第 六 讲

无 穷 级 数

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§4.1 — 4.5
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.1, 3.2
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.1, 3.2

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§4.1 — 4.5
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.1, 3.2
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.1, 3.2

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§4.1 — 4.5
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.1, 3.2
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.1, 3.2

无　穷　级　数

- 无穷级数，特别是幂级数，是解析函数的最重要的表达形式之一
- 许多初等函数和特殊函数都是用幂级数定义的
- 复变函数级数理论和实变函数的比较：概念和方法的异同

无 穷 级 数

- 无穷级数，特别是幂级数，是解析函数的最重要的表达形式之一
- 许多初等函数和特殊函数都是用幂级数定义的
- 复变函数级数理论和实变函数的比较：概念和方法的异同

无　穷　级　数

- 无穷级数，特别是幂级数，是解析函数的最重要的表达形式之一
- 许多初等函数和特殊函数都是用幂级数定义的
- 复变函数级数理论和实变函数的比较：概念和方法的异同

无　穷　级　数

- 无穷级数，特别是幂级数，是解析函数的最重要的表达形式之一
- 许多初等函数和特殊函数都是用幂级数定义的
- 复变函数级数理论和实变函数的比较：概念和方法的异同

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

复数级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

无穷级数的收敛与发散

如果级数的部分和

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

所构成的序列$\{S_n\}$收敛，则称级数$\sum u_n$收敛，序列$\{S_n\}$的极限$S = \lim_{n\to\infty} S_n$，称为级数$\sum u_n$的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

否则，级数$\sum u_n$是发散的

复数级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

无穷级数的收敛与发散

如果级数的部分和

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

所构成的序列$\{S_n\}$收敛，则称级数$\sum u_n$收敛，序列$\{S_n\}$的极限$S = \lim_{n\to\infty} S_n$，称为级数$\sum u_n$的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

否则，级数$\sum u_n$是发散的

复数级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

无穷级数的收敛与发散

如果级数的部分和

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

所构成的序列$\{S_n\}$收敛，则称级数$\sum u_n$收敛，序列$\{S_n\}$的极限$S = \lim_{n\to\infty} S_n$，称为级数$\sum u_n$的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

否则，级数$\sum u_n$是发散的

复数级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

无穷级数的收敛与发散

如果级数的部分和

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

所构成的序列$\{S_n\}$收敛，则称级数$\sum u_n$收敛，序列$\{S_n\}$的极限$S = \lim_{n\to\infty} S_n$，称为级数$\sum u_n$的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

否则，级数$\sum u_n$是发散的

令$u_n = \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$，则部分和序列

$$\begin{aligned} S_n &= (\alpha_0 + \mathrm{i}\beta_0) + (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1) + (\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2) \\ &\quad + \cdots + (\alpha_n + \mathrm{i}\beta_n) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ &\quad + \mathrm{i}(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \end{aligned}$$

☞ 复数级数$\sum u_n$的收敛性完全等价于实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$的收敛性

☞ 一个复数级数$\sum u_n$完全等价于两个实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

令$u_n = \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$，则部分和序列

$$\begin{aligned} S_n &= (\alpha_0 + \mathrm{i}\beta_0) + (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1) + (\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2) \\ &\quad + \cdots + (\alpha_n + \mathrm{i}\beta_n) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ &\quad + \mathrm{i}(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \end{aligned}$$

☞ 复数级数$\sum u_n$的收敛性完全等价于实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$的收敛性

☞ 一个复数级数$\sum u_n$完全等价于两个实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

令$u_n = \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$，则部分和序列

$$\begin{aligned} S_n = & (\alpha_0 + \mathrm{i}\beta_0) + (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1) + (\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2) \\ & + \cdots + (\alpha_n + \mathrm{i}\beta_n) \\ = & (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ & + \mathrm{i}(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \end{aligned}$$

☞ 复数级数$\sum u_n$的收敛性完全等价于实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$的收敛性

☞ 一个复数级数$\sum u_n$完全等价于两个实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

令$u_n = \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$，则部分和序列

$$\begin{aligned} S_n &= (\alpha_0 + \mathrm{i}\beta_0) + (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1) + (\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2) \\ &\quad + \cdots + (\alpha_n + \mathrm{i}\beta_n) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ &\quad + \mathrm{i}(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \end{aligned}$$

- 复数级数$\sum u_n$的收敛性完全等价于实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$的收敛性
- 一个复数级数$\sum u_n$完全等价于两个实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

令$u_n = \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$, 则部分和序列

$$\begin{aligned} S_n = & (\alpha_0 + \mathrm{i}\beta_0) + (\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1) + (\alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2) \\ & + \cdots + (\alpha_n + \mathrm{i}\beta_n) \\ = & \left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\right) \\ & + \mathrm{i}\left(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n\right) \end{aligned}$$

☞ 复数级数$\sum u_n$的收敛性完全等价于实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$的收敛性

☞ 一个复数级数$\sum u_n$完全等价于两个实数级数$\sum \alpha_n$和$\sum \beta_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

级数的收敛性，是用它的部分和序列的收敛性定义的．因此，根据序列收敛的充要条件， 可以写出级数收敛的充要条件——Cauchy 充要条件

序列收敛的Cauchy充要条件

任意给定$\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N(\varepsilon)>0$，$\forall$正整数p，有

$$\left|z_{N+p}-z_N\right|<\varepsilon$$

级数收敛的Cauchy充要条件

任意给定$\varepsilon>0$，$\exists$正整数n，$\forall$正整数p，有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$$

级数的收敛性，是用它的部分和序列的收敛性定义的．因此，根据序列收敛的充要条件，可以写出级数收敛的充要条件——Cauchy充要条件

序列收敛的Cauchy充要条件

任意给定$\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N(\varepsilon)>0$，$\forall$正整数p，有
$$\left|z_{N+p}-z_N\right|<\varepsilon$$

