第 五 讲

复 变 积 分 (二)

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

讲授要点

1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

讲授要点

1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§3.5 — 3.7
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§2.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§2.4

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§3.5 — 3.7
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§2.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§2.4

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§3.5 — 3.7
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§2.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§2.4

讲授要点

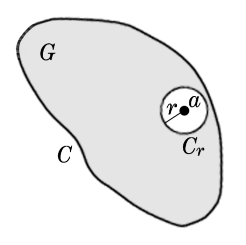
1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

有界区域的Cauchy积分公式

设$f(z)$是区域$\overline{G}$中的单值解析函数，$\overline{G}$的边界C是分段光滑曲线，a为G内一点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分路线沿C的正向



在G内作圆$|z-a|<r$(保持圆周$|z-a|=r$在G内)，则根据复连通区域的Cauchy定理，有

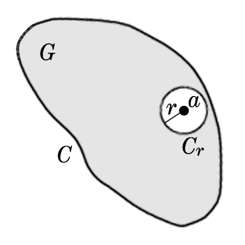
$$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

有界区域的Cauchy积分公式

设$f(z)$是区域$\overline{G}$中的单值解析函数，$\overline{G}$的边界C是分段光滑曲线，a为G内一点，则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分路线沿C的正向



在G内作圆$|z-a|<r$(保持圆周$|z-a|=r$在G内)，则根据复连通区域的Cauchy定理，有

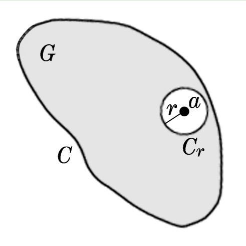
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

有界区域的Cauchy积分公式

设$f(z)$是区域$\overline{G}$中的单值解析函数，$\overline{G}$的边界C是分段光滑曲线，a为G内一点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分路线沿C的正向



此结果应与r的大小无关

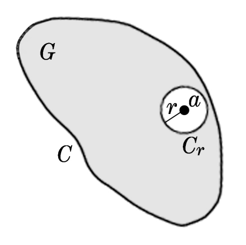
$$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=\lim_{r\to 0}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

有界区域的Cauchy积分公式

设$f(z)$是区域$\overline{G}$中的单值解析函数，$\overline{G}$的边界C是分段光滑曲线，a为G内一点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

其中积分路线沿C的正向



因为$\lim\limits_{z\to a}(z-a)\dfrac{f(z)}{z-a}=f(a)$，由第四讲引理I，就证得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=f(a)\quad\square$$

有界区域的Cauchy积分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

特殊形式

取C为以a为圆心、R为半径的圆周，$z-a=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\mathrm{d}z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

均值定理

解析函数$f(z)$在解析区域G内任意一点a的函数值$f(a)$，等于(完全位于G内的)以a为圆心的任一圆周上的函数值的平均

有界区域的Cauchy积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

特殊形式

取C为以a为圆心、R为半径的圆周，$z-a=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\mathrm{d}z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

均值定理

解析函数$f(z)$在解析区域G内任意一点a的函数值$f(a)$，等于(完全位于G内的)以a为圆心的任一圆周上的函数值的平均

有界区域的Cauchy积分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

特殊形式

取C为以a为圆心、R为半径的圆周，$z-a=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\mathrm{d}z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

均值定理

解析函数$f(z)$在解析区域G内任意一点a的函数值$f(a)$，等于(完全位于G内的)以a为圆心的任一圆周上的函数值的平均

有界区域的Cauchy积分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

特殊形式

取C为以a为圆心、R为半径的圆周，$z-a=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\mathrm{d}z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

均值定理

解析函数$f(z)$在解析区域G内任意一点a的函数值$f(a)$，等于(完全位于G内的)以a为圆心的任一圆周上的函数值的平均

讲授要点

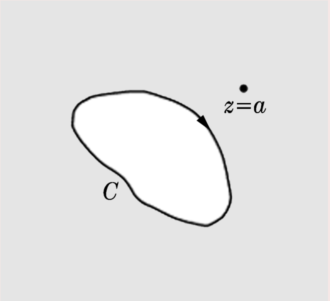
1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

