第 七 讲

解析函数的Taylor展开

北京大学 物理学院
数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§5.1 — 5.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.3, 3.5

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§5.1 — 5.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.3, 3.5

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§5.1 — 5.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.3, 3.5

解析函数的Taylor展开

- 一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数

- 如何把一个解析函数表示成幂级数?

解析函数的Taylor展开

- 一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数
- 如何把一个解析函数表示成幂级数?

解析函数的Taylor展开

- 一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数
- 如何把一个解析函数表示成幂级数?

讲授要点

展开定理(Taylor)

设函数$f(z)$在以a为圆心的圆C内及C上解析，则对于圆内的任何z点，$f(z)$可用幂级数展开为(或者说，$f(z)$可在a点展开为幂级数)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

C取逆时针方向[a]

[a] 以后的围道积分，除特别说明的以外，均为逆时针方向

展开定理(Taylor) (要点)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

根据Cauchy积分公式，对于圆C内任意一点z

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$\because\quad \frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

在$\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|\leq r<1$的区域中一致收敛

展开定理(Taylor) (要点)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

根据Cauchy积分公式，对于圆C内任意一点z

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$\because\quad \frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

在$\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|\leq r<1$的区域中一致收敛

展开定理(Taylor) (要点)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

根据Cauchy积分公式，对于圆C内任意一点z

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$\because\quad \frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

在$\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|\le r<1$的区域中一致收敛

展开定理(Taylor) (要点)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

逐项积分

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \right] f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \right] (z-a)^n$$

展开定理(Taylor) **(要点)**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

逐项积分

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right] f(\zeta) \mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \right] (z-a)^n$$

展开定理(Taylor) (要点)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$\therefore$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\qquad\square$$

展开定理(Taylor) (要点)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$\therefore$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\qquad\square$$

展开定理(Taylor) (要点)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$\therefore$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \square$$

例7.1 求e^z在$z=0$点的Taylor展开式

因为e^z在全平面解析，故可展开为

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad |z|<\infty$$

又因$\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}=\mathrm{e}^z$，所以

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}\Big|_{z=0}=\frac{1}{n!}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \qquad |z|<\infty$$

例7.1 求e^z在$z=0$点的Taylor展开式

因为e^z在全平面解析，故可展开为

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad |z|<\infty$$

又因$\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}=\mathrm{e}^z$，所以

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}\Big|_{z=0}=\frac{1}{n!}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \qquad |z|<\infty$$

例7.1 求e^z在$z=0$点的Taylor展开式

因为e^z在全平面解析，故可展开为

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \qquad |z|<\infty$$

又因$\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}=\mathrm{e}^z$，所以

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}\Big|_{z=0}=\frac{1}{n!}$$

$$\therefore \quad \mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \qquad |z|<\infty$$

例7.1　求e^z在$z=0$点的Taylor展开式

因为e^z在全平面解析，故可展开为

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \qquad |z|<\infty$$

又因$\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}=\mathrm{e}^z$，所以

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\mathrm{e}^z\right)^{(n)}\Big|_{z=0}=\frac{1}{n!}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \qquad |z|<\infty$$

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

讨论

1. 定理条件可以放宽，只要$f(z)$在C内解析即可

这时对于给定的z，总可以以a为圆心作一圆C'，把z包围在圆内．$f(z)$在C'内及C'上是解析的

讨论

❶ 定理条件可以放宽，只要$f(z)$在C内解析即可

这时对于给定的z，总可以以a为圆心作一圆C'，把z包围在圆内．$f(z)$在C'内及C'上是解析的

讨论

❷ 这里Taylor展开的形式和实变函数中的Taylor公式相同，但是条件不同

- 在实变函数中，$f(x)$的任何阶导数存在，还不足以保证Taylor公式存在(或Taylor公式收敛)

- 在复变函数中，(圆域内)解析的要求(一阶导数存在)就足以保证Taylor级数收敛

讨论

❷ 这里Taylor展开的形式和实变函数中的Taylor公式相同，但是条件不同

- 在实变函数中，$f(x)$的任何阶导数存在，还不足以保证Taylor公式存在(或Taylor公式收敛)
- 在复变函数中，(圆域内)解析的要求(一阶导数存在)就足以保证Taylor级数收敛

讨论

❷ 这里Taylor展开的形式和实变函数中的Taylor公式相同，但是条件不同

- 在实变函数中，$f(x)$的任何阶导数存在，还不足以保证Taylor公式存在(或Taylor公式收敛)
- 在复变函数中，(圆域内)解析的要求(一阶导数存在)就足以保证Taylor级数收敛