级数收敛的Cauchy充要条件

任意给定$\varepsilon>0$，$\exists$正整数n，$\forall$正整数p，有
$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$$

级数的收敛性，是用它的部分和序列的收敛性定义的．因此，根据序列收敛的充要条件，可以写出级数收敛的充要条件——Cauchy充要条件

序列收敛的Cauchy充要条件

任意给定$\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N(\varepsilon)>0$，$\forall$正整数p，有

$$\left|z_{N+p}-z_N\right|<\varepsilon$$

级数收敛的Cauchy充要条件

任意给定$\varepsilon>0$，$\exists$正整数n，$\forall$正整数p，有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$$

特别是，令$p=1$，就得到

级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

收敛级数的基本性质

在不改变求和次序的前提下，可将收敛级数并项

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots = (u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots$$

特别是，令$p=1$，就得到

级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

收敛级数的基本性质

在不改变求和次序的前提下，可将收敛级数并项

$$\begin{aligned} & u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots \\ & \qquad = (u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots \end{aligned}$$

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

绝对收敛级数

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

- 绝对收敛级数一定收敛

$$
\begin{aligned}
&\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right| \\
&\qquad \le \left|u_{n+1}\right|+\left|u_{n+2}\right|+\cdots+\left|u_{n+p}\right|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

- 反之，收敛级数可以不绝对收敛

绝对收敛级数

若级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

- 绝对收敛级数一定收敛

$$\begin{aligned}&\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|\\&\qquad\le\left|u_{n+1}\right|+\left|u_{n+2}\right|+\cdots+\left|u_{n+p}\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

- 反之，收敛级数可以不绝对收敛

绝对收敛级数

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

- 绝对收敛级数一定收敛

$$\begin{aligned}&\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|\\&\qquad\le\left|u_{n+1}\right|+\left|u_{n+2}\right|+\cdots+\left|u_{n+p}\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

- 反之，收敛级数可以不绝对收敛

绝对收敛级数的判别法

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$是实数级数，且为正项级数，所以高等数学中任何一种正项级数的收敛判别法均适用

例如

- 比较判别法
- 比值判别法
- d'Alembert判别法
- Cauchy判别法

绝对收敛级数的判别法

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$是实数级数，且为正项级数，所以高等数学中任何一种正项级数的收敛判别法均适用

例如

- 比较判别法
- 比值判别法
- d'Alembert判别法
- Cauchy判别法

比较判别法
比值判别法
d'Alembert判别法
Cauchy判别法

绝对收敛级数的判别法

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 是实数级数，且为正项级数，所以高等数学中任何一种正项级数的收敛判别法均适用

例如

- 比较判别法
- 比值判别法
- d'Alembert判别法
- Cauchy判别法

比较判别法
比值判别法
d'Alembert判别法
Cauchy判别法
绝对收敛级数性质

绝对收敛级数的判别法

由于$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$是实数级数，且为正项级数，所以高等数学中任何一种正项级数的收敛判别法均适用

例如

- 比较判别法
- 比值判别法
- d'Alembert判别法
- Cauchy判别法

比较判别法
比值判别法
d'Alembert判别法
Cauchy判别法
绝对收敛级数性质

绝对收敛级数的判别法

由于$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$是实数级数，且为正项级数，所以高等数学中任何一种正项级数的收敛判别法均适用

例如

- 比较判别法
- 比值判别法
- d'Alembert判别法
- Cauchy判别法

▸ 比较判别法
▸ 比值判别法
▸ d'Alembert判别法
▸ Cauchy判别法
▸ 绝对收敛级数性质

比较判别法

☞ 若$|u_n|<v_n$，而$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$收敛

$\left(\text{即}\sum_{n=0}^{\infty} u_n\text{绝对收敛}\right)$

☞ 若$|u_n|>v_n$，而$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

Return

比较判别法

☞ 若$|u_n|<v_n$，而$\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$收敛

（即$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$绝对收敛）

☞ 若$|u_n| > v_n$，而$\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$发散，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

Return

比值判别法

若存在与n无关的常数ρ，则

- 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho < 1$时， 级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$绝对收敛
- 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \rho > 1$时， 级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- 比值判别法的优点：对于许多常用级数，分式$|u_{n+1}/u_n|$的形式往往要比u_n的形式简单得多，因此应用比值判别法可以很快地判断$\sum |u_n|$的收敛性

比值判别法

若存在与n无关的常数ρ，则

☞ 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho < 1$时， 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$绝对收敛

☞ 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \rho > 1$时， 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- 比值判别法的优点：对于许多常用级数，分式$|u_{n+1}/u_n|$的形式往往要比u_n的形式简单得多，因此应用比值判别法可以很快地判断$\sum |u_n|$的收敛性

比值判别法

若存在与n无关的常数ρ，则

- ☞ 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho < 1$时， 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$绝对收敛
- ☞ 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \rho > 1$时， 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- 比值判别法的优点：对于许多常用级数，分式$|u_{n+1}/u_n|$的形式往往要比u_n的形式简单得多， 因此应用比值判别法可以很快地判断$\sum |u_n|$的收敛性

比值判别法

若存在与n无关的常数ρ，则

☞ 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho < 1$时， 级数$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$绝对收敛

☞ 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \rho > 1$时， 级数$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- ρ的存在性?
- 更方便的当然是使用它的极限形式，即d'Alembert判别法

比值判别法

若存在与n无关的常数ρ，则

- 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho < 1$时， 级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$绝对收敛
- 当$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \rho > 1$时， 级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- ρ的存在性?
- 更方便的当然是使用它的极限形式，即d'Alembert判别法

Return

d'Alembert判别法

- ☞ 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l < 1$， 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛
- ☞ 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l > 1$， 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- d'Alembert判别法的优点：一般说来，求上下极限总要比求比值判别法中的ρ来得简单

d'Alembert判别法

- 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l < 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛
- 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l > 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 发散

