第　九　讲
常微分方程幂级数解法(一)

北京大学　物理学院
数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§6.1 — 6.2
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§9.1, 9.2
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§8.1

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

二阶线性齐次常微分方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0$$

$p(z)$和$q(z)$称为方程的系数

基本出发点

- 微分方程的系数决定了微分方程
- 微分方程的系数决定了微分方程的解
- 微分方程系数的解析性决定了微分方程解的解析性

二阶线性齐次常微分方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d} z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} z}+q(z)w=0$$

$p(z)$和$q(z)$称为方程的系数

基本出发点

- 微分方程的系数决定了微分方程
- 微分方程的系数决定了微分方程的解
- 微分方程系数的解析性决定了微分方程解的解析性

二阶线性齐次常微分方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$p(z)$和$q(z)$称为方程的系数

基本出发点

- 微分方程的系数决定了微分方程
- 微分方程的系数决定了微分方程的解
- 微分方程系数的解析性决定了微分方程解的解析性

讨论

- 用级数解法解常微分方程时，得到的解总是某一指定点z_0的邻域内收敛的无穷级数
- 方程系数$p(z)$, $q(z)$在z_0点的解析性决定了级数解在z_0点的解析性，或者说，就决定了级数解的形式，例如，是Taylor级数还是Laurent级数

讨论

- 用级数解法解常微分方程时，得到的解总是某一指定点z_0的邻域内收敛的无穷级数
- 方程系数$p(z)$, $q(z)$在z_0点的解析性决定了级数解在z_0点的解析性，或者说，就决定了级数解的形式，例如，是Taylor级数还是Laurent级数

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.1　Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

系数是

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2}\qquad q(z)=\frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

故在有限远处的奇点为$z=\pm1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.1　Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

系数是

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2}\qquad q(z)=\frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

故在有限远处的奇点为$z=\pm1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.1　Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + l(l+1)w = 0$$

系数是

$$p(z) = -\frac{2z}{1-z^2} \qquad q(z) = \frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

故在有限远处的奇点为$z=\pm 1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.1　Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

系数是

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2}\qquad q(z)=\frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

故在有限远处的奇点为$z=\pm 1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.1　Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

系数是

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2}\qquad q(z)=\frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

故在有限远处的奇点为$z=\pm 1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.1　Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

系数是

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2}\qquad q(z)=\frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

故在有限远处的奇点为$z=\pm1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.2　超几何(hypergeometric)方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

故在有限远处的奇点为$z=0$与$z=1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.2　超几何(hypergeometric)方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

故在有限远处的奇点为$z=0$与$z=1$

定义

- 如果$p(z)$, $q(z)$均在z_0点解析，则z_0点称为方程的常点
- 如果$p(z)$, $q(z)$中至少有一个在z_0点不解析，则z_0点称为方程的奇点

例9.2　超几何(hypergeometric)方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

故在有限远处的奇点为$z=0$与$z=1$

无穷远点

要判断无穷远点$z=\infty$是不是方程的奇点，则必须作变换$z=1/t$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-t^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\qquad \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}=t^4\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+2t^3\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

因此方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0 \tag{1}$$

变为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0 \tag{2}$$

如果$t=0$是方程(2)的常点(奇点)，则称$z=\infty$是方程(1)的常点(奇点)

无穷远点

要判断无穷远点$z=\infty$是不是方程的奇点，则必须作变换$z=1/t$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-t^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}=t^4\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+2t^3\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

因此方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0 \qquad (1)$$

变为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0 \qquad (2)$$

如果$t=0$是方程(2)的常点(奇点)，则称$z=\infty$是方程(1)的常点(奇点)

无穷远点

要判断无穷远点$z=\infty$是不是方程的奇点，则必须作变换$z=1/t$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-t^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\qquad \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}=t^4\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+2t^3\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