无界区域

对于无界区域，需要假设$f(z)$ 在简单闭合围道C上及C外(包括无穷远点)单值解析．类似地，现在计算

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

其中a为C外一点，积分路线C的走向是顺时针方向，即绕无穷远点的正向

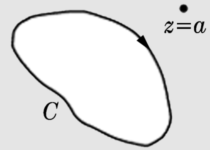


无界区域

对于无界区域，需要假设$f(z)$ 在简单闭合围道C上及C外(包括无穷远点)单值解析．类似地，现在计算

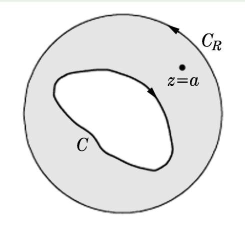
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

其中a为C外一点，积分路线C的走向是顺时针方向，即绕无穷远点的正向



无界区域

在C外再作一个以原点为圆心，R为半径的大圆C_R，这样，对于C和C_R所包围的复连通区域，根据有界区域的Cauchy积分公式，有



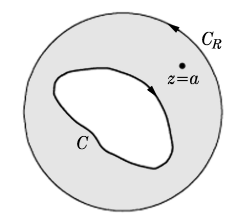
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)$$

只要R足够大，此结果当然与R的具体大小无关

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)-\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}dz\right]$$

无界区域

在C外再作一个以原点为圆心，R为半径的大圆C_R，这样，对于C和C_R所包围的复连通区域，根据有界区域的Cauchy积分公式，有



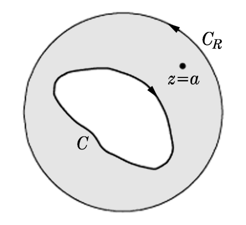
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=f(a)$$

只要R足够大，此结果当然与R的具体大小无关

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=f(a)-\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right]$$

无界区域

在C外再作一个以原点为圆心，R为半径的大圆C_R，这样，对于C和C_R所包围的复连通区域，根据有界区域的Cauchy积分公式，有



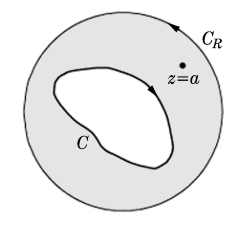
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)$$

只要R足够大，此结果当然与R的具体大小无关

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)-\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}dz\right]$$

无界区域

在C外再作一个以原点为圆心，R为半径的大圆C_R，这样，对于C和C_R所包围的复连通区域，根据有界区域的Cauchy积分公式



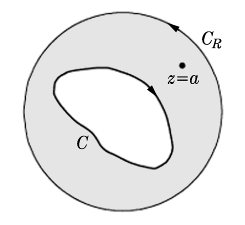
若$f(z)$满足第四讲引理II的要求，则

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right]=K$$

其中
$$K=\lim_{z\to\infty}z\cdot\frac{f(z)}{z-a}=f(\infty)$$

无界区域

在C外再作一个以原点为圆心，R为半径的大圆C_R，这样，对于C和C_R所包围的复连通区域，根据有界区域的Cauchy积分公式



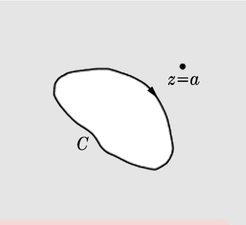
因此有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a) - K$$

其中

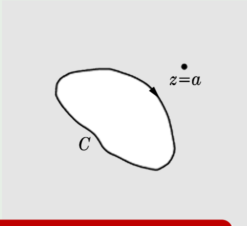
$$K = \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{f(z)}{z-a} = f(\infty)$$

特别是当
$$K=\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{f(z)}{z-a}=0$$
时，就得到



无界区域的Cauchy积分公式

如果$f(z)$在简单闭合围道C上及C外解析，且当$z\to\infty$时，$f(z)\rightrightarrows 0$，则Cauchy积分公式
$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$
仍然成立，此处a为C外一点，积分路线C为顺时针方向



特别是当

$$K = \lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{f(z)}{z-a} = 0$$

时，就得到

无界区域的Cauchy积分公式

如果$f(z)$在简单闭合围道C上及C外解析，且当$z \to \infty$时，$f(z) \rightrightarrows 0$，则Cauchy积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z$$