- d'Alembert判别法的优点：一般说来，求上下极限总要比求比值判别法中的ρ来得简单

d'Alembert判别法

☞ 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l < 1$， 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

☞ 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l > 1$， 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- d'Alembert判别法的优点：一般说来，求上下极限总要比求比值判别法中的ρ来得简单

d'Alembert判别法

☞ 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l < 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

☞ 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l > 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- d'Alembert判别法的缺点： 采用不同的标准判别级数的收敛和发散， 即用 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n|$判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$的收敛， 而用 $\underline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n|$判断级数的发散

d'Alembert判别法

☞ 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l < 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

☞ 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l > 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- 因此对于 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$及 $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq 1$的情形就不能作出判断，除非
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

d'Alembert判别法

☞ 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l < 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

☞ 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} |u_{n+1}/u_n| = l > 1$， 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$发散

- Cauchy判别法的优点就是根据同一判据 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|^{1/n}$ 来判断级数是否绝对收敛

Return

Cauchy判别法

- ☞ 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|u_n\right|^{1/n} < 1$， 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|u_n\right|$ 收敛
- ☞ 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|u_n\right|^{1/n} > 1$， 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散

- Cauchy判别法的缺点是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|u_n\right|^{1/n} = 1$ 时不能判断级数是否绝对收敛

Cauchy判别法

- 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |u_n|^{1/n} < 1$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 收敛
- 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |u_n|^{1/n} > 1$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散

- Cauchy判别法的缺点是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |u_n|^{1/n} = 1$ 时不能判断级数是否绝对收敛

Cauchy判别法

☞ 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |u_n|^{1/n} < 1$， 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 收敛

☞ 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |u_n|^{1/n} > 1$， 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散

- Cauchy判别法的缺点是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |u_n|^{1/n} = 1$ 时不能判断级数是否绝对收敛

Return

绝对收敛级数的性质

1. 改换次序．例如

$$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots$$
$$=u_0+u_1+u_2+u_4+u_3+u_6+u_8+u_5+\cdots$$

2. 可以把一个绝对收敛级数拆成几个子级数，每个子级数仍绝对收敛

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\sum_{n=0}^{\infty}u_{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}u_{2n+1}$$

3. 两个绝对收敛级数之积仍然绝对收敛

$$\sum_k u_k\cdot\sum_l v_l=\sum_{k,l}u_kv_l$$

绝对收敛级数的性质

1. 改换次序．例如

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$
$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_4 + u_3 + u_6 + u_8 + u_5 + \cdots$$

2. 可以把一个绝对收敛级数拆成几个子级数，每个子级数仍绝对收敛

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}$$

3. 两个绝对收敛级数之积仍然绝对收敛

$$\sum_k u_k \cdot \sum_l v_l = \sum_{k,l} u_k v_l$$

绝对收敛级数的性质

❶ 改换次序．例如

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$
$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_4 + u_3 + u_6 + u_8 + u_5 + \cdots$$

❷ 可以把一个绝对收敛级数拆成几个子级数，每个子级数仍绝对收敛

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}$$

❸ 两个绝对收敛级数之积仍然绝对收敛

$$\sum_k u_k \cdot \sum_l v_l = \sum_{k,l} u_k v_l$$

讨论：关于无穷级数的乘积$\sum_k u_k \cdot \sum_l v_l = \sum_{k,l} u_k v_l$

乘积$\sum_{k,l} u_k v_l$是一个二重级数

$$\begin{aligned} & u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + u_0v_3 + \cdots \\ + & u_1v_0 + u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + \cdots \\ + & u_2v_0 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + \cdots \\ + & u_3v_0 + u_3v_1 + u_3v_2 + u_3v_3 + \cdots \\ + & \cdots \end{aligned}$$

绝对收敛性意味着可以按照任意顺序求和，其值不变

讨论：关于无穷级数的乘积$\sum\limits_k u_k \cdot \sum\limits_l v_l = \sum\limits_{k,l} u_k v_l$

乘积$\sum\limits_{k,l} u_k v_l$是一个二重级数

$$\begin{aligned}
&u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + u_0v_3 + \cdots \\
+\ &u_1v_0 + u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + \cdots \\
+\ &u_2v_0 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + \cdots \\
+\ &u_3v_0 + u_3v_1 + u_3v_2 + u_3v_3 + \cdots \\
+\ &\ \cdots
\end{aligned}$$

绝对收敛性意味着可以按照任意顺序求和，其值不变

讨论：关于无穷级数的乘积$\sum_k u_k \cdot \sum_l v_l = \sum_{k,l} u_k v_l$

乘积$\sum_{k,l} u_k v_l$是一个二重级数

$$\begin{aligned}
&u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + u_0v_3 + \cdots \\
+&\, u_1v_0 + u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + \cdots \\
+&\, u_2v_0 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + \cdots \\
+&\, u_3v_0 + u_3v_1 + u_3v_2 + u_3v_3 + \cdots \\
+&\, \cdots
\end{aligned}$$

