第 十 一 讲

留数定理及其应用(一)

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 留数定理
   - 留数定理
   - 留数定理的初步应用
   - 无穷远点处的留数
2. 留数定理计算定积分
   - 有理三角函数的积分
   - 无穷积分

讲授要点

1. 留数定理
   - 留数定理
   - 留数定理的初步应用
   - 无穷远点处的留数
2. 留数定理计算定积分
   - 有理三角函数的积分
   - 无穷积分

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§7.1 — 7.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§4.1, 4.2
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§5.1, 5.2, 5.3

讲授要点

1. 留数定理
   - 留数定理
   - 留数定理的初步应用
   - 无穷远点处的留数
2. 留数定理计算定积分
   - 有理三角函数的积分
   - 无穷积分

留数的引入

在环形区域$R_1 \le |z-b| \le R_2$内单值解析的函数$f(z)$，可以在该区域内展开成Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \qquad R_1 < |z-b| < R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

这是Laurent级数的定义．但实用上很少利用这个定义去计算展开系数，更多情况下从别的途径更容易求出系数

留数的引入

在环形区域$R_1 \le |z-b| \le R_2$内单值解析的函数$f(z)$，可以在该区域内展开成Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \qquad R_1 < |z-b| < R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

这是Laurent级数的定义．但实用上很少利用这个定义去计算展开系数，更多情况下从别的途径更容易求出系数

留数的引入

在环形区域$R_1 \le |z-b| \le R_2$内单值解析的函数$f(z)$，可以在该区域内展开成Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \qquad R_1 < |z-b| < R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

这是Laurent级数的定义．但实用上很少利用这个定义去计算展开系数，更多情况下从别的途径更容易求出系数

留数的引入

但反过来应用上式，就可能用来计算积分

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}a_n$$

特别是，当$n=-1$时

$$\oint_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}$$

在某些情况下，有可能容易求得a_{-1}

这就是留数定理的基本思想

留数的引入

但反过来应用上式，就可能用来计算积分

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} a_n$$

特别是，当$n=-1$时

$$\oint_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} a_{-1}$$

在某些情况下，有可能容易求得a_{-1}

这就是留数定理的基本思想

留数的引入

但反过来应用上式，就可能用来计算积分

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}a_n$$

特别是，当$n=-1$时

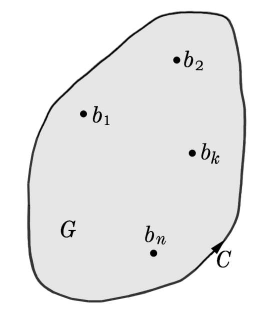
$$\oint_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}$$

在某些情况下，有可能容易求得a_{-1}

这就是留数定理的基本思想

留数定理

设区域G的边界C为一分段光滑的简单闭合曲线．若除有限个孤立奇点b_k, $k = 1, 2, 3, \cdots, n$外，函数$f(z)$在G内单值解析，在$\overline{G}$中连续，且在C上没有$f(z)$的奇点，则

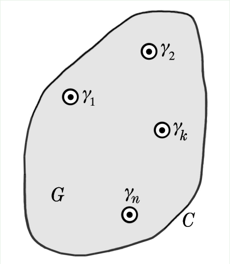


$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)$$

$\operatorname{res} f(b_k)$称为$f(z)$在$b_k$处的留数，它等于$f(z)$在$b_k$的邻域内Laurent展开中$(z-b_k)^{-1}$的系数$a_{-1}^{(k)}$

留数定理 （要点）

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k)$$



【证】绕每个奇点b_k作闭合曲线γ_k，使γ_k均在G内，且互不交叠

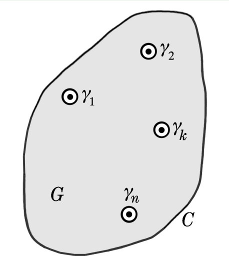
则根据复连通区域Cauchy定理及Laurent展开的系数公式，即得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} a_{-1}^{(k)}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k)$$

留数定理 （要点）

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f(b_k)$$



【证】绕每个奇点b_k作闭合曲线γ_k，使γ_k均在G内，且互不交叠

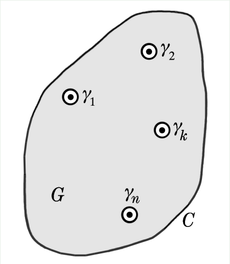
则根据复连通区域Cauchy定理及Laurent展开的系数公式，即得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} a_{-1}^{(k)}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f(b_k)$$

留数定理 （要点）

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)$$



【证】绕每个奇点b_k作闭合曲线γ_k，使γ_k均在G内，且互不交叠

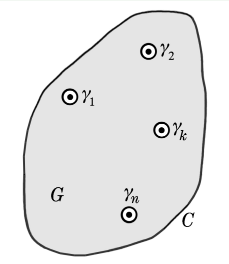
则根据复连通区域Cauchy定理及Laurent展开的系数公式，即得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} a_{-1}^{(k)}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)$$

留数定理 （要点）

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)$$



【证】绕每个奇点b_k作闭合曲线γ_k，使γ_k均在G内，且互不交叠

则根据复连通区域Cauchy定理及Laurent展开的系数公式，即得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} a_{-1}^{(k)}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k)$$

评述

留数定理的实质

留数定理 = 孤立奇点概念 + Cauchy 积分公式 + Laurent 展开系数公式

评述

- 留数定理告诉我们，解析函数的围道积分值与函数在围道内的奇点直接有关． 为了计算解析函数的围道积分值，只需计算出函数在围道内各奇点处的留数
- 求$f(z)$在奇点b处的留数，原则上说， 就是求$f(z)$在$z=b$的邻域内Laurent展开中$(z-b)^{-1}$项的系数
- 在极点的情况下，可以通过微商计算求留数