讨论

3. 级数的收敛范围：函数$f(z)$的奇点完全决定了Taylor级数的收敛半径．设b是$f(z)$的离a点最近的奇点，则一般说来，收敛半径$R=|b-a|$

- $f(z)$在圆$|z-a|<|b-a|$内处处解析，则可在圆内展开为Taylor级数（或者说，Taylor级数在圆$|z-a|<|b-a|$内收敛）．这就是说，$f(z)$的Taylor级数收敛半径不小于$|b-a|$
- 收敛半径一般也不能大于$|b-a|$

  否则，b点就包含在收敛圆内，因而幂级数在收敛圆内处处解析，与b点为奇点的假设矛盾（除非b点是可去奇点，见第八讲）

讨论

3. 级数的收敛范围：函数$f(z)$的奇点完全决定了Taylor级数的收敛半径．设b是$f(z)$的离a点最近的奇点，则一般说来，收敛半径$R=|b-a|$
   - $f(z)$在圆$|z-a|<|b-a|$内处处解析，则可在圆内展开为Taylor级数（或者说，Taylor级数在圆$|z-a|<|b-a|$内收敛）．这就是说，$f(z)$的Taylor级数收敛半径不小于$|b-a|$
   - 收敛半径一般也不能大于$|b-a|$
     否则，b点就包含在收敛圆内，因而幂级数在收敛圆内处处解析，与b点为奇点的假设矛盾（除非b点是可去奇点，见第八讲）

讨论

❸ 级数的收敛范围：函数$f(z)$的奇点完全决定了Taylor级数的收敛半径．设b是$f(z)$的离a点最近的奇点，则一般说来，收敛半径$R = |b-a|$

- $f(z)$在圆$|z-a| < |b-a|$内处处解析，则可在圆内展开为Taylor级数（或者说，Taylor级数在圆$|z-a| < |b-a|$内收敛）．这就是说，$f(z)$的Taylor级数收敛半径不小于$|b-a|$
- 收敛半径一般也不能大于$|b-a|$
  否则，b点就包含在收敛圆内，因而幂级数在收敛圆内处处解析，与b点为奇点的假设矛盾
  (除非b点是可去奇点，见第八讲)

举例

在复数范围内

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^{2n} \qquad |z| < 1$$

函数的奇点$z = \pm \mathrm{i}$就决定了Taylor级数的收敛半径，$R = |\pm \mathrm{i}| = 1$

在实数范围内

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n x^{2n} \qquad -1 < x < 1$$

难以理解收敛半径为何是1，因为函数$1/(1+x^2)$在整个实轴上均连续可导、且任意阶导数都存在

举例

在复数范围内

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$

函数的奇点$z=\pm\mathrm{i}$就决定了Taylor级数的收敛半径，$R=|\pm\mathrm{i}|=1$

在实数范围内

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n x^{2n} \qquad -1<x<1$$

难以理解收敛半径为何是1，因为函数$1/(1+x^2)$在整个实轴上均连续可导、且任意阶导数都存在

讨论

❹ Taylor展开的唯一性：给定一个在圆C内解析的函数，则它的Taylor展开是唯一的，即展开系数a_n是完全确定的

假定有两个Taylor级数在圆C内都收敛到同一个解析函数$f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \\ &= a'_0 + a'_1(z-a) + a'_2(z-a)^2 + \cdots + a'_n(z-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

取极限$z \to a$，因级数在C内闭一致收敛，故$a_0 = a'_0$

逐项微商，再取极限$z \to a$，又得$a_1 = a'_1$

如此继续，即可证得　$a_n = a'_n$　$n = 0, 1, 2, \cdots$　□

讨论

4. Taylor展开的唯一性：给定一个在圆C内解析的函数，则它的Taylor展开是唯一的，即展开系数a_n是完全确定的

假定有两个Taylor级数在圆C内都收敛到同一个解析函数$f(z)$

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$
$$= a_0' + a_1'(z-a) + a_2'(z-a)^2 + \cdots + a_n'(z-a)^n + \cdots$$

取极限$z \to a$，因级数在C内闭一致收敛，故$a_0 = a_0'$

逐项微商，再取极限$z \to a$，又得$a_1 = a_1'$

如此继续，即可证得 $a_n = a_n' \quad n = 0, 1, 2, \cdots$ □

讨论

❹ Taylor展开的唯一性：给定一个在圆C内解析的函数，则它的Taylor展开是唯一的，即展开系数a_n是完全确定的

假定有两个Taylor级数在圆C内都收敛到同一个解析函数$f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \\ &= a_0' + a_1'(z-a) + a_2'(z-a)^2 + \cdots + a_n'(z-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

取极限$z \to a$，因级数在C内闭一致收敛，故$a_0 = a_0'$

逐项微商，再取极限$z \to a$，又得$a_1 = a_1'$

如此继续，即可证得 $a_n = a_n'$ $n = 0, 1, 2, \cdots$ □

讨论

4. Taylor展开的唯一性：给定一个在圆C内解析的函数，则它的Taylor展开是唯一的，即展开系数a_n是完全确定的

假定有两个Taylor级数在圆C内都收敛到同一个解析函数$f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \\ &= a_0' + a_1'(z-a) + a_2'(z-a)^2 + \cdots + a_n'(z-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