仍然成立，此处a为C外一点，积分路线C为顺时针方向

Cauchy积分公式的

几个重要推论

讲授要点

1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

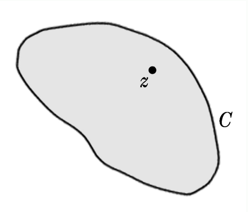
从Cauchy积分公式，可以推断出一个重要结论：

解析函数的高阶导数公式

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

其中C是$\overline{G}$的正向边界，$z\in G$



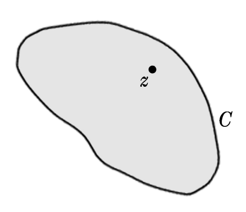
从Cauchy积分公式，可以推断出一个重要结论：

解析函数的高阶导数公式

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

其中C是$\overline{G}$的正向边界，$z \in G$



$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

分析(一) 以$f'(z)$为例

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{h}\oint_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta\\&\overset{\text{积分号下求极限}}{=}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

分析(一) 以$f'(z)$为例

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{h}\oint_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta\\
&\overset{\text{积分号下求极限}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

分析(一) 以 $f'(z)$ 为例

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{h}\oint_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta\\
&\overset{\text{积分号下求极限}}{=\!=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

分析(一)　　以$f'(z)$为例

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{h} \oint_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta \\
&\overset{\text{积分号下求极限}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

分析(二) 以$f'(z)$为例

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right] \overset{\text{积分号下求导}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

分析(二) **以$f'(z)$为例**

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d} f(z)}{\mathrm{d} z}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} z} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right]$$

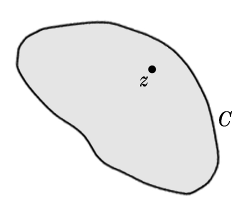
$$\overset{\text{积分号下求导}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

解析函数的高阶导数公式

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

其中C是$\overline{G}$的正向边界，$z \in G$



高阶导数公式的实质即在于表明：

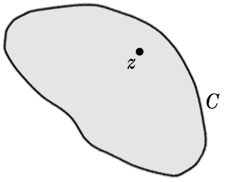
- 积分号下求极限的合法性
- 积分号下求导的合法性

解析函数的高阶导数公式

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

其中C是$\overline{G}$的正向边界，$z\in G$



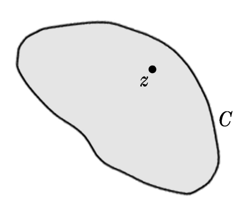
高阶导数公式的实质即在于表明：

- 积分号下求极限的合法性
- 积分号下求导的合法性

解析函数的高阶导数公式　（要点）

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$



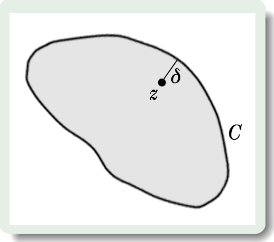
首先求$f'(z)$ —— 即要证明

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

解析函数的高阶导数公式 （要点）

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$



首先求$f'(z)$

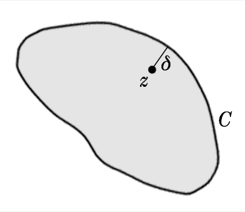
$$\left| \oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)} - \oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2} \right|$$

$$= \left| h \oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2} \right| \leq |h| \cdot \frac{Ml}{\delta^2(\delta - |h|)} \longrightarrow 0$$

解析函数的高阶导数公式　（要点）

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



首先求$f'(z)$

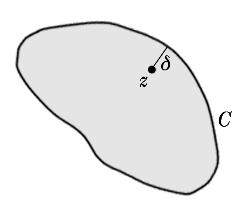
$$\left|\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}-\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|$$

$$=\left|h\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right| \le |h|\cdot\frac{Ml}{\delta^2(\delta-|h|)}\longrightarrow 0$$

解析函数的高阶导数公式 （要点）

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



首先求$f'(z)$

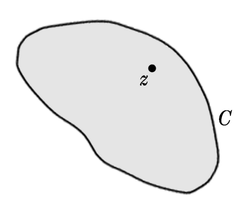
$$\left|\oint_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}-\oint_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|$$

$$=\left|h\oint_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|\le|h|\cdot\frac{Ml}{\delta^2(\delta-|h|)}\to 0$$