评述

- 留数定理告诉我们，解析函数的围道积分值与函数在围道内的奇点直接有关． 为了计算解析函数的围道积分值，只需计算出函数在围道内各奇点处的留数
- 求$f(z)$在奇点b处的留数，原则上说， 就是求$f(z)$在$z=b$的邻域内Laurent展开中$(z-b)^{-1}$项的系数
- 在极点的情况下，可以通过微商计算求留数

评述

- 留数定理告诉我们，解析函数的围道积分值与函数在围道内的奇点直接有关．为了计算解析函数的围道积分值，只需计算出函数在围道内各奇点处的留数
- 求$f(z)$在奇点b处的留数，原则上说，就是求$f(z)$在$z=b$的邻域内Laurent展开中$(z-b)^{-1}$项的系数
- 在极点的情况下，可以通过微商计算求留数

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的m阶极点

在b点的邻域内

$$f(z)=a_{-m}(z-b)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{-1}+a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots$$

两端同乘以$(z-b)^m$

$$(z-b)^m f(z)=a_{-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{m-1}+a_0(z-b)^m+a_1(z-b)^{m+1}+a_2(z-b)^{m+2}+\cdots$$

a_{-1}为$(z-b)^m f(z)$的展开式中$(z-b)^{m-1}$项的系数

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-b)^m f(z)\Big|_{z=b}$$

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的m阶极点

在b点的邻域内

$$f(z)=a_{-m}(z-b)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{-1}+a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots$$

两端同乘以$(z-b)^m$

$$(z-b)^m f(z)=a_{-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{m-1}+a_0(z-b)^m+a_1(z-b)^{m+1}+a_2(z-b)^{m+2}+\cdots$$

a_{-1}为$(z-b)^m f(z)$的展开式中$(z-b)^{m-1}$项的系数

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-b)^m f(z)\Big|_{z=b}$$

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的m阶极点

在b点的邻域内

$$\begin{aligned} f(z) = a_{-m}(z-b)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-b)^{-1} \\ + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots \end{aligned}$$

两端同乘以$(z-b)^m$

$$\begin{aligned} (z-b)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-b)^{m-1} + a_0(z-b)^m \\ + a_1(z-b)^{m+1} + a_2(z-b)^{m+2} + \cdots \end{aligned}$$

a_{-1}为$(z-b)^m f(z)$的展开式中$(z-b)^{m-1}$项的系数

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-b)^m f(z)\Big|_{z=b}$$

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的m阶极点

在b点的邻域内

$$\begin{aligned} f(z) = {} & a_{-m}(z-b)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-b)^{-1} \\ & + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots \end{aligned}$$

两端同乘以$(z-b)^m$

$$\begin{aligned} (z-b)^m f(z) = {} & a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-b)^{m-1} + a_0(z-b)^m \\ & + a_1(z-b)^{m+1} + a_2(z-b)^{m+2} + \cdots \end{aligned}$$

a_{-1}为$(z-b)^m f(z)$的展开式中$(z-b)^{m-1}$项的系数

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-b)^m f(z)\bigg|_{z=b}$$

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的m阶极点

在b点的邻域内

$$\begin{aligned} f(z) = {} & a_{-m}(z-b)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-b)^{-1} \\ & + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots \end{aligned}$$

两端同乘以$(z-b)^k$

$$\begin{aligned} (z-b)^k f(z) = {} & a_{-m}(z-b)^{k-m} + \cdots + a_{-1}(z-b)^{k-1} \\ & + a_0(z-b)^k + a_1(z-b)^{k+1} + \cdots \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$

思考题：两端是否同乘以$(z-b)^k, k>m$?

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的m阶极点

在b点的邻域内

$$\begin{aligned}f(z) &= a_{-m}(z-b)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{-1}\\&\quad+a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots\end{aligned}$$

两端同乘以$(z-b)^k$

$$\begin{aligned}(z-b)^k f(z) &= a_{-m}(z-b)^{k-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{k-1}\\&\quad+a_0(z-b)^k+a_1(z-b)^{k+1}+\cdots\end{aligned}$$

……

思考题：两端是否同乘以$(z-b)^k, k>m$?

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的m阶极点

在b点的邻域内

$$f(z)=a_{-m}(z-b)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{-1}+a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots$$

两端同乘以$(z-b)^k$

$$(z-b)^k f(z)=a_{-m}(z-b)^{k-m}+\cdots+a_{-1}(z-b)^{k-1}+a_0(z-b)^k+a_1(z-b)^{k+1}+\cdots$$

……

思考题：两端是否同乘以$(z-b)^k, k>m$?

留数计算

特殊情形：$z=b$点是$f(z)$的一阶极点

在b点的邻域内

$$f(z) = a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to b}(z-b)f(z)$$

留数计算

特殊情形：$z=b$点是$f(z)$的一阶极点

在b点的邻域内

$$f(z) = a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to b}(z-b)f(z)$$

留数计算

特殊情形：$z=b$点是$f(z)$的一阶极点

在b点的邻域内

$$f(z) = a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \cdots$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to b}(z-b)f(z)$$

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的一阶极点

特别常见：$f(z)=P(z)/Q(z)$

- $P(z)$和$Q(z)$均在b点及其邻域内解析
- $Q(b)=0, Q'(b)\neq 0$
- $P(b)\neq 0$

$$\therefore \quad a_{-1}=\lim_{z\to b}(z-b)f(z) = \lim_{z\to b}(z-b)\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(b)}{Q'(b)}$$

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的一阶极点

特别常见：$f(z)=P(z)/Q(z)$

- $P(z)$和$Q(z)$均在b点及其邻域内解析
- $Q(b)=0, Q'(b)\neq 0$
- $P(b)\neq 0$

$$\therefore \qquad a_{-1} = \lim_{z\to b}(z-b)f(z)$$
$$= \lim_{z\to b}(z-b)\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(b)}{Q'(b)}$$