取极限$z \to a$，因级数在C内闭一致收敛，故$a_0 = a_0'$

逐项微商，再取极限$z \to a$，又得$a_1 = a_1'$

如此继续，即可证得 $a_n = a_n'$ $n = 0, 1, 2, \cdots$ □

讨论

❹ Taylor展开的唯一性：给定一个在圆C内解析的函数，则它的Taylor展开是唯一的，即展开系数a_n是完全确定的

假定有两个Taylor级数在圆C内都收敛到同一个解析函数$f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \\ &= a_0' + a_1'(z-a) + a_2'(z-a)^2 + \cdots + a_n'(z-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

取极限$z \to a$，因级数在C内闭一致收敛，故$a_0 = a_0'$

逐项微商，再取极限$z \to a$，又得$a_1 = a_1'$

如此继续，即可证得 $a_n = a_n'$ $n = 0, 1, 2, \cdots$ □

评述

Taylor展开的唯一性告诉我们

1. 不论用什么方法，得到的$f(z)$在同一个圆内的Taylor展开是唯一的．因此，不一定要用求导数的办法定展开系数
2. 如果(在同一点的)两个Taylor级数相等，则可以逐项比较系数
   - 必须是在同一点展开的两个Taylor级数相等，才可以逐项比较系数

评述

Taylor展开的唯一性告诉我们

1. 不论用什么方法，得到的$f(z)$在同一个圆内的Taylor展开是唯一的．因此，不一定要用求导数的办法定展开系数
2. 如果(在同一点的)两个Taylor级数相等，则可以逐项比较系数

- 必须是在同一点展开的两个Taylor级数相等，才可以逐项比较系数
- 同一个函数在不同点展开得到的两个Taylor级数，即使有公共的收敛区域，也不能直接比较展开系数

评述

Taylor展开的唯一性告诉我们

1. 不论用什么方法，得到的$f(z)$在同一个圆内的Taylor展开是唯一的．因此，不一定要用求导数的办法定展开系数
2. 如果(在同一点的)两个Taylor级数相等，则可以逐项比较系数
   - 必须是在同一点展开的两个Taylor级数相等，才可以逐项比较系数
   - 同一个函数在不同点展开得到的两个Taylor级数，即使有公共的收敛区域，也不能直接比较展开系数

评述

Taylor展开的唯一性告诉我们

1. 不论用什么方法，得到的$f(z)$在同一个圆内的Taylor展开是唯一的．因此，不一定要用求导数的办法定展开系数
2. 如果(在同一点的)两个Taylor级数相等，则可以逐项比较系数
   - 必须是在同一点展开的两个Taylor级数相等，才可以逐项比较系数
   - 同一个函数在不同点展开得到的两个Taylor级数，即使有公共的收敛区域，也不能直接比较展开系数

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

基本函数展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad |z|<\infty$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \qquad |z|<\infty$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}z^{2n} \qquad |z|<\infty$$

基本函数展开式

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad |z| < \infty$$

基本函数展开式

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad |z| < \infty$$

基本函数展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad |z|<1$$

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad |z|<\infty$$

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \qquad |z|<\infty$$

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}z^{2n} \qquad |z|<\infty$$

Taylor展开举例

- 求Taylor级数的方法难以一一罗列
- 这里只介绍一些普通常见的方法
- 中心指导思想：设法建立起与基本函数的关系

Taylor展开举例

- 求Taylor级数的方法难以一一罗列
- 这里只介绍一些普通常见的方法
- 中心指导思想：设法建立起与基本函数的关系

Taylor展开举例

- 求Taylor级数的方法难以一一罗列
- 这里只介绍一些普通常见的方法
- 中心指导思想：设法建立起与基本函数的关系

Taylor展开举例

- 求Taylor级数的方法难以一一罗列
- 这里只介绍一些普通常见的方法
- 中心指导思想：设法建立起与基本函数的关系

例7.2
$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^{2n}\qquad |z|<1$$

有理函数总可以用部分分式的方法化简

例7.3
$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=-\frac{1}{1-z}+\frac{2}{1-2z}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n\qquad |z|<1/2$$

例7.2

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^{2n} \qquad |z| < 1$$

有理函数总可以用部分分式的方法化简

例7.3

$$\frac{1}{1-3z+2z^2} = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}-1\right) z^n \qquad |z| < 1/2$$

例7.2
$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$

有理函数总可以用部分分式的方法化简

例7.3
$$\frac{1}{1-3z+2z^2} = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}-1\right) z^n \qquad |z|<1/2$$

例7.2
$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$

有理函数总可以用部分分式的方法化简

例7.3
$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=-\frac{1}{1-z}+\frac{2}{1-2z}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty} z^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n \qquad |z|<1/2$$