因此方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0 \tag{1}$$

变为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0 \tag{2}$$

如果$t=0$是方程(2)的常点(奇点)，则称$z=\infty$是方程(1)的常点(奇点)

当 $$\begin{aligned} p(1/t) &= 2t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots \\ q(1/t) &= b_4 t^4 + b_5 t^5 + \cdots \end{aligned}$$ 时，$t=0$ 是方程 $$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \frac{q(1/t)}{t^4} w = 0$$ 的常点

当 $$\begin{aligned} p(z) &= \frac{2}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots \\ q(z) &= \frac{b_4}{z^4} + \frac{b_5}{z^5} + \cdots \end{aligned}$$ 时，$z=\infty$ 是方程 $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 的常点

当 $$\begin{aligned} p(1/t) &= 2t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots \\ q(1/t) &= b_4t^4 + b_5t^5 + \cdots \end{aligned}$$ 时，$t = 0$

是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2} + \left[\dfrac{2}{t} - \dfrac{p(1/t)}{t^2}\right]\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q(1/t)}{t^4}w = 0$ 的常点

当 $$\begin{aligned} p(z) &= \frac{2}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots \\ q(z) &= \frac{b_4}{z^4} + \frac{b_5}{z^5} + \cdots \end{aligned}$$ 时，$z = \infty$是

方程 $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 的常点

当
$$p(z)=\frac{2}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots$$
$$q(z)=\frac{b_4}{z^4}+\frac{b_5}{z^5}+\cdots$$
时，$z=\infty$是方程 $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ 的常点

- $z=\infty$是Legendre方程
$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$
的奇点

- Legendre方程共有三个奇点：$z=\pm1,\infty$

当
$$p(z) = \frac{2}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots$$
$$q(z) = \frac{b_4}{z^4} + \frac{b_5}{z^5} + \cdots$$
时，$z = \infty$是方程 $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 的常点

- $z = \infty$是Legendre方程
$$(1 - z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + l(l+1)w = 0$$
的奇点
- Legendre方程共有三个奇点：$z = \pm 1, \infty$

当 $$\begin{aligned} p(z) &= \frac{2}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots \\ q(z) &= \frac{b_4}{z^4} + \frac{b_5}{z^5} + \cdots \end{aligned}$$ 时，$z = \infty$是

方程 $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 的常点

- $z = \infty$是超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \alpha\beta w = 0$$

的奇点

- 超几何方程共有三个奇点：$z = 0, 1, \infty$

当
$$p(z)=\frac{2}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots$$
$$q(z)=\frac{b_4}{z^4}+\frac{b_5}{z^5}+\cdots$$
时，$z=\infty$是

方程 $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ 的常点

- $z=\infty$是超几何方程
$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$
的奇点

- 超几何方程共有三个奇点：$z=0,1,\infty$

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

定理 （不证）

如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=c_0 \quad w'(z_0)=c_1 \quad (c_0, c_1\text{为任意常数})$$

有唯一的一个解$w(z)$，并且$w(z)$在这个圆内单值解析

定理 （不证）

如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=c_0\quad w'(z_0)=c_1\quad (c_0,c_1\text{为任意常数})$$

有唯一的一个解$w(z)$，并且$w(z)$在这个圆内单值解析

定理 （不证）

如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=c_0 \quad w'(z_0)=c_1 \quad (c_0, c_1\text{为任意常数})$$

有唯一的一个解$w(z)$，并且$w(z)$在这个圆内单值解析

定理 （不证）

如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=c_0 \quad w'(z_0)=c_1 \quad (c_0, c_1\text{为任意常数})$$

有唯一的一个解$w(z)$，并且$w(z)$在这个圆内单值解析

- 因此可以把$w(z)$在z_0点的邻域$|z-z_0|<R$内展开为Taylor级数 $w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$
- 这里$(z-z_0)^0$与$(z-z_0)^1$的系数c_0与c_1正好和初值条件一致