解析函数的高阶导数公式 （要点）

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$



首先求$f'(z)$

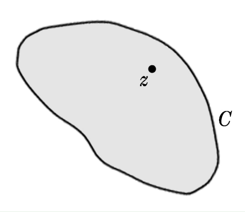
由此即证得

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta$$

解析函数的高阶导数公式 （要点）

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



☞ 同样可以求得

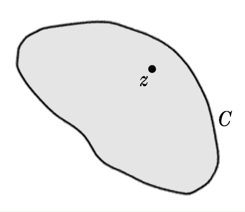
$$f''(z)=\frac{2!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{3}}\mathrm{d}\zeta$$

☞ 如此继续，即可求出$f^{(n)}(z)$ □

解析函数的高阶导数公式　（要点）

若$f(z)$在$\overline{G}$中解析，则在G内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$



☞ 同样可以求得

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \mathrm{d}\zeta$$

☞ 如此继续，即可求出$f^{(n)}(z)$　□

解析函数的高阶导数公式 （要点）

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

评述

- 这个结果说明，一个复变函数，只要在一个区域中一阶导数处处存在(因此是区域内的解析函数)，则它的任何阶导数都存在，并且都是这个区域内的解析函数
- 在实变函数中并非如此．我们并不能由$f'(x)$的存在推断出$f''(x)$的存在

解析函数的高阶导数公式 （要点）

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

评述

- 这个结果说明，一个复变函数，只要在一个区域中一阶导数处处存在(因此是区域内的解析函数)，则它的任何阶导数都存在，并且都是这个区域内的解析函数
- 在实变函数中并非如此．我们并不能由$f'(x)$的存在推断出$f''(x)$的存在

解析函数的高阶导数公式 （要点）

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

评述

- 复变函数中$f(z)$在一区域中处处可导(即解析)是一个高要求

  实变函数中$f'(x)$的存在只包含当x在数轴上(一定区间内)变化时对$f(x)$的要求

  而复变函数中$f'(z)$的存在则包含了在二维平面区域上对$f(z)$的要求

解析函数的高阶导数公式 （要点）

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

评述

- 复变函数中$f(z)$在一区域中处处可导(即解析)是一个高要求

  实变函数中$f'(x)$的存在只包含当x在数轴上(一定区间内)变化时对$f(x)$的要求

  而复变函数中$f'(z)$的存在则包含了在二维平面区域上对$f(z)$的要求

解析函数的高阶导数公式 （要点）

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

评述

- 复变函数中$f(z)$在一区域中处处可导(即解析)是一个高要求

  实变函数中$f'(x)$的存在只包含当x在数轴上(一定区间内)变化时对$f(x)$的要求

  而复变函数中$f'(z)$的存在则包含了在二维平面区域上对$f(z)$的要求

讲授要点

1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

解析函数的高阶导数公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

Cauchy不等式

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{2\pi} \frac{Ml}{d^{n+1}}$$

l是边界C的周长

d是z到边界的最短距离

特别是$C : |\zeta - z| = R$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M}{R^n}$$

解析函数的高阶导数公式

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

Cauchy不等式

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}}$$

l是边界C的周长

d是z到边界的最短距离

特别是$C:|\zeta-z|=R$

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leq\frac{n!M}{R^n}$$

解析函数的高阶导数公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

Cauchy不等式

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{2\pi} \frac{Ml}{d^{n+1}}$$

l是边界C的周长

d是z到边界的最短距离

特别是$C: |\zeta - z| = R$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M}{R^n}$$

最大模定理

若$f(z)$是闭区域$\overline{G}$中的解析函数，则模$|f(z)|$的最大值在$\overline{G}$的边界上

【证明】根据Cauchy不等式$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \dfrac{n!}{2\pi}\dfrac{Ml}{d^{n+1}}$

$$|f(z)|^m \leq \frac{M^m l}{2\pi d}$$

$$|f(z)| \leq M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{1/m}$$

令$m \to \infty \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \leq M$

最大模定理

若$f(z)$是闭区域$\overline{G}$中的解析函数，则模$|f(z)|$的最大值在$\overline{G}$的边界上

【证明】 根据Cauchy不等式$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \dfrac{n!}{2\pi}\dfrac{Ml}{d^{n+1}}$