例7.2
$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$

有理函数总可以用部分分式的方法化简

例7.3
$$\frac{1}{1-3z+2z^2} = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n \qquad |z|<1/2$$

例7.2
$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^{2n} \qquad |z| < 1$$

有理函数总可以用部分分式的方法化简

例7.3
$$\frac{1}{1-3z+2z^2} = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}-1\right) z^n \qquad |z| < 1/2$$

有些函数可以表示成更简单的函数的导数或积分，从而可以容易地求出其Taylor级数

例7.4
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad |z|<1\end{aligned}$$

有些函数可以表示成更简单的函数的导数或积分，从而可以容易地求出其Taylor级数

例7.4
$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z}$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\qquad |z|<1$$

有些函数可以表示成更简单的函数的导数或积分，从而可以容易地求出其Taylor级数

例7.4

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad |z|<1\end{aligned}$$

有些函数可以表示成更简单的函数的导数或积分，从而可以容易地求出其Taylor级数

例7.4
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad |z|<1\end{aligned}$$

有些函数可以表示成更简单的函数的导数或积分，从而可以容易地求出其Taylor级数

例7.4
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad |z|<1\end{aligned}$$

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

级数乘法

如果函数可以表示成两个(或几个)函数的乘积，而每一个因子的Taylor展开比较容易求出时，则可采用**级数相乘**的方法

例7.5
$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}2^lz^l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}2^lz^{k+l}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}2^l\right]z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n\qquad |z|<\frac{1}{2}$$

级数乘法

如果函数可以表示成两个(或几个)函数的乘积，而每一个因子的Taylor展开比较容易求出时，则可采用**级数相乘**的方法

例7.5 $$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}2^l z^l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}2^l z^{k+l}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}2^l\right]z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n\qquad |z|<\frac{1}{2}$$

级数乘法

如果函数可以表示成两个(或几个)函数的乘积，而每一个因子的Taylor展开比较容易求出时，则可采用**级数相乘**的方法

例7.5
$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}2^l z^l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}2^l z^{k+l}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}2^l\right]z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n\qquad |z|<\frac{1}{2}$$

级数乘法

如果函数可以表示成两个(或几个)函数的乘积，而每一个因子的Taylor展开比较容易求出时，则可采用**级数相乘**的方法

例7.5 $$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}2^l z^l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}2^l z^{k+l}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}2^l\right]z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n \qquad |z|<\frac{1}{2}$$

级数乘法

如果函数可以表示成两个(或几个)函数的乘积，而每一个因子的Taylor展开比较容易求出时，则可采用**级数相乘**的方法

例7.5
$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}2^lz^l=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}2^lz^{k+l}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}2^l\right]z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)z^n\qquad|z|<\frac{1}{2}$$

级数乘法

如果函数可以表示成两个(或几个)函数的乘积，而每一个因子的Taylor展开比较容易求出时，则可采用**级数相乘**的方法

例7.5
$$\frac{1}{1-3z+2z^2} = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^{k+l}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n} 2^l\right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right) z^n \qquad |z|<\frac{1}{2}$$

级数乘法

幂级数在收敛圆内绝对收敛，故级数相乘是合法的，乘积在两收敛圆的公共区域内仍绝对收敛

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

由于$\tan z$是奇函数，故在$z=0$的Taylor展开应只有奇次幂 $\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$$\because \qquad \sin z = \cos z \cdot \tan z$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l}{(2l)!} z^{2l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!} a_{2k+1} \right] z^{2n+1}$$

待定系数法

例7.6 求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

由于$\tan z$是奇函数，故在$z=0$的Taylor展开应只有奇次幂 $\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$\because$ $\sin z = \cos z \cdot \tan z$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l}{(2l)!} z^{2l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!} a_{2k+1} \right] z^{2n+1}$$

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

由于$\tan z$是奇函数，故在$z=0$的Taylor展开应只有奇次幂 $\tan z=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}=\dfrac{\sin z}{\cos z}$

$$\because \quad \sin z=\cos z\cdot\tan z$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{(2l)!}z^{2l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!}a_{2k+1}\right]z^{2n+1}$$

待定系数法

例7.6 求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

由于$\tan z$是奇函数，故在$z=0$的Taylor展开应只有奇次幂 $\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$$\because \qquad \sin z = \cos z \cdot \tan z$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l}{(2l)!} z^{2l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!} a_{2k+1} \right] z^{2n+1}$$

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

由于$\tan z$是奇函数，故在$z=0$的Taylor展开应只有奇次幂 $\tan z=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}=\dfrac{\sin z}{\cos z}$

$$\because \qquad \sin z=\cos z\cdot\tan z$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{(2l)!}z^{2l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!}a_{2k+1}\right]z^{2n+1}$$

待定系数法

例7.6 求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!}a_{2k+1}\right]z^{2n+1}$$

此恒等式在何区域内成立?