定理 （不证）

如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=c_0 \quad w'(z_0)=c_1 \quad (c_0, c_1\text{为任意常数})$$

有唯一的一个解$w(z)$，并且$w(z)$在这个圆内单值解析

- 因此可以把$w(z)$在z_0点的邻域$|z-z_0|<R$内展开为Taylor级数 $w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$
- 这里$(z-z_0)^0$与$(z-z_0)^1$的系数c_0与c_1正好和初值条件一致

定理 （不证）

如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=c_0 \quad w'(z_0)=c_1 \quad (c_0, c_1\text{为任意常数})$$

有唯一的一个解$w(z)$，并且$w(z)$在这个圆内单值解析

- 将级数解$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$代入微分方程，比较系数，就可以求出系数$c_k$
- 定理说明，系数$c_k(k=2,3,\cdots)$均可用c_0, c_1表示

定理 （不证）

如果$p(z)$和$q(z)$在圆$|z-z_0|<R$内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$
$$w(z_0)=c_0 \quad w'(z_0)=c_1 \quad (c_0, c_1\text{为任意常数})$$

有唯一的一个解$w(z)$，并且$w(z)$在这个圆内单值解析

- 将级数解$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$代入微分方程，比较系数，就可以求出系数$c_k$
- 定理说明，系数$c_k(k=2,3,\cdots)$均可用c_0, c_1表示

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

例9.3　求Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中l是一个参数

解　$z=0$是方程的常点，因此可令$w(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$

代入方程，就有

$$(1-z^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)z^{k-2}-2z\sum_{k=0}^{\infty}c_kkz^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0$$

整理合并，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-\big[k(k+1)-l(l+1)\big]c_k\Big\}z^k=0$$

例9.3 求Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中l是一个参数

解 $z=0$是方程的常点，因此可令$w(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$

代入方程，就有

$$(1-z^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)z^{k-2}-2z\sum_{k=0}^{\infty}c_kkz^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0$$

整理合并，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-\big[k(k+1)-l(l+1)\big]c_k\Big\}z^k=0$$

例9.3 求Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中l是一个参数

解 $z=0$是方程的常点，因此可令$w(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$

代入方程，就有

$$(1-z^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)z^{k-2}-2z\sum_{k=0}^{\infty}c_kkz^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0$$

整理合并，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-\big[k(k+1)-l(l+1)\big]c_k\Big\}z^k=0$$

例9.3　求Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中l是一个参数

解　$z=0$是方程的常点，因此可令$w(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$

代入方程，就有

$$(1-z^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)z^{k-2}-2z\sum_{k=0}^{\infty}c_kkz^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0$$

整理合并，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-\big[k(k+1)-l(l+1)\big]c_k\Big\}z^k=0$$

例9.3　求Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中l是一个参数

根据Taylor展开的唯一性，可得

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-\big[k(k+1)-l(l+1)\big]c_k=0$$

即系数之间的递推关系

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$$

$$(c_0,c_1)\xrightarrow{\text{递推关系}}c_k\longrightarrow w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

例9.3　求Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中l是一个参数

根据Taylor展开的唯一性，可得

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-\big[k(k+1)-l(l+1)\big]c_k=0$$

即系数之间的递推关系

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$$

$$(c_0,c_1)\xrightarrow{\text{递推关系}}c_k\longrightarrow w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

例9.3 求Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中l是一个参数

根据Taylor展开的唯一性，可得

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-\Big[k(k+1)-l(l+1)\Big]c_k=0$$