例如可按$k + l = n$的大小顺序排列

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

讨论：关于级数乘积

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

- 这种求和次序的背景：

  幂级数相乘＋合并同类项

- 如果限于这种求和次序，则乘法的条件还可以放宽成：

讨论：关于级数乘积

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

- 这种求和次序的背景：

  幂级数相乘 + 合并同类项

- 如果限于这种求和次序，则乘法的条件还可以放宽成：

讨论：关于级数乘积

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

- 这种求和次序的背景：

  幂级数相乘 + 合并同类项

- 如果限于这种求和次序，则乘法的条件还可以放宽成：

$\sum u_k, \sum v_l$都收敛，
且其中之一绝对收敛

或

讨论：关于级数乘积

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

- 这种求和次序的背景：

  幂级数相乘 + 合并同类项

- 如果限于这种求和次序，则乘法的条件还可以放宽成：

$\sum u_k$, $\sum v_l$ 都收敛，且其中之一绝对收敛

或

$\sum u_k$, $\sum v_l$ 和 $\sum w_n$ 都收敛

讨论：关于级数乘积

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

- 这种求和次序的背景：

  幂级数相乘＋合并同类项

- 如果限于这种求和次序，则乘法的条件还可以放宽成：

$\sum u_k$, $\sum v_l$都收敛，且其中之一绝对收敛

或

$\sum u_k$, $\sum v_l$和$\sum w_n$都收敛

讨论：关于级数乘积

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

- 这种求和次序的背景：

  幂级数相乘 + 合并同类项

- 如果限于这种求和次序，则乘法的条件还可以放宽成：

$\sum u_k, \sum v_l$都收敛，且其中之一绝对收敛

或

$\sum u_k, \sum v_l$和$\sum w_n$都收敛

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

函数级数在某点收敛

设$u_k(z)\quad(k=1,2,\cdots)$在区域$G$中有定义．若对于$G$中一点$z_0$，级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$收敛，则称级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$在$z_0$点收敛

函数级数在某点发散

若$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}v_k(z_0)$发散，则称级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}v_k(z)$在$z_0$点发散

函数级数在某点收敛

设$u_k(z) \quad (k = 1, 2, \cdots)$在区域$G$中有定义．若对于$G$中一点$z_0$，级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)$收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$z_0$点收敛

函数级数在某点发散

若$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(z_0)$发散，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(z)$在$z_0$点发散

函数级数的收敛性

函数级数在区域G内收敛

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在区域$G$内每一点都收敛，则称级数在$G$内收敛． 其和函数$S(z)$是$G$内的单值函数

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

函数级数的一致收敛性

函数级数在区域G内一致收敛

若任意给定$\varepsilon > 0$，存在一个与z无关的$N(\varepsilon)$，使当$n > N(\varepsilon)$时

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon$$

则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$G$内一致收敛

函数级数一致收敛性的判别法

1. 直接运用定义
2. Weierstrass的M-判别法

Weierstrass的M-判别法

若在区域G内$|u_k(z)| < a_k$，a_k与z无关，而$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$收敛，则$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$G$内绝对而且一致收敛

函数级数一致收敛性的判别法

1. 直接运用定义
2. Weierstrass的M-判别法

Weierstrass的M-判别法

若在区域G内$|u_k(z)| < a_k$，a_k与z无关，而$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$收敛，则$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$G$内绝对而且一致收敛

函数级数一致收敛性的基本性质 （不证）

❶ 连续性

如果$u_k(z)$在G内连续，级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$G$内一致收敛，则其和函数$S(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$也在$G$内连续

这个性质告诉我们，如果级数的每一项都是连续函数，则一致收敛级数可以逐项求极限(或者说，“求极限”与“求级数和”可以交换次序)

$$\lim_{z\to z_0}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lim_{z\to z_0} u_k(z)\right\}$$

函数级数一致收敛性的基本性质 (不证)

❶ 连续性

如果$u_k(z)$在G内连续，级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$在$G$内一致收敛，则其和函数$S(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$也在$G$内连续

这个性质告诉我们，如果级数的每一项都是连续函数，则一致收敛级数可以逐项求极限(或者说，"求极限"与"求级数和"可以交换次序)

$$\lim_{z\to z_0}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lim_{z\to z_0} u_k(z)\right\}$$

函数级数一致收敛性的基本性质 （不证）

❷ 逐项求积分

设C是区域G内的一条分段光滑曲线，如果$u_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$是C上的连续函数， 则对于C上一致收敛的级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$可以逐项求积分

$$\int_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)\mathrm{d}z$$

函数级数一致收敛性的基本性质 （不证）

❸ 逐项求导数 （Weierstrass定理）

设$u_k(z)\,(k=1,2,\cdots)$在$\overline{G}$中单值解析，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$在$\overline{G}$中一致收敛，则此级数之和$f(z)$是$G$内的解析函数，$f(z)$的各阶导数可以由$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$逐项求导数得到

$$f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(p)}(z)$$

求导数后的级数在G内的任一闭区域中一致收敛

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

有关函数级数解析性的结论，也可以用来讨论含参量的反常积分的解析性

定理(含参量反常积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t>a, z\in\overline{G}$

2. $\forall t\geq a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

3. 积分$\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致收敛[a]

则$F(z)=\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

---

[a] 即$\forall\varepsilon>0$，$\exists T(\varepsilon)$，当$T_2>T_1>T(\varepsilon)$ 时，有 $\left|\int_{T_1}^{T_2} f(t,z)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$

定理(含参量反常积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t>a, z\in\overline{G}$

2. $\forall t\geq a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

3. 积分$\displaystyle\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致收敛

则$F(z)=\displaystyle\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

证明

任取一个无界序列$\{a_n\}$

$$a_0=a<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$$

定理(含参量反常积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t>a, z\in\overline{G}$

2. $\forall t\geq a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

3. 积分$\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致收敛

则$F(z)=\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

证明

令$u_n(z)=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t,z)\mathrm{d}t$，则根据第五讲关于含参量的定积分的解析性的定理， 可知$u_n(z)$在G内单值解析

定理(含参量反常积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t>a, z\in\overline{G}$

2. $\forall t\geq a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

3. 积分$\displaystyle\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致收敛

则$F(z)=\displaystyle\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

又因为$F(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^\infty u_n(z)$在$\overline{G}$上一致收敛，故根据Weierstrass定理，知

$$F(z)=\sum_{n=0}^\infty u_n(z)=\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t\text{在}G\text{内解析}$$

定理(含参量反常积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t>a, z\in\overline{G}$

2. $\forall t\geq a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

3. 积分$\displaystyle\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致收敛

则$F(z)=\displaystyle\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^{\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

又因为$F(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)$在$\overline{G}$上一致收敛，故根据Weierstrass定理，知