留数计算

$z=b$点是$f(z)$的一阶极点

特别常见：$f(z)=P(z)/Q(z)$

- $P(z)$和$Q(z)$均在b点及其邻域内解析
- $Q(b)=0, Q'(b)\neq 0$
- $P(b)\neq 0$

$$\therefore \qquad a_{-1} = \lim_{z\to b}(z-b)f(z) = \lim_{z\to b}(z-b)\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(b)}{Q'(b)}$$

例11.1　求$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的一阶极点

且属于$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的情形

$$P(z)=1, Q(z)=1+z^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{res}\, f(\pm\mathrm{i})=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{\mathrm{i}}{2}$$

例11.1　求$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的一阶极点

且属于$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的情形

$$P(z)=1,\ Q(z)=1+z^2$$

$$\therefore\qquad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{\mathrm{i}}{2}$$

例11.1　求$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的一阶极点

且属于$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的情形

$$P(z)=1, Q(z)=1+z^2$$

$$\therefore \quad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{\mathrm{i}}{2}$$

例11.1 求$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的一阶极点

且属于$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的情形

$$P(z)=1, Q(z)=1+z^2$$

$$\therefore \quad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{\mathrm{i}}{2}$$

例11.1　求$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的一阶极点

且属于$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的情形

$$P(z)=1, Q(z)=1+z^2$$

$$\therefore \qquad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{\mathrm{i}}{2}$$

例11.1 求$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的一阶极点

且属于$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的情形

$$P(z)=1, Q(z)=1+z^2$$

$$\therefore \qquad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{\mathrm{i}}{2}$$

例11.2 求$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=0$是它的一阶极点

$$\therefore \qquad \operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z}$$

$$=\mathrm{i}(a-b)$$

例11.2 求$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=0$是它的一阶极点

$$\therefore \qquad \operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z}$$

$$=\mathrm{i}(a-b)$$

例11.2 求$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=0$是它的一阶极点

$$\therefore \qquad \operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z}$$

$$=\mathrm{i}(a-b)$$

例11.2 求$f(z)=\dfrac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$在奇点处的留数

【解】$z=0$是它的一阶极点

$$\therefore \quad \operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z}$$
$$=i(a-b)$$

例11.2 求$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$在奇点处的留数

【解】 $z=0$是它的一阶极点

$$\therefore \qquad \operatorname{res} f(0) = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z}$$

$$= \mathrm{i}(a-b)$$

例11.2　求$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$在奇点处的留数

【别解】 $$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}\bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz})}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0}$$

$$=\mathrm{i}(a-b)$$

例11.2 求$f(z)=\dfrac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$在奇点处的留数

【别解】 $$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}z^2\cdot\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}\bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{d(e^{iaz}-e^{ibz})}{dz}\bigg|_{z=0}$$

$$=i(a-b)$$

例11.2 求$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$在奇点处的留数

【别解】 $$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}\bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}\right)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0}$$

$$= \mathrm{i}(a-b)$$

例11.2　求$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$在奇点处的留数

【别解】 $$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}\bigg|_{z=0}$$
$$=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz})}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0}$$
$$=\mathrm{i}(a-b)$$

例11.3　求$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的三阶极点

$$\therefore\quad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z\mp\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\frac{1}{2!}(-3)(-4)(z\pm\mathrm{i})^{-5}\Big|_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\mp\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

例11.3　求$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的三阶极点

$$\therefore\quad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z\mp\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\frac{1}{2!}(-3)(-4)(z\pm\mathrm{i})^{-5}\Big|_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\mp\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

例11.3　求$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的三阶极点

$$\therefore \quad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z\mp\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\frac{1}{2!}(-3)(-4)(z\pm\mathrm{i})^{-5}\Big|_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\mp\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

例11.3 求$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的三阶极点

$$\therefore \quad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z\mp\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\frac{1}{2!}(-3)(-4)(z\pm\mathrm{i})^{-5}\Big|_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\mp\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

例11.3 求$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$在奇点处的留数

【解】 $z=\pm\mathrm{i}$是它的三阶极点

$$\therefore\quad \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z\mp\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\frac{1}{2!}(-3)(-4)(z\pm\mathrm{i})^{-5}\Big|_{z=\pm\mathrm{i}}$$

$$=\mp\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

讲授要点

1. 留数定理
   - 留数定理
   - 留数定理的初步应用
   - 无穷远点处的留数
2. 留数定理计算定积分
   - 有理三角函数的积分
   - 无穷积分

应用之一：有理函数的部分分式

例11.4 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$部分分式

【解】 $$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}$$

$$A=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$B=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=2}=-1$$

$$C=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=3}=\frac{1}{2}$$

应用之一：有理函数的部分分式

例11.4 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$部分分式

【解】 $$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}$$

$$A=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$B=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\Bigg|_{z=2}=-1$$

$$C=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\Bigg|_{z=3}=\frac{1}{2}$$

应用之一：有理函数的部分分式

例11.4　将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$部分分式

【解】

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}$$

$$A=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$B=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=2}=-1$$

$$C=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=3}=\frac{1}{2}$$

应用之一：有理函数的部分分式

例11.4 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$部分分式

【解】
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}$$

$$A=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$B=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=2}=-1$$

$$C=\operatorname{res}\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=3}=\frac{1}{2}$$

应用之一：有理函数的部分分式

例11.4 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$部分分式

【解】
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}$$

$$A=\mathrm{res}\,\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$B=\mathrm{res}\,\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=2}=-1$$

$$C=\mathrm{res}\,\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=3}=\frac{1}{2}$$

应用之二

例11.5 计算积分$\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】$\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = \oint_{|z|=n} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \mathrm{d}z$

$= 2\pi \mathrm{i} \times \tan \pi z$在围道内的留数和

$\cos \pi z$的零点$z_k = k+1/2\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