即系数之间的递推关系

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$$

$$(c_0,c_1)\xrightarrow{\text{递推关系}}c_k\longrightarrow w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$

$$c_2 = \frac{(-l)(l+1)}{2\cdot 1}c_0$$

$$c_3 = \frac{(1-l)(l+2)}{3\cdot 2}c_1$$

$\cdots$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$

$$c_2 = \frac{(-l)(l+1)}{2\cdot 1}c_0$$

$$c_3 = \frac{(1-l)(l+2)}{3\cdot 2}c_1$$

$\cdots$

系数之间的递推关系 $c_{k+2} = \dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)} c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$

$$c_2 = \frac{(-l)(l+1)}{2 \cdot 1} c_0$$

$$c_3 = \frac{(1-l)(l+2)}{3 \cdot 2} c_1$$

$$\cdots$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ **$c_0 \Rightarrow c_{2n}$**

$$c_{2n} = \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)}c_{2n-2}$$

$$= \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)} \times \frac{(2n-l-4)(2n+l-3)}{(2n-2)(2n-3)}c_{2n-4} = \cdots$$

$$= \frac{1}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l) \times (2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)c_0$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $\qquad c_0 \Rightarrow c_{2n}$

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)}c_{2n-2} \\
&= \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)} \\
&\quad \times \frac{(2n-l-4)(2n+l-3)}{(2n-2)(2n-3)}c_{2n-4} = \cdots \\
&= \frac{1}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l) \\
&\quad \times(2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)c_0
\end{aligned}$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $c_0 \Rightarrow c_{2n}$

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)}c_{2n-2} \\ &= \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)} \\ &\quad \times \frac{(2n-l-4)(2n+l-3)}{(2n-2)(2n-3)}c_{2n-4} = \cdots \\ &= \frac{1}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l) \\ &\quad \times(2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)c_0 \end{aligned}$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $\qquad$ $c_0 \Rightarrow c_{2n}$

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)}c_{2n-2} \\ &= \frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)} \\ &\quad \times \frac{(2n-l-4)(2n+l-3)}{(2n-2)(2n-3)}c_{2n-4} = \cdots \\ &= \frac{1}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l) \\ &\quad \times (2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)c_0 \end{aligned}$$

化简

$$c_{2n}=\frac{1}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l)$$
$$\times(2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)c_0$$

利用公式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$$

$$\therefore\quad c_{2n}=\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}c_0$$

化简

$$c_{2n} = \frac{1}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l)$$
$$\times(2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)c_0$$

利用公式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$$

$$\therefore \quad c_{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}c_0$$

化简

$$c_{2n} = \frac{1}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l)$$
$$\times(2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)c_0$$

利用公式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$$

$$\therefore \quad c_{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}c_0$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0,c_1)\Rightarrow c_k$ **$c_1\Rightarrow c_{2n+1}$**

$$c_{2n+1}=\frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}c_{2n-1}$$

$$=\frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}\times\frac{(2n-l-3)(2n+l-2)}{(2n-1)(2n-2)}c_{2n-3}=\cdots$$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1)\times(2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2)c_1$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0,c_1)\Rightarrow c_k$ **$c_1\Rightarrow c_{2n+1}$**

$$\begin{aligned}c_{2n+1}&=\frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}c_{2n-1}\\&=\frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}\\&\quad\times\frac{(2n-l-3)(2n+l-2)}{(2n-1)(2n-2)}c_{2n-3}=\cdots\\&=\frac{1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1)\\&\quad\times(2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2)c_1\end{aligned}$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $\qquad$ $c_1 \Rightarrow c_{2n+1}$

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}c_{2n-1} \\ &= \frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)} \\ &\quad\times\frac{(2n-l-3)(2n+l-2)}{(2n-1)(2n-2)}c_{2n-3} = \cdots \\ &= \frac{1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1) \\ &\quad\times(2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2)c_1 \end{aligned}$$

系数之间的递推关系 $c_{k+2}=\dfrac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$

$(c_0,c_1)\Rightarrow c_k$ $\qquad$ $c_1\Rightarrow c_{2n+1}$

$$\begin{aligned}c_{2n+1}&=\frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}c_{2n-1}\\&=\frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}\\&\quad\times\frac{(2n-l-3)(2n+l-2)}{(2n-1)(2n-2)}c_{2n-3}=\cdots\\&=\frac{1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1)\\&\quad\times(2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2)c_1\end{aligned}$$