根据Taylor展开的唯一性，比较系数

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k}{(2n-2k)!}a_{2k+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$$

逐次代入$n=0,1,2,\cdots$，即可求出系数$a_1,a_3,a_5,\cdots$

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!}a_{2k+1}\right]z^{2n+1}$$

此恒等式在何区域内成立?

根据Taylor展开的唯一性，比较系数

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k}{(2n-2k)!}a_{2k+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$$

逐次代入$n=0,1,2,\cdots$，即可求出系数$a_1,a_3,a_5,\cdots$

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!}a_{2k+1}\right]z^{2n+1}$$

此恒等式在何区域内成立?

根据Taylor展开的唯一性，比较系数

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k}{(2n-2k)!}a_{2k+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$$

逐次代入$n=0,1,2,\cdots$，即可求出系数$a_1,a_3,$
$a_5,\cdots$

待定系数法

例7.6 求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!}a_{2k+1}\right]z^{2n+1}$$

此恒等式在何区域内成立?

根据Taylor展开的唯一性，比较系数

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k}{(2n-2k)!}a_{2k+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$$

逐次代入$n=0,1,2,\cdots$，即可求出系数$a_1,a_3,a_5,\cdots$

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k}{(2n-2k)!} a_{2k+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$n=0$　　$a_1 = 1$

$n=1$　　$\frac{1}{2}a_1 - a_3 = \frac{1}{6}$　　$a_3 = \frac{1}{3}$

$n=2$　　$\frac{1}{24}a_1 - \frac{1}{2}a_3 + a_5 = \frac{1}{120}$　　$a_5 = \frac{2}{15}$

$\vdots$

待定系数法

例7.6 求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k}{(2n-2k)!} a_{2k+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$n=0$ $\qquad a_1 = 1$

$n=1$ $\qquad \frac{1}{2}a_1 - a_3 = \frac{1}{6}$ $\qquad a_3 = \frac{1}{3}$

$n=2$ $\qquad \frac{1}{24}a_1 - \frac{1}{2}a_3 + a_5 = \frac{1}{120}$ $\qquad a_5 = \frac{2}{15}$

$\vdots$

待定系数法

例7.6 求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k}{(2n-2k)!} a_{2k+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$n=0$ $\qquad a_1 = 1$

$n=1$ $\qquad \frac{1}{2}a_1 - a_3 = \frac{1}{6} \qquad a_3 = \frac{1}{3}$

$n=2$ $\qquad \frac{1}{24}a_1 - \frac{1}{2}a_3 + a_5 = \frac{1}{120} \qquad a_5 = \frac{2}{15}$

$\vdots$

待定系数法

例7.6 求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k}{(2n-2k)!} a_{2k+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$n=0 \qquad\qquad a_1 = 1$$

$$n=1 \qquad \frac{1}{2}a_1 - a_3 = \frac{1}{6} \qquad a_3 = \frac{1}{3}$$

$$n=2 \qquad \frac{1}{24}a_1 - \frac{1}{2}a_3 + a_5 = \frac{1}{120} \qquad a_5 = \frac{2}{15}$$

$$\vdots$$

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

☞ 从$\tan z$的奇点可以判断，收敛半径应为$\pi/2$

- 应用待定系数法，能得到系数之间的递推关系，原则上可以逐个求出展开系数
- 但一般不容易求出级数的通项公式(即展开系数a_n的解析表达式)

如果只需要求出级数中的某一项或某几项系数，也可以采用待定系数法

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

☞ 从$\tan z$的奇点可以判断，收敛半径应为$\pi/2$

- 应用待定系数法，能得到系数之间的递推关系，原则上可以逐个求出展开系数
- 但一般不容易求出级数的通项公式(即展开系数a_n的解析表达式)
- 如果只需要求出级数中的某一项或某几项系数，也可以采用待定系数法

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

☞ 从$\tan z$的奇点可以判断，收敛半径应为$\pi/2$

- 应用待定系数法，能得到系数之间的递推关系，原则上可以逐个求出展开系数
- 但一般不容易求出级数的通项公式(即展开系数a_n的解析表达式)
- 如果只需要求出级数中的某一项或某几项系数，也可以采用待定系数法

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

☞ 从$\tan z$的奇点可以判断，收敛半径应为$\pi/2$

- 应用待定系数法，能得到系数之间的递推关系，原则上可以逐个求出展开系数
- 但一般不容易求出级数的通项公式(即展开系数a_n的解析表达式)
- 如果只需要求出级数中的某一项或某几项系数，也可以采用待定系数法