均为$f(z) = \tan \pi z$的一阶极点

在$|z| = n$内，共有$2n$个一阶极点

$z_k = k+1/2,\ k = 0, \pm 1, \cdots \pm (n-1), -n$

应用之二

例11.5 计算积分 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = \oint_{|z|=n} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}\mathrm{d}z$

$= 2\pi \mathrm{i} \times \tan \pi z$在围道内的留数和

$\cos \pi z$的零点$z_k = k+1/2 \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

均为$f(z) = \tan \pi z$的一阶极点

在$|z| = n$内，共有$2n$个一阶极点

$z_k = k+1/2,\ k = 0, \pm 1, \cdots \pm (n-1), -n$

应用之二

例11.5 计算积分 $\oint_{|z|=n} \tan\pi z \mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】 $\displaystyle\oint_{|z|=n} \tan\pi z \mathrm{d}z = \oint_{|z|=n} \frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}\mathrm{d}z$

$= 2\pi\mathrm{i} \times \tan\pi z$在围道内的留数和

$\cos\pi z$的零点$z_k = k+1/2\ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

均为$f(z) = \tan\pi z$的一阶极点

在$|z| = n$内，共有$2n$个一阶极点

$z_k = k+1/2,\ k = 0, \pm1, \cdots \pm(n-1), -n$

应用之二

例11.5 计算积分 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】$\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = \oint_{|z|=n} \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \mathrm{d}z$

$= 2\pi \mathrm{i} \times \tan \pi z$在围道内的留数和

$\cos \pi z$的零点$z_k = k + 1/2 \,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

均为$f(z) = \tan \pi z$的一阶极点

在$|z| = n$内，共有$2n$个一阶极点

$z_k = k + 1/2,\ k = 0, \pm 1, \cdots \pm (n-1), -n$

应用之二

例11.5 计算积分 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = \oint_{|z|=n} \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \mathrm{d}z$

$= 2\pi\mathrm{i} \times \tan \pi z$在围道内的留数和

$\cos \pi z$的零点$z_k = k+1/2\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

均为$f(z) = \tan \pi z$的一阶极点

在$|z| = n$内，共有$2n$个一阶极点

$$z_k = k+1/2,\ k = 0, \pm 1, \cdots \pm (n-1), -n$$

应用之二

例11.5 计算积分 $\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】 $$\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = \oint_{|z|=n} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \tan \pi z\text{在围道内的留数和}$$

在z_k处的留数： $$\operatorname{res} f(z_k) = \left.\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=z_k} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\therefore \quad \oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot 2n \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4n\mathrm{i}$$

应用之二

例11.5 计算积分$\displaystyle\oint_{|z|=n}\tan\pi z\mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】$\displaystyle\oint_{|z|=n}\tan\pi z\mathrm{d}z=\oint_{|z|=n}\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}\mathrm{d}z$

$=2\pi\mathrm{i}\times\tan\pi z$在围道内的留数和

在z_k处的留数：$\displaystyle\operatorname{res}f(z_k)=\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\bigg|_{z=z_k}=-\frac{1}{\pi}$

$$\therefore\quad\oint_{|z|=n}\tan\pi z\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot2n\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-4n\mathrm{i}$$

应用之二

例11.5 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z$，$n$为正整数

【解】 $\displaystyle\oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = \oint_{|z|=n} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \mathrm{d}z$

$= 2\pi\mathrm{i} \times \tan \pi z$在围道内的留数和

在z_k处的留数： $\displaystyle\operatorname{res} f(z_k) = \left.\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=z_k} = -\frac{1}{\pi}$

$$\therefore \quad \oint_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot 2n \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4n\mathrm{i}$$

讲授要点

1. 留数定理
   - 留数定理
   - 留数定理的初步应用
   - 无穷远点处的留数
2. 留数定理计算定积分
   - 有理三角函数的积分
   - 无穷积分

无穷远点处的留数

定义 $$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z$$

- C'是绕∞点正向(即顺时针方向)一周的围道
- ∞点可能是$f(z)$的奇点
- 围道内别无奇点

$\operatorname{res} f(\infty)$的特殊性

- $\operatorname{res} f(\infty)$并不是$f(z)$在$\infty$点邻域内Laurent展开中$z^{-1}$项的系数

无穷远点处的留数

定义 $$\mathrm{res}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z$$

- C'是绕∞点正向(即顺时针方向)一周的围道
- ∞点可能是$f(z)$的奇点
- 围道内别无奇点

$\mathrm{res}\, f(\infty)$的特殊性

- $\mathrm{res}\, f(\infty)$并不是$f(z)$在∞点邻域内Laurent展开中z^1项的系数

无穷远点处的留数

定义 $$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z) \mathrm{d}z$$

$\operatorname{res} f(\infty)$的特殊性

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z) \mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$= -\dfrac{f(1/t)}{t^2}$在$t=0$点幂级数展开中t^{-1}项的系数

$= -f(1/t)$在$t=0$点幂级数展开中t^{1}项的系数

$= -f(z)$在$z=\infty$点幂级数展开中z^{-1}项的系数

无穷远点处的留数

定义 $$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z$$

res $f(\infty)$的特殊性

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$= -\dfrac{f(1/t)}{t^2}$在$t=0$点幂级数展开中t^{-1}项的系数

$= -f(1/t)$在$t=0$点幂级数展开中t^{1}项的系数

$= -f(z)$在$z=\infty$点幂级数展开中z^{-1}项的系数

无穷远点处的留数

定义 $$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z$$

$\operatorname{res} f(\infty)$的特殊性

$$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$=-\frac{f(1/t)}{t^2}\text{在}t=0\text{点幂级数展开中}t^{-1}\text{项的系数}$$

$$=-f(1/t)\text{在}t=0\text{点幂级数展开中}t^{1}\text{项的系数}$$

$$=-f(z)\text{在}z=\infty\text{点幂级数展开中}z^{-1}\text{项的系数}$$

无穷远点处的留数

定义 $$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z$$

$\operatorname{res} f(\infty)$的特殊性

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$= -\dfrac{f(1/t)}{t^2}$在$t=0$点幂级数展开中t^{-1}项的系数