化简

$$c_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1) \times(2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2)c_1$$

利用公式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$$

$$\therefore \quad c_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)}c_1$$

化简

$$c_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1)\times(2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2)c_1$$

利用公式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$$

$$\therefore\quad c_{2n+1}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)}c_1$$

化简

$$c_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1)\\ \times(2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2)c_1$$

利用公式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$$

$$\therefore\quad c_{2n+1}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)}c_1$$

结论

Legendre方程 $$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + l(l+1)w = 0$$

的解为 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} z^{2n}$$

$$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)} z^{2n+1}$$

结论

Legendre方程 $$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

的解为 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$

$$w_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}z^{2n}$$

$$w_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)}z^{2n+1}$$

结论

Legendre方程 $$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + l(l+1)w = 0$$

的解为 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} z^{2n}$$

$$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)} z^{2n+1}$$

结论

Legendre方程$(1-z^2)\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$

的解为 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$

- 任给一组c_0和c_1，一定可求出方程的一个特解
- 取$c_0=1, c_1=0$，就得到特解$w_1(z)$
- 取$c_0=0, c_1=1$，就得到特解$w_2(z)$
- 所以$w_1(z)$和$w_2(z)$都是方程的特解
- 并且$w_1(z)$和$w_2(z)$是方程的线性无关解
- 所以如果将c_0, c_1看成是叠加常数，则 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$是方程的通解

结论

Legendre方程$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$

的解为 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$

- 任给一组c_0和c_1，一定可求出方程的一个特解
- 取$c_0=1, c_1=0$，就得到特解$w_1(z)$
- 取$c_0=0, c_1=1$，就得到特解$w_2(z)$
- 所以$w_1(z)$和$w_2(z)$都是方程的特解
- 并且$w_1(z)$和$w_2(z)$是方程的线性无关解
- 所以如果将c_0, c_1看成是叠加常数，则 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$是方程的通解

结论

Legendre方程$(1-z^2)\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$

的解为 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$

- 任给一组c_0和c_1，一定可求出方程的一个特解
- 取$c_0=1, c_1=0$，就得到特解$w_1(z)$
- 取$c_0=0, c_1=1$，就得到特解$w_2(z)$
- 所以$w_1(z)$和$w_2(z)$都是方程的特解
- 并且$w_1(z)$和$w_2(z)$是方程的线性无关解
- 所以如果将c_0, c_1看成是叠加常数，则 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$是方程的通解

结论

Legendre方程$(1-z^2)\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$

的解为 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$

- 任给一组c_0和c_1，一定可求出方程的一个特解
- 取$c_0=1, c_1=0$，就得到特解$w_1(z)$
- 取$c_0=0, c_1=1$，就得到特解$w_2(z)$
- 所以$w_1(z)$和$w_2(z)$都是方程的特解
- 并且$w_1(z)$和$w_2(z)$是方程的线性无关解
- 所以如果将c_0, c_1看成是叠加常数，则 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$是方程的通解

结论

Legendre方程$(1-z^2)\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$

的解为 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$

- 任给一组c_0和c_1，一定可求出方程的一个特解
- 取$c_0=1, c_1=0$，就得到特解$w_1(z)$
- 取$c_0=0, c_1=1$，就得到特解$w_2(z)$
- 所以$w_1(z)$和$w_2(z)$都是方程的特解
- 并且$w_1(z)$和$w_2(z)$是方程的线性无关解
- 所以如果将c_0, c_1看成是叠加常数，则 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$是方程的通解

结论

Legendre方程$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$
的解为 $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$