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)=\int_a^{\infty}f(t,z)\mathrm{d}t\text{在}G\text{内解析}$$

定理(含参量反常积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t>a, z\in\overline{G}$

2. $\forall t\geq a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

3. 积分$\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致收敛

则$F(z)=\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

$$F'(z)=\sum_{n=0}^\infty u_n'(z)$$

$$=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t \qquad \square$$

定理(含参量反常积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t>a, z\in\overline{G}$

2. $\forall t\ge a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

3. 积分$\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上一致收敛

则$F(z)=\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} F'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(z) \\ &= \int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t \quad \square \end{aligned}$$

讨论

在应用这个定理时，需要判断无穷积分(或瑕积分)是否一致收敛

常用的判别法是

若存在函数$\phi(t)$，使得$|f(t,z)| < \phi(t)$，$z\in\overline{G}$，且$\displaystyle\int_a^\infty \phi(t)\mathrm{d}t$收敛， 则$\displaystyle\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上绝对而且一致收敛

这实际上是函数级数一致收敛M-判别法的变型

讨论

在应用这个定理时，需要判断无穷积分(或瑕积分)是否一致收敛

常用的判别法是

若存在函数$\phi(t)$，使得$|f(t,z)| < \phi(t)$，$z \in \overline{G}$，且$\int_a^\infty \phi(t)\mathrm{d}t$收敛，则$\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上绝对而且一致收敛

这实际上是函数级数一致收敛M-判别法的变型

讨论

在应用这个定理时，需要判断无穷积分(或瑕积分)是否一致收敛

常用的判别法是

若存在函数$\phi(t)$，使得$|f(t,z)|<\phi(t)$，$z\in\overline{G}$，且$\int_a^\infty \phi(t)\mathrm{d}t$收敛，则$\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$在$\overline{G}$上绝对而且一致收敛

这实际上是函数级数一致收敛M-判别法的变型

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

这个积分中的被积函数显然满足定理的前两个条件，而且因为对于复数$z=x+\mathrm{i}y$，有

$$\begin{aligned}|\cos 2zt| &= \sqrt{\cosh^2 2yt-\cos^2 2xt}\\ &\le \cosh 2|yt| \le \mathrm{e}^{2|yt|}\end{aligned}$$

所以，对于z平面上的任意一个闭区域上

$$|\mathrm{Im}\, z|<y_0 \;\Rightarrow\; \left|\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\right|<\mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}$$

而积分$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}\mathrm{d}t$ 收敛，所以含参量的无穷积分$F(z)$一致收敛

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

这个积分中的被积函数显然满足定理的前两个条件，而且因为对于复数$z=x+\mathrm{i}y$，有

$$\begin{aligned}\left|\cos 2zt\right| &= \sqrt{\cosh^2 2yt-\cos^2 2xt}\\ &\le \cosh 2\left|yt\right| \le \mathrm{e}^{2|yt|}\end{aligned}$$

所以，对于z平面上的任意一个闭区域上

$$\left|\mathrm{Im}\ z\right| < y_0 \ \Rightarrow\ \left|\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\right| < \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}$$

而积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}\mathrm{d}t$ 收敛，所以含参量的无穷积分$F(z)$一致收敛

例6.1

计算积分$F(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

这个积分中的被积函数显然满足定理的前两个条件，而且因为对于复数$z = x + \mathrm{i}y$，有

$$\begin{aligned}|\cos 2zt| &= \sqrt{\cosh^2 2yt - \cos^2 2xt} \\ &\le \cosh 2|yt| \le \mathrm{e}^{2|yt|}\end{aligned}$$

所以，对于z平面上的任意一个闭区域上

$$|\mathrm{Im}\, z| < y_0 \;\Rightarrow\; \left|\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\right| < \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}$$

而积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}\mathrm{d}t$ 收敛，所以含参量的无穷积分$F(z)$一致收敛

例6.1

计算积分$F(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2zt\mathrm{d}t$

这个积分中的被积函数显然满足定理的前两个条件，而且因为对于复数$z = x + \mathrm{i}y$，有

$$\begin{aligned}|\cos 2zt| &= \sqrt{\cosh^2 2yt - \cos^2 2xt} \\ &\le \cosh 2|yt| \le \mathrm{e}^{2|yt|}\end{aligned}$$

所以，对于z平面上的任意一个闭区域上

$$|\mathrm{Im}\, z| < y_0 \;\Rightarrow\; \left|\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\right| < \mathrm{e}^{-t^2+2y_0 t}$$

而积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2+2y_0 t}\mathrm{d}t$ 收敛，所以含参量的无穷积分$F(z)$一致收敛

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

这个积分中的被积函数显然满足定理的前两个条件，而且因为对于复数$z=x+\mathrm{i}y$，有

$$\begin{aligned}|\cos 2zt| &= \sqrt{\cosh^2 2yt-\cos^2 2xt}\\ &\le \cosh 2|yt| \le \mathrm{e}^{2|yt|}\end{aligned}$$

所以，对于z平面上的任意一个闭区域上

$$|\mathrm{Im}\, z|<y_0 \;\Rightarrow\; \left|\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\right|<\mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}$$

而积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}\mathrm{d}t$ 收敛，所以含参量的无穷积分$F(z)$一致收敛

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

这个积分中的被积函数显然满足定理的前两个条件，而且因为对于复数$z=x+\mathrm{i}y$，有

$$\begin{aligned}|\cos 2zt| &= \sqrt{\cosh^2 2yt-\cos^2 2xt}\\ &\le \cosh 2\,|yt| \le \mathrm{e}^{2|yt|}\end{aligned}$$

所以，对于z平面上的任意一个闭区域上

$$|\mathrm{Im}\, z|<y_0 \;\Rightarrow\; \left|\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\right|<\mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}$$

而积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}\mathrm{d}t$ 收敛，所以含参量的无穷积分$F(z)$一致收敛