$= -f(1/t)$在$t=0$点幂级数展开中t^{1}项的系数

$= -f(z)$在$z=\infty$点幂级数展开中z^{-1}项的系数

$\mathrm{res}\, f(\infty) = -f(z)$在$z=\infty$点幂级数展开中$z^{-1}$项的系数

和有限远点的不同之处

- 从结果上说，函数$f(z)$在∞点的留数，等于$f(z)$在∞点邻域内幂级数展开中z^{-1}项的系数乘以-1，这里多了一个负号
- 从概念上说，由于z^{-1}项属于$f(z)$在∞点邻域内幂级数展开式的正则部分，因此即使∞点不是$f(z)$的奇点，$\mathrm{res}\, f(\infty)$也可以不为0
反之，即使∞点是$f(z)$的奇点，甚至是一阶极点，$\mathrm{res}\, f(\infty)$也可以为0

$\operatorname{res} f(\infty) = -f(z)$在$z=\infty$点幂级数展开中$z^{-1}$项的系数

和有限远点的不同之处

- 从结果上说，函数$f(z)$在∞点的留数，等于$f(z)$在∞点邻域内幂级数展开中z^{-1}项的系数乘以-1，这里多了一个负号
- 从概念上说，由于z^{-1}项属于$f(z)$在∞点邻域内幂级数展开式的正则部分，因此即使∞点不是$f(z)$的奇点，$\operatorname{res} f(\infty)$也可以不为0
反之，即使∞点是$f(z)$的奇点，甚至是一阶极点，$\operatorname{res} f(\infty)$也可以为0

$\text{res}\, f(\infty) = -f(z)$在$z=\infty$点幂级数展开中$z^{-1}$项的系数

和有限远点的不同之处

- 从数值上说，如果函数$f(z)$在整个复平面上除有限个孤立奇点外处处单值解析，由于该积分围道内包括了复平面上所有的奇点，这时$\text{res}\, f(\infty) = (-1)\times$平面内(有限远处)所有奇点的留数和
- 换言之，如果函数$f(z)$在整个复平面上除有限个孤立奇点外处处单值解析，则在扩充的全平面上留数和为0

$\mathrm{res}\, f(\infty) = -f(z)$在$z = \infty$点幂级数展开中$z^{-1}$项的系数

和有限远点的不同之处

- 从数值上说，如果函数$f(z)$在整个复平面上除有限个孤立奇点外处处单值解析， 由于该积分围道内包括了复平面上所有的奇点，这时$\mathrm{res}\, f(\infty) = (-1)\times$平面内(有限远处)所有奇点的留数和
- 换言之，如果函数$f(z)$在整个复平面上除有限个孤立奇点外处处单值解析， 则在扩充的全平面上留数和为0

例11.6 函数∞处的留数

- $f(z)=\dfrac{1}{z}$ $\qquad$ $\operatorname{res} f(\infty)=-1$

  $z=\infty$是$f(z)$的可去奇点，但$\operatorname{res} f(\infty)\neq 0$

- $f(z)=z$ $\qquad$ $\operatorname{res} f(\infty)=0$

  $z=\infty$是$f(z)$的一阶极点，但$\operatorname{res} f(\infty)=0$

- $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ $\qquad$ $\operatorname{res} f(\infty)=0$

  $f(z)$是偶函数，因此$\operatorname{res} f(\infty)=0$

- $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$ $\qquad$ $\operatorname{res} f(\infty)=-\mathrm{i}(a-b)$

  $z=\infty$是$f(z)$的本性奇点，$\operatorname{res} f(\infty)\neq 0$

例11.6 函数∞处的留数

- $f(z)=\dfrac{1}{z}$ $\qquad$ $\mathrm{res}\, f(\infty)=-1$
  $z=\infty$是$f(z)$的可去奇点，但$\mathrm{res}\, f(\infty)\neq 0$
- $f(z)=z$ $\qquad$ $\mathrm{res}\, f(\infty)=0$
  $z=\infty$是$f(z)$的一阶极点，但$\mathrm{res}\, f(\infty)=0$
- $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ $\qquad$ $\mathrm{res}\, f(\infty)=0$
  $f(z)$是偶函数，因此$\mathrm{res}\, f(\infty)=0$
- $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iaz}-\mathrm{e}^{ibz}}{z^2}$ $\qquad$ $\mathrm{res}\, f(\infty)=-\mathrm{i}(a-b)$
  $z=\infty$是$f(z)$的本性奇点，$\mathrm{res}\, f(\infty)\neq 0$

例11.6 函数∞处的留数

- $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\qquad \operatorname{res} f(\infty) = -1$
  $z = \infty$是$f(z)$的可去奇点，但$\operatorname{res} f(\infty) \neq 0$
- $f(z) = z$ $\qquad \operatorname{res} f(\infty) = 0$
  $z = \infty$是$f(z)$的一阶极点，但$\operatorname{res} f(\infty) = 0$
- $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ $\qquad \operatorname{res} f(\infty) = 0$
  $f(z)$是偶函数，因此$\operatorname{res} f(\infty) = 0$
- $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iaz} - \mathrm{e}^{ibz}}{z^2}$ $\qquad \operatorname{res} f(\infty) = -\mathrm{i}(a-b)$
  $z = \infty$是$f(z)$的本性奇点，$\operatorname{res} f(\infty) \neq 0$

