第 四 讲

复 变 积 分 (一)

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

讲授要点

1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

讲授要点

1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§3.1 — 3.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§3.1 — 3.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§3.1 — 3.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3

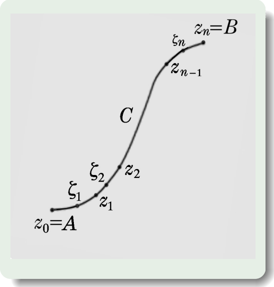
讲授要点

1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

定义：复变积分是复数平面上的线积分

设C是复平面上的曲线，函数$f(z)$在C上有定义．将曲线C任意分割为n段，分点为$z_0=A, z_1, z_2, \cdots, z_n=B$，$\zeta_k$是$z_{k-1}\to z_k$段上的任意一点，作和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\left(z_k - z_{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$



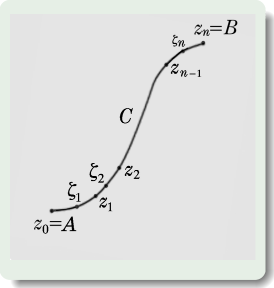
若当$n\to\infty$，使得$\max|\Delta z_k|\to 0$时，此和数的极限存在，且与ζ_k的选取无关，则称此极限值为函数$f(z)$沿曲线C的积分，记为

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

定义：复变积分是复数平面上的线积分

设C是复平面上的曲线，函数$f(z)$在C上有定义．将曲线C任意分割为n段，分点为$z_0=A, z_1, z_2, \cdots, z_n=B$， ζ_k是$z_{k-1}\to z_k$段上的任意一点，作和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\left(z_k - z_{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$



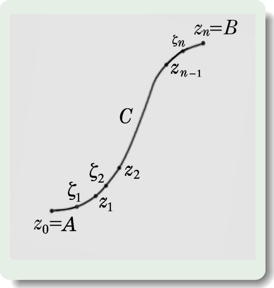
若当$n\to\infty$，使得$\max|\Delta z_k|\to 0$时，此和数的极限存在，且与ζ_k的选取无关，则称此极限值为函数$f(z)$沿曲线C的积分，记为

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

定义：复变积分是复数平面上的线积分

设C是复平面上的曲线，函数$f(z)$在C上有定义．将曲线C任意分割为n段，分点为$z_0=A, z_1, z_2, \cdots, z_n=B$， ζ_k是$z_{k-1}\to z_k$段上的任意一点，作和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\left(z_k - z_{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$



若当$n\to\infty$，使得$\max|\Delta z_k|\to 0$时，此和数的极限存在，且与ζ_k的选取无关，则称此极限值为函数$f(z)$沿曲线C的积分，记为

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

复变积分

- 一个复变积分实际上是两个实变线积分的有序组合

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C (u+\mathrm{i}v)\,(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \\ &= \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

- 因此，如果C是分段光滑曲线，$f(z)$是C上的连续函数，则复变积分一定存在

复变积分

- 一个复变积分实际上是两个实变线积分的有序组合

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y)\\ &= \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

- 因此，如果C是分段光滑曲线，$f(z)$是C上的连续函数，则复变积分一定存在

讲授要点

1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

复变积分的基本性质

1. 若积分$\int_C f_1(z)\mathrm{d}z, \int_C f_2(z)\mathrm{d}z, \cdots, \int_C f_n(z)\mathrm{d}z$都存在，则

$$\int_C \left[f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)\right] \mathrm{d}z = \int_C f_1(z)\mathrm{d}z + \int_C f_2(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_C f_n(z)\mathrm{d}z$$

2. 若$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$，则

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z$$

复变积分的基本性质

1. 若积分 $\int_C f_1(z)\mathrm{d}z, \int_C f_2(z)\mathrm{d}z, \cdots, \int_C f_n(z)\mathrm{d}z$ 都存在，则

$$\int_C \left[f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)\right]\mathrm{d}z$$
$$=\int_C f_1(z)\mathrm{d}z+\int_C f_2(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_C f_n(z)\mathrm{d}z$$

2. 若 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，则

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

复变积分的基本性质

3. $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，其中$C^-$表示$C$的逆向

4. $\displaystyle\int_C af(z)\,\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，其中$a$为常数

5. $\displaystyle\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|$

复变积分的基本性质

❸ $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，其中$C^-$表示$C$的逆向

❹ $\displaystyle\int_C af(z)\,\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，其中$a$为常数

❺ $\displaystyle\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|$

复变积分的基本性质

❸ $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，其中$C^-$表示$C$的逆向

❹ $\displaystyle\int_C af(z)\,\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$，其中$a$为常数

❺ $\displaystyle\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|$

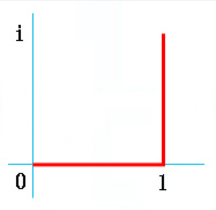
复变积分的基本性质

❻ $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le Ml$，其中$M$为$\left|f(z)\right|$在$C$上的上界，$l$为$C$的长度