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\,\mathrm{d}t$

因此，积分$F(z)$作为z的函数，在z平面上的任意一个区域内解析

更进一步，有

$$F'(z)=-\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} 2t\sin 2zt\,\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2zt\Big|_0^{\infty}-2z\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\,\mathrm{d}t$$

$$=-2zF(z)$$

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\,\mathrm{d}t$

因此，积分$F(z)$作为z的函数，在z平面上的任意一个区域内解析

更进一步，有

$$F'(z) = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} 2t \sin 2zt\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{-t^2}\sin 2zt\Big|_0^\infty - 2z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\,\mathrm{d}t$$

$$= -2zF(z)$$

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

因此，积分$F(z)$作为z的函数，在z平面上的任意一个区域内解析

更进一步，有

$$F'(z)=-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}2t\sin 2zt\mathrm{d}t$$
$$=\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2zt\Big|_0^\infty-2z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$$
$$=-2zF(z)$$

例6.1

计算积分$F(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2zt\mathrm{d}t$

因此，积分$F(z)$作为z的函数，在z平面上的任意一个区域内解析

更进一步，有

$$\begin{aligned} F'(z) &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} 2t \sin 2zt\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-t^2} \sin 2zt\Big|_0^\infty - 2z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2zt\mathrm{d}t \\ &= -2zF(z) \end{aligned}$$

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

解微分方程

$$F'(z)=-2zF(z)\ \Rightarrow\ F(z)=C\mathrm{e}^{-z^2}$$

其中常数C是

$$C=F(0)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

这样，最后就得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-z^2}$$

例6.1

计算积分$F(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t$

解微分方程

$$F'(z)=-2zF(z) \;\Rightarrow\; F(z)=C\mathrm{e}^{-z^2}$$

其中常数C是

$$C=F(0)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

这样，最后就得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-z^2}$$

例6.1

计算积分$F(z) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos 2zt dt$

解微分方程
$$F'(z) = -2zF(z) \Rightarrow F(z) = Ce^{-z^2}$$
其中常数C是
$$C = F(0) = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
这样，最后就得到
$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos 2zt dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-z^2}$$

讨论

☞ 以上讨论的是含参量的反常积分

☞ 对于含参量的瑕积分也可以类似地处理

讨论

- ☞ 以上讨论的是含参量的反常积分
- ☞ 对于含参量的瑕积分也可以类似地处理

❸ 幂 级 数

幂级数通常是指通项为幂函数的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

这是一种特殊形式的函数项级数，也是最基本、最常用的一种函数项级数

❸ 幂 级 数

幂级数通常是指通项为幂函数的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

这是一种特殊形式的函数项级数，也是最基本、最常用的一种函数项级数

❸ 幂 级 数

幂级数通常是指通项为幂函数的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

这是一种特殊形式的函数项级数，也是最基本、最常用的一种函数项级数

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

Abel(第一)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a| \le r (r<|z_0-a|)$中一致收敛

因为$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在$z_0$收敛，故一定满足

$$\text{必要条件} \lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n = 0$$

因此存在正数q，使$|c_n(z_0-a)^n| < q$

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

Abel(第一)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a| \le r(r<|z_0-a|)$中一致收敛

因为$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在$z_0$收敛，故一定满足

$$\text{必要条件} \lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n = 0$$

因此存在正数q，使$|c_n(z_0-a)^n| < q$

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

Abel(第一)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a| \leq r(r<|z_0-a|)$中一致收敛

因为$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在$z_0$收敛，故一定满足

$$\text{必要条件} \lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n = 0$$

因此存在正数q，使$|c_n(z_0-a)^n| < q$

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

Abel(第一)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a| \le r (r < |z_0-a|)$中一致收敛

因为$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在$z_0$收敛，故一定满足

$$\text{必要条件} \lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n = 0$$

因此存在正数q，使$|c_n(z_0-a)^n| < q$

$$|c_n(z-a)^n| < q\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

Abel(第一)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a| \le r(r < |z_0-a|)$中一致收敛

因为$|z-a| < |z_0-a|$时，$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$收敛，故

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ 在圆 } |z-a| < |z_0-a| \text{ 内绝对收敛}$$

Abel(第一)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a|\le r(r<|z_0-a|)$中一致收敛

而当$|z-a|\le r<|z_0-a|$时

$$|c_n(z-a)^n|\le q\,\frac{r^n}{|z_0-a|^n}$$

常数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{|z_0-a|^n}$收敛

$\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|\le r$中一致收敛

Abel(第一)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a| \le r(r<|z_0-a|)$中一致收敛

而当$|z-a| \le r < |z_0-a|$时

$$|c_n(z-a)^n| \le q\frac{r^n}{|z_0-a|^n}$$

常数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{|z_0-a|^n}$收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a| \le r$中一致收敛

Abel(第一)定理

如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_0$收敛，则在以$a$点为圆心，$|z_0-a|$为半径的圆内绝对收敛，而在$|z-a|\leq r(r<|z_0-a|)$中一致收敛

而当$|z-a|\leq r<|z_0-a|$时

$$|c_n(z-a)^n|\leq q\frac{r^n}{|z_0-a|^n}$$

常数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{|z_0-a|^n}$收敛

$$\therefore\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{在圆} |z-a|\leq r \text{中一致收敛}$$

推论

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_1$发散， 则在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散

用反证法

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外某一点$z_2$收敛， 则按Abel定理，级数必然在圆$|z-a|=|z_2-a|$ $(|z_2-a|>|z_1-a|)$内收敛，与原设矛盾

故$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散 □

推论

若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_1$发散， 则在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散

用反证法

若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外某一点$z_2$收敛， 则按Abel定理， 级数必然在圆$|z-a|=|z_2-a|$ $(|z_2-a|>|z_1-a|)$内收敛， 与原设矛盾

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散 □

推论

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_1$发散，则在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散