例11.6　函数∞处的留数

- $f(z)=\dfrac{1}{z}$　　$\operatorname{res} f(\infty)=-1$
  $z=\infty$是$f(z)$的可去奇点，但$\operatorname{res} f(\infty)\neq 0$
- $f(z)=z$　　$\operatorname{res} f(\infty)=0$
  $z=\infty$是$f(z)$的一阶极点，但$\operatorname{res} f(\infty)=0$
- $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$　　$\operatorname{res} f(\infty)=0$
  $f(z)$是偶函数，因此$\operatorname{res} f(\infty)=0$
- $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$　　$\operatorname{res} f(\infty)=-\mathrm{i}(a-b)$
  $z=\infty$是$f(z)$的本性奇点，$\operatorname{res} f(\infty)\neq 0$

留数定理计算定积分

如果能将(实的)定积分和(复的)围道积分联系起来，就可以应用留数定理计算定积分

应用留数定理计算定积分的简便之处在于把积分的计算转化为留数的计算

留数定理计算定积分

如果能将(实的)定积分和(复的)围道积分联系起来，就可以应用留数定理计算定积分

应用留数定理计算定积分的简便之处在于把积分的计算转化为留数的计算

留数定理计算定积分

如果能将(实的)定积分和(复的)围道积分联系起来，就可以应用留数定理计算定积分

应用留数定理计算定积分的简便之处在于把积分的计算转化为留数的计算

讲授要点

1. 留数定理
   - 留数定理
   - 留数定理的初步应用
   - 无穷远点处的留数
2. 留数定理计算定积分
   - 有理三角函数的积分
   - 无穷积分

有理三角函数的积分

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中R是$\sin\theta$, $\cos\theta$的有理函数，在$[0,2\pi]$上连续

作变换$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\qquad\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}\qquad\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$\therefore\qquad I=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

积分路径变为z平面上的单位圆的圆周$|z|=1$

有理三角函数的积分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中R是$\sin\theta$, $\cos\theta$的有理函数，在$[0, 2\pi]$上连续

作变换$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\sin\theta = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z} \quad \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z} \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$\therefore \qquad I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

积分路径变为z平面上的单位圆的圆周$|z| = 1$

有理三角函数的积分

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中R是$\sin\theta$, $\cos\theta$的有理函数，在$[0,2\pi]$上连续

作变换$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\qquad\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}\qquad\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$\therefore\qquad I=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

积分路径变为z平面上的单位圆的圆周$|z|=1$

有理三角函数的积分

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中R是$\sin\theta$, $\cos\theta$的有理函数，在$[0,2\pi]$上连续

作变换$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\qquad\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}\qquad\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$\therefore\qquad I=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

积分路径变为z平面上的单位圆的圆周$|z|=1$

有理三角函数的积分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中R是$\sin\theta$, $\cos\theta$的有理函数，在$[0, 2\pi]$上连续

有理三角函数$R(\sin\theta, \cos\theta)$在积分区间$[0, 2\pi]$上连续，保证了有理函数 $R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$在单位圆的圆周上无奇点

$$\therefore \quad I = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{res}\left\{\frac{1}{z} R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\right\}$$

有理三角函数的积分

$$I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中R是$\sin\theta$, $\cos\theta$的有理函数，在$[0,2\pi]$上连续

有理三角函数$R(\sin\theta,\cos\theta)$在积分区间$[0,2\pi]$上连续，保证了有理函数 $R\left(\dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\dfrac{z^2+1}{2z}\right)$在单位圆的圆周上无奇点

$$\therefore\qquad I=2\pi\sum_{|z|<1}\operatorname{res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\frac{z^2+1}{2z}\right)\right\}$$

例11.7 计算积分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta} \mathrm{d}\theta, \quad |\varepsilon| < 1$

【解】仿照上面的方法步骤

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1+\varepsilon(z^2+1)/(2z)} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}$$

$$= 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{res} \left\{ \frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \right\}$$

例11.7 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |\varepsilon|<1$

【解】仿照上面的方法步骤

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon(z^2+1)/(2z)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}$$

$$=2\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{res}\left\{\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\right\}$$

例11.7　计算积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |\varepsilon|<1$

【解】仿照上面的方法步骤

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon(z^2+1)/(2z)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}$$

$$=2\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{res}\left\{\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\right\}$$

例11.7　计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |\varepsilon|<1$

【解】仿照上面的方法步骤

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon(z^2+1)/(2z)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}$$

$$=2\pi\sum_{|z|<1}\mathrm{res}\left\{\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\right\}$$

例11.7 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |\varepsilon|<1$

$\dfrac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$的奇点 $z_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

均为一阶极点

$z_1\cdot z_2=1 \Longrightarrow z_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$处于单位圆内

$$\therefore\quad I=2\pi\cdot\frac{2}{2\varepsilon z+2}\bigg|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例11.7　计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\qquad |\varepsilon|<1$

$$\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\text{的奇点}\quad z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

均为一阶极点

$$z_1\cdot z_2=1\quad\Longrightarrow\quad z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\text{处于单位圆内}$$

$$\therefore\qquad I=2\pi\cdot\frac{2}{2\varepsilon z+2}\bigg|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例11.7　计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta, \quad |\varepsilon|<1$

$\dfrac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$的奇点　$z_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

均为一阶极点

$$z_1\cdot z_2=1 \quad\Longrightarrow\quad z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\text{处于单位圆内}$$

$$\therefore \qquad I=2\pi\cdot\frac{2}{2\varepsilon z+2}\bigg|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例11.7 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |\varepsilon|<1$

$\dfrac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$的奇点 $\quad z_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

均为一阶极点

$z_1\cdot z_2=1 \quad\Longrightarrow\quad z_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$处于单位圆内

$\therefore\qquad I=2\pi\cdot\left.\dfrac{2}{2\varepsilon z+2}\right|_{z=z_1}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

例11.7　计算积分$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta, \quad |\varepsilon| < 1$

$\frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}$的奇点　$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

均为一阶极点

$z_1 \cdot z_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$处于单位圆内

$$\therefore \qquad I = 2\pi \cdot \left.\frac{2}{2\varepsilon z + 2}\right|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例11.7　计算积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta, \quad |\varepsilon|<1$