- 任给一组c_0和c_1，一定可求出方程的一个特解
- 取$c_0=1, c_1=0$，就得到特解$w_1(z)$
- 取$c_0=0, c_1=1$，就得到特解$w_2(z)$
- 所以$w_1(z)$和$w_2(z)$都是方程的特解
- 并且$w_1(z)$和$w_2(z)$是方程的线性无关解
- 所以如果将c_0, c_1看成是叠加常数，则
  $w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$是方程的通解

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

总结

通过这个实例，可以看出

在常点邻域内求级数解的一般步骤

- 将(方程常点邻域内的)解展开为Taylor级数，代入微分方程
- 比较系数，得到系数之间的递推关系
- 反复利用递推关系，求出系数c_n的普遍表达式(用c_0和c_1表示)，从而最后得出级数解

总结

通过这个实例，可以看出

在常点邻域内求级数解的一般步骤

- 将(方程常点邻域内的)解展开为Taylor级数，代入微分方程
- 比较系数，得到系数之间的递推关系
- 反复利用递推关系，求出系数c_k的普遍表达式(用c_0和c_1表示)，从而最后得出级数解

总结

通过这个实例，可以看出

在常点邻域内求级数解的一般步骤

- 将(方程常点邻域内的)解展开为Taylor级数，代入微分方程
- 比较系数，得到系数之间的递推关系
- 反复利用递推关系，求出系数c_k的普遍表达式(用c_0和c_1表示)，从而最后得出级数解

总结

通过这个实例，可以看出

在常点邻域内求级数解的一般步骤

- 将(方程常点邻域内的)解展开为Taylor级数，代入微分方程
- 比较系数，得到系数之间的递推关系
- 反复利用递推关系，求出系数c_k的普遍表达式(用c_0和c_1表示)，从而最后得出级数解

总结

- 由于递推关系一定是线性的(因为方程是线性的)，所以最后的级数解一定可以写成 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$的形式
- 在系数之间的递推关系中，一般会同时出现c_k, c_{k+1}, c_{k+2}三个相邻的系数， 因此c_k会同时依赖于c_0和c_1
- 最后求得的$w_1(z)$或$w_2(z)$一般不会只含有z的偶次幂或奇次幂

总结

- 由于递推关系一定是线性的(因为方程是线性的)，所以最后的级数解一定可以写成 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$ 的形式
- 在系数之间的递推关系中，一般会同时出现 c_k, c_{k+1}, c_{k+2} 三个相邻的系数， 因此 c_k 会同时依赖于 c_0 和 c_1
- 最后求得的 $w_1(z)$ 或 $w_2(z)$ 一般不会只含有 z 的偶次幂或奇次幂

总结

- 由于递推关系一定是线性的(因为方程是线性的)，所以最后的级数解一定可以写成 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$ 的形式
- 在系数之间的递推关系中，一般会同时出现 c_k, c_{k+1}, c_{k+2} 三个相邻的系数，因此 c_k 会同时依赖于 c_0 和 c_1
- 最后求得的 $w_1(z)$ 或 $w_2(z)$ 一般不会只含有 z 的偶次幂或奇次幂

解的解析延拓

- 应用常微分方程的幂级数解法，可以得到方程在一定区域内的解式
- 我们可以根据需要，求出方程在不同区域内的解式
- 可以证明，方程在不同区域内的解式，互为解析延拓
- 因此，也可从方程在某一区域内的解式出发，通过解析延拓，推出方程在其他区域内的解式

解的解析延拓

- 应用常微分方程的幂级数解法，可以得到方程在一定区域内的解式
- 我们可以根据需要，求出方程在不同区域内的解式
- 可以证明，方程在不同区域内的解式，互为解析延拓
- 因此，也可从方程在某一区域内的解式出发，通过解析延拓，推出方程在其他区域内的解式

解的解析延拓

- 应用常微分方程的幂级数解法，可以得到方程在一定区域内的解式
- 我们可以根据需要，求出方程在不同区域内的解式
- 可以证明，方程在不同区域内的解式，互为解析延拓
- 因此，也可从方程在某一区域内的解式出发，通过解析延拓，推出方程在其他区域内的解式