待定系数法

例7.6　求$\tan z$在$z=0$的Taylor展开

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

☞ 从$\tan z$的奇点可以判断，收敛半径应为$\pi/2$

- 应用待定系数法，能得到系数之间的递推关系，原则上可以逐个求出展开系数
- 但一般不容易求出级数的通项公式(即展开系数a_n的解析表达式)
- 如果只需要求出级数中的某一项或某几项系数，也可以采用待定系数法

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\Big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$

$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$

$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

对于多值函数，在**适当规定了单值分枝后**，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$

$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$

$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$

$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$

$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^\alpha$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$

$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作Taylor展开

例7.7 求多值函数$f(z)=(1+z)^{\alpha}$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^{\alpha}\big|_{z=0}=1$

可直接求出函数$(1+z)^{\alpha}$在$z=0$点的各阶导数值

$$f(0)=1$$
$$f'(0)=\alpha(1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha$$
$$f''(0)=\alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

例7.7　求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$$

其中$\binom{\alpha}{0}=1$和$\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

称为普遍的二项式展开系数

例7.7 求多值函数$f(z) = (1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0} = 1$

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n\end{aligned}$$

其中$\binom{\alpha}{0} = 1$和$\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

称为普遍的二项式展开系数

例7.7　求多值函数$f(z)=(1+z)^{\alpha}$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^{\alpha}\big|_{z=0}=1$

$$
\begin{aligned}
(1+z)^{\alpha} &= 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots \\
&\quad +\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n
\end{aligned}
$$

其中$\displaystyle\binom{\alpha}{0}=1$ 和 $\displaystyle\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

称为普遍的二项式展开系数

例7.7　求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$$

级数的收敛区域，还要视割线的作法而定．收敛半径等于$z=0$到割线的最短距离

最大可能的收敛区域是$|z|<1$, $R=1$

例7.7　求多值函数$f(z)=(1+z)^\alpha$在$z=0$的Taylor展开，规定$(1+z)^\alpha\big|_{z=0}=1$

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha &= 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots\\ &\quad+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n\end{aligned}$$

级数的收敛区域，还要视割线的作法而定．收敛半径等于$z=0$到割线的最短距离

最大可能的收敛区域是$|z|<1$, $R=1$

例7.8　求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的展Taylor开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

在上述规定下，函数$\ln(1+z)$可表示为定积分

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\therefore\qquad \ln(1+z)=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

例7.8　求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的展Taylor开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

在上述规定下，函数$\ln(1+z)$可表示为定积分

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\therefore\quad \ln(1+z)=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

例7.8　求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的展Taylor开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

在上述规定下，函数$\ln(1+z)$可表示为定积分

$$\ln(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\therefore\qquad \ln(1+z)=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n \mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\int_0^z z^n \mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

例7.8　求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的展Taylor开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

在上述规定下，函数$\ln(1+z)$可表示为定积分

$$\ln(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\therefore \qquad \ln(1+z)=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n \mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

例7.8 求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的展Taylor开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

在上述规定下，函数$\ln(1+z)$可表示为定积分

$$\ln(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\therefore \qquad \ln(1+z)=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n \mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

例7.8 求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的展Taylor开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

在上述规定下，函数$\ln(1+z)$可表示为定积分

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\therefore\qquad \ln(1+z)=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

例7.8 求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的Taylor展开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

- 收敛区域也要看割线怎么作．收敛半径等于$z=0$到割线的最短距离， 最大可能的收敛区域是$|z|<1$，$R=1$
- 思考题：单值分枝的规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$体现在何处?

例7.8　求多值函数$f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$的Taylor展开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n$$

- 收敛区域也要看割线怎么作．收敛半径等于$z=0$到割线的最短距离，最大可能的收敛区域是$|z|<1$，$R=1$
- 思考题：单值分枝的规定$\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$体现在何处?

例7.8 求多值函数$f(z) = \ln(1+z)$在$z=0$的Taylor展开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0} = 0$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$

- 思考题：如果作其它规定，例如$\ln(1+z)\big|_{z=0} = 2\pi$，你能否直接写出$\ln(1+z)$在$z=0$处的Taylor展开？
- 思考题：能否将$\ln z$在$z=0$处作Taylor展开？

例7.8 求多值函数$f(z) = \ln(1+z)$在$z=0$的Taylor展开，规定$\ln(1+z)\big|_{z=0} = 0$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n$$

- 思考题：如果作其它规定，例如$\ln(1+z)\big|_{z=0} = 2\pi$，你能否直接写出$\ln(1+z)$在$z=0$处的Taylor展开？
- 思考题：能否将$\ln z$在$z=0$处作Taylor展开？

例7.7和例7.8中的结果

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad |z| < 1$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n \qquad |z| < 1$$