$\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$的奇点　$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

均为一阶极点

$z_1\cdot z_2=1 \quad\Longrightarrow\quad z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$处于单位圆内

$$\therefore \qquad I=2\pi\cdot\frac{2}{2\varepsilon z+2}\bigg|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例11.7　计算积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta,\quad |\varepsilon|<1$

$\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$的奇点　$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

均为一阶极点

$$z_1\cdot z_2=1 \quad\Longrightarrow\quad z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\text{处于单位圆内}$$

$$\therefore\qquad I=2\pi\cdot\left.\frac{2}{2\varepsilon z+2}\right|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例11.8 计算积分$I=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta$，$n$为非负整数

【解】

$$I=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{2^{2n}z^{2n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\mathrm{res}\left\{\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\right\}_{z=0}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

例11.8 计算积分$I=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta$，$n$为非负整数

【解】

$$I=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{2^{2n}z^{2n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\mathrm{res}\left\{\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\right\}_{z=0}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

例11.8 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta$，$n$为非负整数

【解】

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\
&= \oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{2^{2n}z^{2n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}\\
&= \frac{2\pi}{2^{2n}}\mathrm{res}\left\{\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\right\}_{z=0}\\
&= \frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}
\end{aligned}
$$

例11.8　计算积分$I=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$，$n$为非负整数

【解】

$$I=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{2^{2n}z^{2n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\mathrm{res}\left\{\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\right\}_{z=0}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

例11.8 计算积分$I=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$，$n$为非负整数

【解】

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\
&= \oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^{2n}}{2^{2n}z^{2n+1}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}} \\
&= \frac{2\pi}{2^{2n}}\mathrm{res}\left\{\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\right\}_{z=0} \\
&= \frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}
\end{aligned}
$$

讲授要点

1. 留数定理
   - 留数定理
   - 留数定理的初步应用
   - 无穷远点处的留数
2. 留数定理计算定积分
   - 有理三角函数的积分
   - 无穷积分

无穷积分

无穷积分的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\mathrm{d}x$$

有时这种极限不存在，但 $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，称为积分主值，记为

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$

显然，当这两种极限都存在时，它们必定相等

无穷积分

无穷积分的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\mathrm{d}x$$

有时这种极限不存在，但 $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$存在，称为积分主值，记为

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$

显然，当这两种极限都存在时，它们必定相等

无穷积分

无穷积分的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\mathrm{d}x$$

有时这种极限不存在，但 $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，称为积分主值，记为

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$

显然，当这两种极限都存在时，它们必定相等

在复平面上看，积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$是沿着实轴进行的，如何能转化为复变函数的围道积分?

- 可以将实函数$f(x)$延拓为复函数$f(z)$
- 为了能构成围道积分并应用留数定理计算，还必须：
  1. 补上适当的积分路径（“辅助路径”）而形成闭合围道，计算$\displaystyle\oint f(z)\mathrm{d}z$
  2. 在辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

在复平面上看，积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$是沿着实轴进行的，如何能转化为复变函数的围道积分?

- 可以将实函数$f(x)$延拓为复函数$f(z)$
- 为了能构成围道积分并应用留数定理计算，还必须：
  1. 补上适当的积分路径(“辅助路径”)而形成闭合围道，计算$\oint f(z)\mathrm{d}z$
  2. 在辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

在复平面上看，积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$是沿着实轴进行的，如何能转化为复变函数的围道积分?

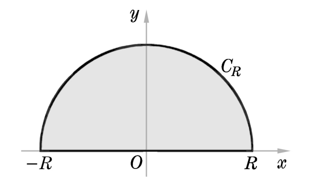
- 可以将实函数$f(x)$延拓为复函数$f(z)$
- 为了能构成围道积分并应用留数定理计算，还必须：
  1. 补上适当的积分路径(“辅助路径”)而形成闭合围道，计算$\displaystyle\oint f(z)\mathrm{d}z$
  2. 在辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

在复平面上看，积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$是沿着实轴进行的，如何能转化为复变函数的围道积分?

- 可以将实函数$f(x)$延拓为复函数$f(z)$
- 为了能构成围道积分并应用留数定理计算，还必须：
  1. 补上适当的积分路径(“辅助路径”)而形成闭合围道，计算$\oint f(z)\mathrm{d}z$
  2. 在辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

常用的积分围道

最自然的做法是补上以原点为圆心、R为半径的上半圆C_R



$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

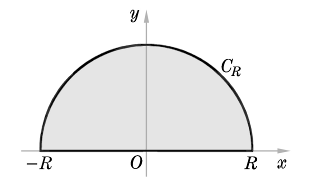
而后令$R\to\infty$

☞ 这样，我们便需要计算 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$

☞ 这要求$f(z)$满足适当的条件

常用的积分围道

最自然的做法是补上以原点为圆心、R为半径的上半圆C_R



$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

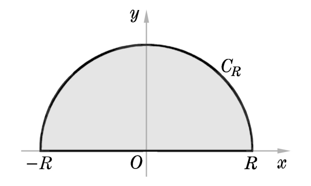
而后令$R \to \infty$

☞ 这样，我们便需要计算 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$

☞ 这要求$f(z)$满足适当的条件

常用的积分围道

最自然的做法是补上以原点为圆心、R为半径的上半圆C_R



$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

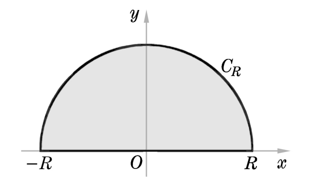
而后令$R\to\infty$

☞ 这样，我们便需要计算 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$

☞ 这要求$f(z)$满足适当的条件

常用的积分围道

最自然的做法是补上以原点为圆心、R为半径的上半圆C_R



$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

而后令$R \to \infty$

☞ 这样，我们便需要计算 $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$

☞ 这要求$f(z)$满足适当的条件

不妨假设函数$f(z)$满足下列条件：

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0\le \arg z\le \pi$范围内，当$|z|\to\infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