解的解析延拓

- 应用常微分方程的幂级数解法，可以得到方程在一定区域内的解式
- 我们可以根据需要，求出方程在不同区域内的解式
- 可以证明，方程在不同区域内的解式，互为解析延拓
- 因此，也可从方程在某一区域内的解式出发，通过解析延拓，推出方程在其他区域内的解式

解的解析延拓

- 应用常微分方程的幂级数解法，可以得到方程在一定区域内的解式
- 我们可以根据需要，求出方程在不同区域内的解式
- 可以证明，方程在不同区域内的解式，互为解析延拓
- 因此，也可从方程在某一区域内的解式出发，通过解析延拓，推出方程在其他区域内的解式

讲授要点

1. 方程的常点与奇点
   - 二阶线性齐次常微分方程的标准形式
   - 常点与奇点
2. 方程常点邻域内的解
   - 解的存在性定理
   - 例题
   - 讨论
3. 解的解析延拓
   - 两个相关的结论

结论之一

设w_1是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$的解，在区域$G_1$内解析．若$\widetilde{w}_1$是$w_1$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$仍是此方程的解

$\because$ $g(z)\equiv\dfrac{\mathrm{d}^2\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z}+q(z)\widetilde{w}_1$在$G_2$内解析

又$\because$ $\widetilde{w}_1$是w_1在G_2内的解析延拓

$$w_1\equiv\widetilde{w}_1 \qquad z\in G_1\bigcap G_2$$

$\therefore$ $g(z)=0 \qquad z\in G_1\bigcap G_2$ （理由？）

$\therefore$ $g(z)=0 \qquad z\in G_2$ $\square$

结论之一

设w_1是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$的解，在区域$G_1$内解析．若$\widetilde{w}_1$是$w_1$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$仍是此方程的解

$\because \quad g(z)\equiv\dfrac{\mathrm{d}^2\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z}+q(z)\widetilde{w}_1$在$G_2$内解析

又$\because \quad \widetilde{w}_1$是$w_1$在$G_2$内的解析延拓

$$w_1\equiv\widetilde{w}_1 \qquad z\in G_1\bigcap G_2$$

$$\therefore \qquad g(z)=0 \qquad z\in G_1\bigcap G_2 \qquad \text{（理由？）}$$

$$\therefore \qquad g(z)=0 \qquad z\in G_2 \qquad \square$$

结论之一

设w_1是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$的解，在区域$G_1$内解析．若$\widetilde{w}_1$是$w_1$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$仍是此方程的解

$\because\quad g(z)\equiv\dfrac{\mathrm{d}^2\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z}+q(z)\widetilde{w}_1$在$G_2$内解析

又$\because\quad \widetilde{w}_1$是$w_1$在$G_2$内的解析延拓

$$w_1\equiv\widetilde{w}_1\qquad z\in G_1\bigcap G_2$$

$\therefore\qquad g(z)=0\qquad z\in G_1\bigcap G_2\qquad$（理由？）

$\therefore\qquad g(z)=0\qquad z\in G_2\qquad\square$

结论之一

设w_1是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$的解，在区域$G_1$内解析．若$\widetilde{w}_1$是$w_1$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$仍是此方程的解

$\because\quad g(z)\equiv\dfrac{\mathrm{d}^2\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z}+q(z)\widetilde{w}_1$在$G_2$内解析

又$\because\quad\widetilde{w}_1$是$w_1$在$G_2$内的解析延拓

$$w_1\equiv\widetilde{w}_1\qquad z\in G_1\bigcap G_2$$

$$\therefore\qquad g(z)=0\qquad z\in G_1\bigcap G_2\qquad\text{（理由？）}$$

$$\therefore\qquad g(z)=0\qquad z\in G_2\qquad\square$$

结论之一

设w_1是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$的解，在区域$G_1$内解析． 若$\widetilde{w}_1$是$w_1$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$仍是此方程的解