用反证法

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外某一点$z_2$收敛，则按Abel定理，级数必然在圆$|z-a|=|z_2-a|$ $(|z_2-a|>|z_1-a|)$内收敛，与原设矛盾

故$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散 □

推论

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_1$发散，则在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散

用反证法

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外某一点$z_2$收敛，则按Abel定理，级数必然在圆$|z-a|=|z_2-a|$ $(|z_2-a|>|z_1-a|)$内收敛，与原设矛盾

故$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a|=|z_1-a|$外处处发散 $\square$

推论

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_1$发散， 则在圆$|z-a| = |z_1-a|$外处处发散

用反证法

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a| = |z_1-a|$外某一点$z_2$收敛， 则按Abel定理， 级数必然在圆$|z-a| = |z_2-a|$ $(|z_2-a| > |z_1-a|)$内收敛， 与原设矛盾

故$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a| = |z_1-a|$外处处发散 $\square$

推论

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在某点$z_1$发散， 则在圆$|z-a| = |z_1-a|$外处处发散

用反证法

若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a| = |z_1-a|$外某一点$z_2$收敛，则按Abel定理，级数必然在圆$|z-a| = |z_2-a|$ $(|z_2-a| > |z_1-a|)$内收敛，与原设矛盾

故$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$|z-a| = |z_1-a|$外处处发散 $\square$

讲授要点

1. 复数级数
   - 复数级数 • 收敛与发散
   - 绝对收敛级数
2. 函数级数
   - 函数级数的收敛性
   - 函数级数的一致收敛性
   - 含参量反常积分的解析性
3. 幂级数
   - Abel定理
   - 收敛圆与收敛半径

- 一个级数在z平面上的任意一点，总是要么收敛，要么发散
- 因此，对于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

来说，就出现了这样的情况：在z平面上一部分点收敛，在另外一部分点发散
- 这些收敛点与发散点之间存在一个分界线
- 根据Abel定理，这个分界线一定是圆——幂级数的收敛圆

- 一个级数在z平面上的任意一点，总是要么收敛，要么发散
- 因此，对于幂级数
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$
来说，就出现了这样的情况：在z平面上一部分点收敛，在另外一部分点发散
- 这些收敛点与发散点之间存在一个分界线
- 根据Abel定理，这个分界线一定是圆——幂级数的收敛圆

- 一个级数在z平面上的任意一点，总是要么收敛，要么发散
- 因此，对于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

来说，就出现了这样的情况：在z平面上一部分点收敛，在另外一部分点发散
- 这些收敛点与发散点之间存在一个分界线
- 根据Abel定理，这个分界线一定是圆——幂级数的收敛圆

- 一个级数在z平面上的任意一点，总是要么收敛，要么发散
- 因此，对于幂级数
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$
来说，就出现了这样的情况：在z平面上一部分点收敛，在另外一部分点发散
- 这些收敛点与发散点之间存在一个分界线
- 根据Abel定理，这个分界线一定是圆——幂级数的收敛圆

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

- 收敛圆的圆心： $z=a$点
- 收敛圆的半径——收敛半径
- 收敛半径可以是0．收敛圆退化为一个点
  除$z=a$点外，幂级数在全平面处处发散
- 收敛半径也可以是∞．收敛圆就是全平面
  幂级数在全平面收敛，但∞点肯定是奇点

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

- 收敛圆的圆心： $z=a$点
- 收敛圆的半径——收敛半径
- 收敛半径可以是0．收敛圆退化为一个点
  除$z=a$点外，幂级数在全平面处处发散
- 收敛半径也可以是∞．收敛圆就是全平面
  幂级数在全平面收敛，但∞点肯定是奇点

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

- 收敛圆的圆心：$z = a$点
- 收敛圆的半径——收敛半径
- 收敛半径可以是0．收敛圆退化为一个点
  除$z = a$点外，幂级数在全平面处处发散
- 收敛半径也可以是∞．收敛圆就是全平面
  幂级数在全平面收敛，但∞点肯定是奇点

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

- 收敛圆的圆心： $z=a$点
- 收敛圆的半径——收敛半径
- 收敛半径可以是0．收敛圆退化为一个点
  除$z=a$点外，幂级数在全平面处处发散
- 收敛半径也可以是∞．收敛圆就是全平面
  幂级数在全平面收敛，但∞点肯定是奇点

收敛半径的求法

❶ 根据Cauchy判别法，当

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|c_n(z-a)^n\right|^{1/n}<1 \quad 即 \quad |z-a|<\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}$$

时级数绝对收敛；当

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|c_n(z-a)^n\right|^{1/n}>1 \quad 即 \quad |z-a|>\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}$$

时级数发散

因此，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的收敛半径

$$R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{c_n}\right|^{1/n}$$

收敛半径的求法

❶ 根据Cauchy判别法，当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(z-a)^n|^{1/n} < 1 \quad 即 \quad |z-a| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n}}$$

时级数绝对收敛；当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(z-a)^n|^{1/n} > 1 \quad 即 \quad |z-a| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n}}$$

时级数发散

因此，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的收敛半径

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{c_n}\right|^{1/n}$$

收敛半径的求法

❷ 根据d'Alembert判别法，如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = |z-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

存在，则当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| < 1 \quad 即 \quad |z-a| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

时级数绝对收敛；当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| > 1 \quad 即 \quad |z-a| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

时级数发散

$\therefore$幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的收敛半径$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

收敛半径的求法

❷ 根据d'Alembert判别法，如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = |z-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

存在，则当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| < 1 \quad \text{即} \quad |z-a| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

时级数绝对收敛；当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| > 1 \quad \text{即} \quad |z-a| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

时级数发散

$\therefore$幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的收敛半径$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

收敛半径公式的讨论

这两个求收敛半径的公式各有优缺点

- Cauchy公式 $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{c_n}\right|^{1/n}$