   即对于任给的$\varepsilon>0$，存在$M(\varepsilon)>0$，使当$|z|\ge M, 0\le \arg z\le\pi$时，$|zf(z)|<\varepsilon$

不妨假设函数$f(z)$满足下列条件：

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0 \leq \arg z \leq \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

即对于任给的$\varepsilon > 0$，存在$M(\varepsilon) > 0$，使当

$|z| \geq M, 0 \leq \arg z \leq \pi$时，$|zf(z)| < \varepsilon$

不妨假设函数$f(z)$满足下列条件：

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0 \le \arg z \le \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

即对于任给的$\varepsilon > 0$，存在$M(\varepsilon) > 0$，使当$|z| \ge M, 0 \le \arg z \le \pi$时，$|zf(z)| < \varepsilon$

不妨假设函数$f(z)$满足下列条件：

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0 \le \arg z \le \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

即对于任给的$\varepsilon > 0$，存在$M(\varepsilon) > 0$，使当$|z| \ge M$, $0 \le \arg z \le \pi$时，$|zf(z)| < \varepsilon$

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0 \leq \arg z \leq \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

这两个条件并不苛刻

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0 \leq \arg z \leq \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

第1个条件保证了原来的实变积分不是瑕积分，并且可以应用留数定理计算围道积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z)$$

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0 \le \arg z \le \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

第2个条件，首先是作为实变无穷积分收敛条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = 0$$

的自然推广，同时，根据引理3.2，又保证了

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

1. $f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析，在实轴上没有奇点
2. 在$0 \le \arg z \le \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$zf(z)$一致地趋于0

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z)$$

取极限$R \to \infty$，就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z)$$

例11.9 计算定积分$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$

【解】 此积分显然符合上述要求

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = 2\pi\mathrm{i} \times \operatorname{res}\left\{\frac{1}{(1+z^2)^3}\right\}_{z=\mathrm{i}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \left(-\frac{3\mathrm{i}}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z)$$

例11.9 计算定积分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$

【解】 此积分显然符合上述要求

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = 2\pi\mathrm{i} \times \operatorname{res}\left\{\frac{1}{(1+z^2)^3}\right\}_{z=\mathrm{i}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \left(-\frac{3\mathrm{i}}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\, f(z)$$

例11.9 计算定积分$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$

【解】 此积分显然符合上述要求

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = 2\pi\mathrm{i} \times \mathrm{res}\left\{\frac{1}{(1+z^2)^3}\right\}_{z=\mathrm{i}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \left(-\frac{3\mathrm{i}}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z)$$

例11.9　计算定积分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$

【解】此积分显然符合上述要求

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = 2\pi\mathrm{i} \times \operatorname{res}\left\{\frac{1}{(1+z^2)^3}\right\}_{z=\mathrm{i}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \left(-\frac{3\mathrm{i}}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z)$$

例11.9　计算定积分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$

【解】 此积分显然符合上述要求

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = 2\pi\mathrm{i} \times \operatorname{res} \left\{ \frac{1}{(1+z^2)^3} \right\}_{z=\mathrm{i}}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \left(-\frac{3\mathrm{i}}{16} \right) = \frac{3\pi}{8}$$

小结

为了对于应用留数定理计算定积分的基本思想有一个比较深入的理解，不妨回顾一下前面的叙述

为能构成围道积分并应用留数定理计算，必须：

1. 补上适当的积分路径（“辅助路径”）而形成闭合围道，计算 $\oint f(z)\mathrm{d}z$
2. 辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

基于这样的理解，就可以更加灵活地运用留数定理计算定积分

小结

为了对于应用留数定理计算定积分的基本思想有一个比较深入的理解，不妨回顾一下前面的叙述

为能构成围道积分并应用留数定理计算，必须：

1. 补上适当的积分路径（“辅助路径”）而形成闭合围道，计算 $\oint f(z)\mathrm{d}z$
2. 辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

基于这样的理解，就可以更加灵活地运用留数定理计算定积分

小结

为了对于应用留数定理计算定积分的基本思想有一个比较深入的理解，不妨回顾一下前面的叙述

为能构成围道积分并应用留数定理计算，必须：

1. 补上适当的积分路径（“辅助路径”）而形成闭合围道，计算 $\oint f(z)\mathrm{d}z$
2. 辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

基于这样的理解，就可以更加灵活地运用留数定理计算定积分

小结

为了对于应用留数定理计算定积分的基本思想有一个比较深入的理解，不妨回顾一下前面的叙述

为能构成围道积分并应用留数定理计算，必须：

1. 补上适当的积分路径(“辅助路径”)而形成闭合围道，计算 $\oint f(z)\mathrm{d}z$
2. 辅助路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来

基于这样的理解，就可以更加灵活地运用留数定理计算定积分

讨论题

1. 如果$f(x)$为偶函数，$f(-x)=f(x)$，是否可以应用留数定理计算积分$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$?

2. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$?

3. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^{100}}\mathrm{d}x$?

4. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$?

讨论题

1. 如果$f(x)$为偶函数，$f(-x)=f(x)$，是否可以应用留数定理计算积分$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$？
2. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$？
3. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{100}}\mathrm{d}x$？
4. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$？

讨论题

1. 如果$f(x)$为偶函数，$f(-x)=f(x)$，是否可以应用留数定理计算积分$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$?
2. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$?
3. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{100}}\mathrm{d}x$?
4. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$?

讨论题

1. 如果$f(x)$为偶函数，$f(-x)=f(x)$，是否可以应用留数定理计算积分$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$?
2. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$?
3. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{100}}\mathrm{d}x$?
4. 如何计算积分$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$?