也作为基本的函数展开式，应该熟记

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

如果函数$f(z)$在$z=\infty$点解析，则也可以在$z=\infty$点展开成Taylor级数

- $f(z)$在$z=\infty$点解析，则$f(1/t)$在$t=0$点解析
- 所谓$f(z)$在∞点展开成Taylor级数，就是作变换$z=1/t$，而将$f(1/t)$在$t=0$点展开成Taylor级数
- $f(1/t)$在$t=0$点的Taylor展开

$$f(1/t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

$$|t|<r$$

如果函数$f(z)$在$z=\infty$点解析，则也可以在$z=\infty$点展开成Taylor级数

- $f(z)$在$z=\infty$点解析，则$f(1/t)$在$t=0$点解析
- 所谓$f(z)$在∞点展开成Taylor级数，就是作变换$z=1/t$，而将$f(1/t)$在$t=0$点展开成Taylor级数
- $f(1/t)$在$t=0$点的Taylor展开

$$f(1/t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

$$|t|<r$$

如果函数$f(z)$在$z=\infty$点解析，则也可以在$z=\infty$点展开成Taylor级数

- $f(z)$在$z=\infty$点解析，则$f(1/t)$在$t=0$点解析
- 所谓$f(z)$在∞点展开成Taylor级数，就是作变换$z=1/t$，而将$f(1/t)$在$t=0$点展开成Taylor级数
- $f(1/t)$在$t=0$点的Taylor展开

$$f(1/t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

$$|t|<r$$

如果函数$f(z)$在$z=\infty$点解析，则也可以在$z=\infty$点展开成Taylor级数

- 所以$f(z)$在$z=\infty$点的Taylor展开形式为

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$$

$$|z|>1/r$$

☞ $f(z)$在∞点的Taylor级数中只有常数项及负幂项，没有正幂项，而收敛范围为$|z|>1/r$，也就是说，级数在以∞为圆心的某个圆内收敛

如果函数$f(z)$在$z=\infty$点解析，则也可以在$z=\infty$点展开成Taylor级数

- 所以$f(z)$在$z=\infty$点的Taylor展开形式为

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$$

$$|z| > 1/r$$

☞ $f(z)$在∞点的Taylor级数中只有常数项及负幂项，没有正幂项，而收敛范围为$|z|>1/r$，也就是说，级数在以∞为圆心的某个圆内收敛

讲授要点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

因为$f(z)$在$z=a$点及其邻域内解析，故当$|z-a|$充分小时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

若$z=a$为零点，则必有

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0 \qquad a_m\neq 0$$

相应地

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0 \qquad f^{(m)}(a)\neq 0$$

$z=a$点为$f(z)$的m阶零点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

因为$f(z)$在$z=a$点及其邻域内解析，故当$|z-a|$充分小时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

若$z=a$为零点，则必有

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0 \qquad a_m\neq 0$$

相应地

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0 \quad f^{(m)}(a)\neq 0$$

$z=a$点为$f(z)$的m阶零点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

因为$f(z)$在$z=a$点及其邻域内解析，故当$|z-a|$充分小时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

若$z=a$为零点，则必有

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0 \qquad a_m\neq 0$$

相应地

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0 \qquad f^{(m)}(a)\neq 0$$

$z=a$点为$f(z)$的m阶零点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

因为$f(z)$在$z=a$点及其邻域内解析，故当$|z-a|$充分小时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

若$z=a$为零点，则必有

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0 \qquad a_m\neq 0$$

相应地

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0 \quad f^{(m)}(a)\neq 0$$

$z=a$点为$f(z)$的m阶零点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

因为$f(z)$在$z=a$点及其邻域内解析，故当$|z-a|$充分小时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

若$z=a$为零点，则必有

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0 \qquad a_m\neq 0$$

相应地

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0 \quad f^{(m)}(a)\neq 0$$

$z=a$点为$f(z)$的m阶零点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

- 零点的阶数都是确定的正整数——在函数的解析区域内，不可能有分数次的零点
- 解析函数零点的一个重要性质是它的孤立性

解析函数零点的孤立性定理 （不证）

若$f(z)$不恒等于零，且在包含$z=a$在内的区域内解析，则必能找到圆$|z-a|=\rho\ (\rho>0)$，使在圆内除了$z=a$可能为零点外，$f(z)$无其他零点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

- 零点的阶数都是确定的正整数——在函数的解析区域内，不可能有分数次的零点
- 解析函数零点的一个重要性质是它的孤立性

解析函数零点的孤立性定理 （不证）

若$f(z)$不恒等于零，且在包含$z=a$在内的区域内解析，则必能找到圆$|z-a|=\rho\ (\rho>0)$，使在圆内除了$z=a$可能为零点外，$f(z)$无其他零点

解析函数的零点

如果$f(z)$在a点及其邻域内解析，$f(a)=0$，则称$z=a$为$f(z)$的零点

- 零点的阶数都是确定的正整数——在函数的解析区域内，不可能有分数次的零点
- 解析函数零点的一个重要性质是它的孤立性

解析函数零点的孤立性定理 （不证）

若$f(z)$不恒等于零，且在包含$z=a$在内的区域内解析，则必能找到圆$|z-a|=\rho\,(\rho>0)$，使在圆内除了$z=a$可能为零点外，$f(z)$无其他零点