$\because\quad g(z)\equiv\dfrac{\mathrm{d}^2\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z}+q(z)\widetilde{w}_1$在$G_2$内解析

又$\because\quad \widetilde{w}_1$是$w_1$在$G_2$内的解析延拓

$$w_1\equiv\widetilde{w}_1\qquad z\in G_1\bigcap G_2$$

$\therefore\qquad g(z)=0\qquad z\in G_1\bigcap G_2$ （理由？）

$\therefore\qquad g(z)=0\qquad z\in G_2\quad\square$

结论之二

设w_1和w_2是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$两个线性无关解，且均在区域$G_1$内解析． 若$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$分别是$w_1$和$w_2$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$仍线性无关

由结论一知　$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$为方程在G_2内的解，且

$$\Delta[\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2]\equiv\begin{vmatrix}\widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2\\ \widetilde{w}_1' & \widetilde{w}_2'\end{vmatrix}=g(z)\text{在}G_2\text{内解析}$$

而　在$G_1\bigcap G_2$内　$g(z)\neq 0$　　（理由？）

$\therefore\quad g(z)\neq 0\quad z\in G_2$　　即　$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$线性无关　□

结论之二

设w_1和w_2是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$两个线性无关解，且均在区域$G_1$内解析． 若$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$分别是$w_1$和$w_2$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$仍线性无关

由结论一知 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$为方程在G_2内的解，且

$$\Delta[\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2]\equiv\begin{vmatrix}\widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2\\ \widetilde{w}_1' & \widetilde{w}_2'\end{vmatrix}=g(z)\text{在}G_2\text{内解析}$$

而 在$G_1\bigcap G_2$内 $g(z)\neq 0$ （理由？）

$\therefore$ $g(z)\neq 0$ $z\in G_2$ 即 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$线性无关 $\square$

结论之二

设w_1和w_2是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$两个线性无关解，且均在区域$G_1$内解析. 若$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$分别是$w_1$和$w_2$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$仍线性无关

由结论一知 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$为方程在G_2内的解，且

$$\Delta[\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2]\equiv\begin{vmatrix}\widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2\\ \widetilde{w}_1' & \widetilde{w}_2'\end{vmatrix}=g(z)\text{在}G_2\text{内解析}$$

而 在$G_1\bigcap G_2$内 $g(z)\neq 0$ (理由?)

$\therefore$ $g(z)\neq 0$ $z\in G_2$ 即 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$线性无关 $\square$

结论之二

设w_1和w_2是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$两个线性无关解，且均在区域$G_1$内解析． 若$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$分别是$w_1$和$w_2$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$仍线性无关

由结论一知 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$为方程在G_2内的解，且

$$\Delta[\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2]\equiv\begin{vmatrix}\widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2\\ \widetilde{w}_1' & \widetilde{w}_2'\end{vmatrix}=g(z)\text{在}G_2\text{内解析}$$

而 在$G_1\bigcap G_2$内 $g(z)\neq 0$ （理由？）

$\therefore$ $g(z)\neq 0$ $z\in G_2$ 即 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$线性无关 $\square$

结论之二

设w_1和w_2是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$两个线性无关解，且均在区域$G_1$内解析． 若$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$分别是$w_1$和$w_2$在区域$G_2$内的解析延拓，则$\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$仍线性无关

由结论一知 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$为方程在G_2内的解，且

$$\Delta[\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2]\equiv\begin{vmatrix}\widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2\\ \widetilde{w}_1' & \widetilde{w}_2'\end{vmatrix}=g(z)\text{在}G_2\text{内解析}$$

而 在$G_1\bigcap G_2$内 $g(z)\neq 0$ （理由？）

$\therefore$ $g(z)\neq 0$ $z\in G_2$ 即 $\widetilde{w}_1$和$\widetilde{w}_2$线性无关 $\square$