  普遍成立

- d'Alembert公式 $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ 则是有条件成立(要求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ 存在)

- 但当后者能适用时，往往计算更简单些

收敛半径公式的讨论

这两个求收敛半径的公式各有优缺点

- Cauchy公式 $R=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}=\varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{c_n}\right|^{1/n}$

  普遍成立

- d'Alembert公式 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ 则是有条件成立(要求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|$ 存在)

- 但当后者能适用时，往往计算更简单些

收敛半径公式的讨论

这两个求收敛半径的公式各有优缺点

- Cauchy公式 $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{1}{c_n}\right|^{1/n}$ 普遍成立
- d'Alembert公式 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ 则是有条件成立(要求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|$ 存在)
- 但当后者能适用时，往往计算更简单些

收敛半径公式的讨论

这两个求收敛半径的公式各有优缺点

- Cauchy公式 $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{1}{c_n}\right|^{1/n}$

  普遍成立

- d'Alembert公式 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ 则是有条件成立(要求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|$ 存在)

- 但当后者能适用时，往往计算更简单些

评述

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的每一项都是$z$的解析函数
- Abel定理告诉我们，幂级数在其收敛圆内任一闭区域中一致收敛
- 因此，在收敛圆内，幂级数代表了一个解析函数(或者说，幂级数的和函数在收敛圆内解析)
- 可以对幂级数逐项积分或逐项求导数

评述

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的每一项都是$z$的解析函数
- Abel定理告诉我们，幂级数在其收敛圆内任一闭区域中一致收敛
- 因此，在收敛圆内，幂级数代表了一个解析函数(或者说，幂级数的和函数在收敛圆内解析)
- 可以对幂级数逐项积分或逐项求导数

评述

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的每一项都是$z$的解析函数
- Abel定理告诉我们，幂级数在其收敛圆内任一闭区域中一致收敛
- 因此，在收敛圆内，幂级数代表了一个解析函数(或者说，幂级数的和函数在收敛圆内解析)
- 可以对幂级数逐项积分或逐项求导数

评述

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的每一项都是$z$的解析函数
- Abel定理告诉我们，幂级数在其收敛圆内任一闭区域中一致收敛
- 因此，在收敛圆内，幂级数代表了一个解析函数(或者说，幂级数的和函数在收敛圆内解析)
- 可以对幂级数逐项积分或逐项求导数

评述

幂级数逐项积分，收敛半径不变

$$\begin{aligned}
&\int_{z_0}^{z}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \mathrm{d}z \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z}(z-a)^n \mathrm{d}z \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\left[(z-a)^{n+1}-(z_0-a)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

评述

幂级数逐项求导数，收敛半径不变

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right]
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\mathrm{d}(z-a)^n}{\mathrm{d}z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(z-a)^n
\end{aligned}
$$

评述

幂级数在收敛圆上的收敛性?

- 可以处处收敛
- 可以处处发散
- 也可以在一部分点收敛，在另一部分点发散
- 不论哪种情况，幂级数的收敛圆上总肯定有奇点
- 但即使在奇点，幂级数仍然可能是收敛的(即有确定的函数值)

评述

幂级数在收敛圆上的收敛性?

- 可以处处收敛
- 可以处处发散
- 也可以在一部分点收敛，在另一部分点发散
- 不论哪种情况，幂级数的收敛圆上总肯定有奇点
- 但即使在奇点，幂级数仍然可能是收敛的(即有确定的函数值)

评述

幂级数在收敛圆上的收敛性?

- 可以处处收敛
- 可以处处发散
- 也可以在一部分点收敛，在另一部分点发散
- 不论哪种情况，幂级数的收敛圆上总肯定有奇点
- 但即使在奇点，幂级数仍然可能是收敛的(即有确定的函数值)

评述

幂级数在收敛圆上的收敛性?

- 可以处处收敛
- 可以处处发散
- 也可以在一部分点收敛，在另一部分点发散
- 不论哪种情况，幂级数的收敛圆上总肯定有奇点
- 但即使在奇点，幂级数仍然可能是收敛的(即有确定的函数值)

评述

幂级数在收敛圆上的收敛性?

- 可以处处收敛
- 可以处处发散
- 也可以在一部分点收敛，在另一部分点发散
- 不论哪种情况，幂级数的收敛圆上总肯定有奇点
- 但即使在奇点，幂级数仍然可能是收敛的(即有确定的函数值)

幂级数在收敛圆上的收敛性?

举例

- $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$
  在$|z|=1$上处处发散
- $\dfrac{z}{1}+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}+\cdots+\dfrac{z^n}{n}+\cdots$
  在$|z|=1$上除$z=1$外均收敛(在$z=1$点发散)
- $\dfrac{z^2}{1\cdot 2}+\dfrac{z^3}{2\cdot 3}+\dfrac{z^4}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{z^n}{n(n-1)}+\cdots$
  在$|z|=1$上处处收敛

幂级数在收敛圆上的收敛性?

举例

- $1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$
  在$|z| = 1$上处处发散
- $\dfrac{z}{1} + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} + \cdots + \dfrac{z^n}{n} + \cdots$
  在$|z| = 1$上除$z = 1$外均收敛(在$z = 1$点发散)
- $\dfrac{z^2}{1\cdot 2} + \dfrac{z^3}{2\cdot 3} + \dfrac{z^4}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{z^n}{n(n-1)} + \cdots$
  在$|z| = 1$上处处收敛

幂级数在收敛圆上的收敛性?

举例

- $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$
  在$|z|=1$上处处发散
- $\dfrac{z}{1}+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}+\cdots+\dfrac{z^n}{n}+\cdots$
  在$|z|=1$上除$z=1$外均收敛(在$z=1$点发散)
- $\dfrac{z^2}{1\cdot 2}+\dfrac{z^3}{2\cdot 3}+\dfrac{z^4}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{z^n}{n(n-1)}+\cdots$
  在$|z|=1$上处处收敛