讲授要点

1. Taylor展开
   - 展开定理
   - 讨论
   - 基本函数展开式
2. Taylor展开举例
   - 级数乘法与待定系数法
   - 多值函数的Taylor展开
   - 在无穷远点的Taylor展开
3. 解析函数的唯一性
   - 解析函数零点的孤立性
   - 解析函数的唯一性

根据解析函数零点的孤立性定理，可以推出解析函数零点的下列重要性质：

推论1

设$f(z)$在$G: |z-a|<R$内解析．若在G内存在$f(z)$的无穷多个零点$\{z_n\}$，且

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

但$z_n \neq a$，则$f(z)$在G内恒为0

☞ 条件$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$可以减弱为序列$\{z_n\}$的一个极限点为$a$

根据解析函数零点的孤立性定理，可以推出解析函数零点的下列重要性质：

推论1

设$f(z)$在$G: |z-a| < R$内解析．若在G内存在$f(z)$的无穷多个零点$\{z_n\}$，且

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

但$z_n \neq a$，则$f(z)$在G内恒为0

☞ 条件$\lim_{n\to\infty} z_n = a$可以减弱为序列$\{z_n\}$的一个极限点为$a$

根据解析函数零点的孤立性定理，可以推出解析函数零点的下列重要性质：

推论1

设$f(z)$在$G: |z-a|<R$内解析．若在G内存在$f(z)$的无穷多个零点$\{z_n\}$，且

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

但$z_n \neq a$，则$f(z)$在G内恒为0

☞ 条件$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$可以减弱为序列$\{z_n\}$的一个极限点为$a$

推论2

设$f(z)$在$G: |z-a|<R$内解析．若在G内存在过a点的一段弧l或含有a点的一个子区域g，在l上或g内$f(z)\equiv 0$，则在整个区域G内$f(z)\equiv 0$

☞ 推论2的成立范围是以$z=a$点为圆心的圆域，但是很容易推广到一般形状的区域

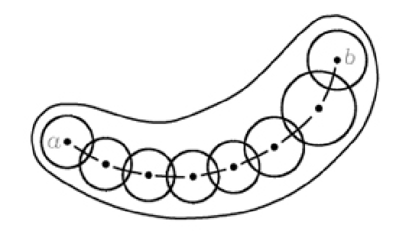
推论2

设$f(z)$在$G: |z-a|<R$内解析．若在G内存在过a点的一段弧l或含有a点的一个子区域g，在l上或g内$f(z)\equiv 0$，则在整个区域G内$f(z)\equiv 0$

☞ 推论2的成立范围是以$z=a$点为圆心的圆域，但是很容易推广到一般形状的区域

推论3

设$f(z)$在G内解析．若在G内存在一点$z=a$及过a点的一段弧l或含有a点的一个子区域g，在l上或g内$f(z)\equiv 0$，则在整个区域G内$f(z)\equiv 0$



可以将

推论1

设$f(z)$在$G:|z-a|<R$内解析．若在G内存在$f(z)$的无穷多个零点$\{z_n\}$，且

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

但$z_n \neq a$，则$f(z)$在G内恒为0

改写为

解析函数的唯一性定理

设在区域G内有两个解析函数$f_1(z)$和$f_2(z)$，且在G内存在一个序列$\{z_n\}$，$f_1(z_n)=f_2(z_n)$．若$\{z_n\}$的一个极限点$z=a(\neq z_n)$也落在G内，则在G内有$f_1(z)\equiv f_2(z)$

也可以将

推论3

设$f(z)$在G内解析．若在G内存在一点$z=a$及过a点的一段弧l或含有 a点的一个子区域g，在l上或g内$f(z)\equiv 0$，则在整个区域G内$f(z)\equiv 0$

改写为

推论4

设$f_1(z)$和$f_2(z)$都在区域G内解析，且在G内的一段弧或一个子区域内相等，则在G内$f_1(z)\equiv f_2(z)$

作为它的特殊情形，还有

推论5

在实轴上成立的恒等式，在z平面上仍然成立，只要恒等式两端的函数在z平面上都解析

也可以将

推论3

设$f(z)$在G内解析．若在G内存在一点$z=a$及过a点的一段弧l或含有a点的一个子区域g，在l上或g内$f(z)\equiv 0$，则在整个区域G内$f(z)\equiv 0$

改写为

推论4

设$f_1(z)$和$f_2(z)$都在区域G内解析，且在G内的一段弧或一个子区域内相等，则在G内$f_1(z)\equiv f_2(z)$

作为它的特殊情形，还有

推论5

在实轴上成立的恒等式，在z平面上仍然成立，只要恒等式两端的函数在z平面上都解析