤立奇点(不在正实轴上)外，是单值解析的，因而可以应用留数定理

取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$，就有

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty Q(x)\ln x\mathrm{d}x + 4\pi^2\int_0^\infty Q(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}} \mathrm{res}\left\{Q(z)\ln z\right\}$$

分别比较实部和虚部，即得

$$\int_0^\infty Q(x)\ln x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{\text{全平面}} \mathrm{res}\left[Q(z)\ln z\right]\right\}$$

$$\int_0^\infty Q(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left\{\sum_{\text{全平面}} \mathrm{res}\left[Q(z)\ln z\right]\right\}$$

取极限$\delta\to 0$, $R\to\infty$，就有

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty Q(x)\ln x\,\mathrm{d}x+4\pi^2\int_0^\infty Q(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{Q(z)\ln z\right\}$$

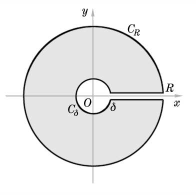
分别比较实部和虚部，即得

$$\int_0^\infty Q(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left[Q(z)\ln z\right]\right\}$$

$$\int_0^\infty Q(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left\{\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left[Q(z)\ln z\right]\right\}$$

例12.5 计算积分$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$

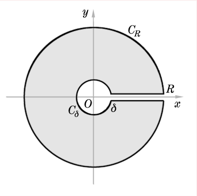
【解】 取积分路径C如右图，并规定割线上岸$\arg z=0$，计算复变积分$\displaystyle\oint_C\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$



$$\oint_C\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z=\int_\delta^R\frac{\ln^2 x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$
$$+\int_R^\delta\frac{(\ln x+2\pi\mathrm{i})^2}{1+x+x^2}\mathrm{d}x+\int_{C_\delta}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$

例12.5　计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$

【解】取积分路径C如右图，并规定割线上岸$\arg z=0$，计算复变积分$\displaystyle\oint_C \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$



$$\oint_C \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{\ln^2 x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z + \int_R^\delta \frac{(\ln x+2\pi\mathrm{i})^2}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$

$$\oint_C \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{\ln^2 x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z + \int_R^\delta \frac{(\ln x + 2\pi\mathrm{i})^2}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2} = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{(大圆弧引理)}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{(小圆弧引理)}$$

$$\oint_C \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{\ln^2 x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z + \int_R^\delta \frac{(\ln x + 2\pi\mathrm{i})^2}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2} = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = 0 \qquad (\text{大圆弧引理})$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = 0 \qquad (\text{小圆弧引理})$$

$$\oint_C \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{\ln^2 x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z + \int_R^\delta \frac{(\ln x+2\pi\mathrm{i})^2}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$

$$\because \quad \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2} = 0 \qquad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = 0 \qquad (\text{大圆弧引理})$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = 0 \qquad (\text{小圆弧引理})$$

取极限$\delta\to 0$, $R\to\infty$，就得到

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x+4\pi^2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi^3$$

$$\therefore\quad\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=0$$

同时还求得 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

取极限$\delta\to 0$, $R\to\infty$，就得到

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x+4\pi^2\int_0^\infty\frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\,\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi^3$$

$$\therefore\qquad\int_0^\infty\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=0$$

同时还求得 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

取极限$\delta \to 0$, $R \to \infty$，就得到

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}} \mathrm{res}\,\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\pi^3$$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = 0$$

同时还求得 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

取极限$\delta\to 0$, $R\to\infty$，就得到

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x+4\pi^2\int_0^\infty\frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\,\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi^3$$

$$\therefore\qquad \int_0^\infty\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=0$$

同时还求得 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$