$$|f(z)|^m \leq \frac{M^m l}{2\pi d}$$

$$|f(z)| \leq M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{1/m}$$

令$m \to \infty \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq M$

最大模定理

若$f(z)$是闭区域$\overline{G}$中的解析函数，则模$|f(z)|$的最大值在$\overline{G}$的边界上

【证明】根据Cauchy不等式$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}}$

$$|f(z)|^m \leq \frac{M^m l}{2\pi d}$$

$$|f(z)| \leq M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{1/m}$$

令$m \to \infty \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq M$

最大模定理

若$f(z)$是闭区域$\overline{G}$中的解析函数，则模$|f(z)|$的最大值在$\overline{G}$的边界上

【证明】根据Cauchy不等式$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \dfrac{n!}{2\pi}\dfrac{Ml}{d^{n+1}}$

$$|f(z)|^m \leq \frac{M^m l}{2\pi d}$$

$$|f(z)| \leq M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{1/m}$$

令$m \to \infty \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq M$

Liouville定理

如果$f(z)$在全平面上解析(无穷远点可能除外)，且当$z\to\infty$时$|f(z)|$有界，则$f(z)$是一个常数

【证明】根据Cauchy不等式$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\dfrac{n!M}{R^n}$

$$|f'(z)|\le\frac{M_R}{R}$$

令$R\to\infty\qquad\Longrightarrow\qquad f'(z)=0$

Liouville定理

如果$f(z)$在全平面上解析(无穷远点可能除外)，且当$z\to\infty$时$|f(z)|$有界，则$f(z)$是一个常数

【证明】根据Cauchy不等式$\left|f^{(n)}(z)\right|\leq\dfrac{n!M}{R^n}$

$$|f'(z)|\leq\frac{M_R}{R}$$

令$R\to\infty\qquad\Longrightarrow\qquad f'(z)=0$

Liouville定理

如果$f(z)$在全平面上解析(无穷远点可能除外)，且当$z\to\infty$时$|f(z)|$有界，则$f(z)$是一个常数

【证明】根据Cauchy不等式$\left|f^{(n)}(z)\right|\leq\dfrac{n!M}{R^n}$

$$|f'(z)|\leq\frac{M_R}{R}$$

令$R\to\infty\qquad\Rightarrow\qquad f'(z)=0$

讲授要点

1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

上面关于解析函数高阶导数公式的证明过程中， $f(z)$的解析性只是用在：

1. $f(z)$可用Cauchy积分公式表示
2. $f(z)$在C上连续

因此，重复上面的步骤，就可以证明

在一条分段光滑的(闭合或不闭合)曲线C上连续的函数$\phi(\zeta)$所构成的积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

(称为Cauchy型积分)是曲线外点z的解析函数，$f'(z)$可通过积分号下求导而得到

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} \mathrm{d}\zeta$$

上面关于解析函数高阶导数公式的证明过程中，$f(z)$的解析性只是用在：

1. $f(z)$可用Cauchy积分公式表示
2. $f(z)$在C上连续

因此，重复上面的步骤，就可以证明

在一条分段光滑的(闭合或不闭合)曲线C上连续的函数$\phi(\zeta)$所构成的积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

(称为Cauchy型积分)是曲线外点z的解析函数，$f'(z)$可通过积分号下求导而得到

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\mathrm{d}\zeta$$

例5.1

计算积分$f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\zeta^*}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，$|z|\neq 1$

Answer 这是一个Cauchy型积分

因为在$|\zeta|=1$上$\zeta^*=1/\zeta$，故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$

1. 当$|z|>1$时，可以用Cauchy积分公式计算

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{z}$$

例5.1

计算积分$f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \dfrac{\zeta^*}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$，$|z| \neq 1$

Answer 这是一个Cauchy型积分

因为在$|\zeta| = 1$上$\zeta^* = 1/\zeta$，故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta$$

1. 当$|z| > 1$时，可以用Cauchy积分公式计算

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} \left[\frac{1}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z}$$

例5.1

计算积分$f(z) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \dfrac{\zeta^*}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$，$|z| \neq 1$

Answer　这是一个Cauchy型积分

因为在$|\zeta| = 1$上$\zeta^* = 1/\zeta$，故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta$$

1. 当$|z| > 1$时，可以用Cauchy积分公式计算

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} \left[\frac{1}{\zeta - z} \right] \mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z}$$

例5.1

计算积分$f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^*}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，$|z|\neq 1$

Answer　　这是一个Cauchy型积分

因为在$|\zeta|=1$上$\zeta^*=1/\zeta$，故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$

1. 当$|z|>1$时，可以用Cauchy积分公式计算

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{z}$$

例5.1

计算积分$f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^*}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\quad |z|\neq 1$

Answer

2. 当$0<|z|<1$时

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{z}\left[\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right]\mathrm{d}\zeta=0$$

3. 当$z=0$时

$$f(z=0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta=0$$

例5.1

计算积分$f(z) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^*}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$，$|z| \neq 1$

Answer

❷ 当$0 < |z| < 1$时

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{z}\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right] \mathrm{d}\zeta = 0$$

❸ 当$z = 0$时

$$f(z=0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta^2} \mathrm{d}\zeta = 0$$

例5.1

计算积分$f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\zeta^*}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，$|z|\neq 1$

Answer

$$f(z)=\begin{cases}-\dfrac{1}{z} & |z|>1\\ 0 & |z|<1\end{cases}$$

由此可见，$f(z)$在$|z|\neq 1$处解析，尽管ζ^*在全平面不解析

例5.1

计算积分$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\zeta^*}{\zeta-z}d\zeta$，$|z|\neq 1$

Answer

$$f(z)=\begin{cases}-\dfrac{1}{z} & |z|>1\\ 0 & |z|<1\end{cases}$$

由此可见，$f(z)$在$|z|\neq 1$处解析，尽管ζ^*在全平面不解析

讲授要点

1. Cauchy积分公式
   - 有界区域的Cauchy积分公式
   - 无界区域的Cauchy积分公式
2. 解析函数的高阶导数
   - 解析函数的高阶导数公式
   - 更多的推论
3. 含参量积分
   - Cauchy型积分
   - 含参量积分的解析性

利用Cauchy型积分，就可以推出

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$
2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\displaystyle\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

因为$f(t,z)$在$\overline{G}$上解析，故$\forall z\in G$，Cauchy积分公式成立

$$f(t,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

代入$F(z)$，有 $F(z)=\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_C\frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right]$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

因为$f(t,z)$在$\overline{G}$上解析，故$\forall z\in G$，Cauchy积分公式成立

$$f(t,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

代入$F(z)$，有 $F(z)=\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_C \frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right]$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

因为$f(t,z)$连续，故可交换积分次序

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{\zeta-z}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta$$

这是一个Cauchy型积分

$$\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t\text{连续}\Rightarrow F(z)\text{为}G\text{内的解析函数}$$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

因为$f(t,z)$连续，故可交换积分次序

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{\zeta-z}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta$$

这是一个Cauchy型积分

$$\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t\text{连续}\Rightarrow F(z)\text{为}G\text{内的解析函数}$$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}F'(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{(\zeta-z)^2}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta\\&=\int_a^b\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(t,\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t \qquad \square\end{aligned}$$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}F'(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{(\zeta-z)^2}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta\\&=\int_a^b\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(t,\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t \qquad \square\end{aligned}$$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\displaystyle\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}F'(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{(\zeta-z)^2}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta\\&=\int_a^b\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(t,\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t\qquad\square\end{aligned}$$

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

讨论

- 显然，对于$\int_C f(t,z)\mathrm{d}t$也会有类似结论
- 这时应当要求C是分段光滑曲线，当t在C上变动，$z\in\overline{G}$时，$f(t,z)$是t和z的连续函数
- 证明的方法与上面相同

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$

2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

讨论

- 显然，对于$\int_C f(t,z)\mathrm{d}t$也会有类似结论
- 这时应当要求C是分段光滑曲线，当t在C上变动，$z\in\overline{G}$时，$f(t,z)$是t和z的连续函数
- 证明的方法与上面相同

定理(含参量积分的解析性)

设 1. $f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\in[a,b], z\in\overline{G}$
2. $\forall t\in[a,b]$，$f(t,z)$是$\overline{G}$上的单值解析函数

则$F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$在$G$内解析，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$$

讨论

- 显然，对于$\int_C f(t,z)\mathrm{d}t$也会有类似结论
- 这时应当要求C是分段光滑曲线，当t在C上变动，$z\in\overline{G}$时，$f(t,z)$是t和z的连续函数
- 证明的方法与上面相同