例4.1

求$\int_C \mathrm{Re} z \mathrm{d}z$，$C$为

(i)沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$

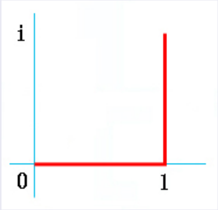


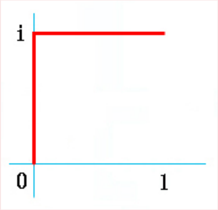
例4.1

求 $\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，$C$ 为

(i) 沿实轴由 $0 \to 1$，再平行于虚轴 $1 \to 1+\mathrm{i}$

(ii) 沿虚轴由 $0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴 $\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$





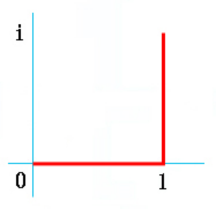
例4.1

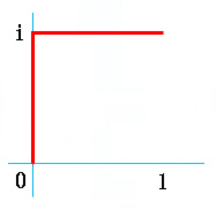
求$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，$C$为

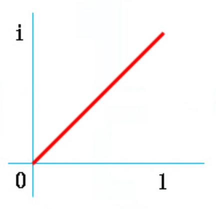
(i) 沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$

(ii) 沿虚轴由$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$

(iii) 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$







例4.1

求$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，$C$为

(i) 沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$;

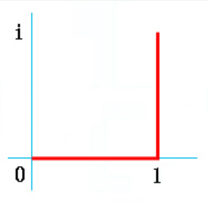
(ii) 沿虚轴由$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$;

(iii) 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

对于(i)

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{i}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{i}$$



例4.1

求$\int_C \mathrm{Re} z \mathrm{d}z$，$C$为

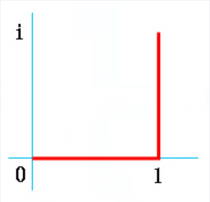
(i) 沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$;

(ii) 沿虚轴由$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$;

(iii) 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

对于(i)

$$\int_C \mathrm{Re} z \mathrm{d}z = \int_0^1 x \mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{i} \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2} + \mathrm{i}$$



例4.1

求$\int_C \mathsf{Re}z\mathsf{d}z$，$C$为

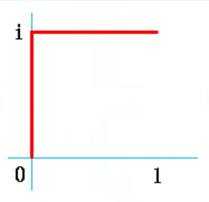
(i) 沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$;

(ii) 沿虚轴由$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$;

(iii) 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

对于(ii)

$$\int_C \mathsf{Re}z\mathsf{d}z = 0 + \int_0^1 x\mathsf{d}x = \frac{1}{2}$$



例4.1

求$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，$C$为

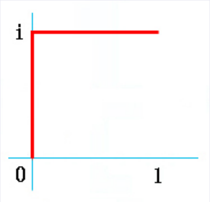
(i) 沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$;

(ii) 沿虚轴由$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$;

(iii) 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

对于(ii)

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = 0 + \int_0^1 x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}$$



例4.1

求$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，$C$为

(i) 沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$;

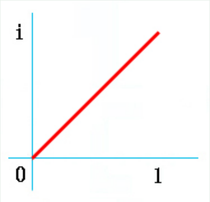
(ii) 沿虚轴由$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$;

(iii) 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

对于(iii)

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+\mathrm{i})t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$$



例4.1

求$\displaystyle\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，$C$为

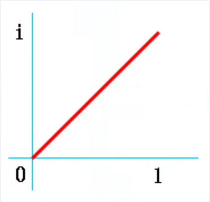
(i) 沿实轴由$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$;

(ii) 沿虚轴由$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$;

(iii) 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

对于(iii)

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+\mathrm{i})t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$$



评述

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

显然，复变积分的数值依赖于

- 被积函数
- 端点位置，即积分的“上下限”
- 积分路径

评述

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

显然，复变积分的数值依赖于

- 被积函数
- 端点位置，即积分的“上下限”
- 积分路径

评述

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

显然，复变积分的数值依赖于

- 被积函数
- 端点位置，即积分的“上下限”
- 积分路径

评述

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

显然，复变积分的数值依赖于

- 被积函数
- 端点位置，即积分的“上下限”
- 积分路径

Cauchy定理

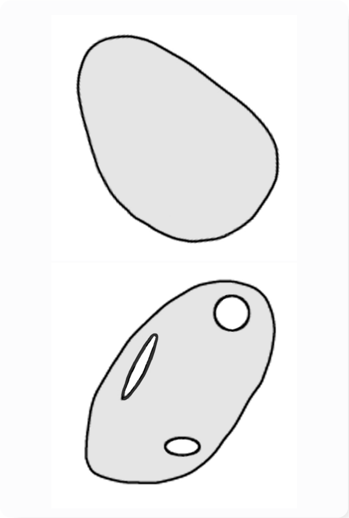
(Cauchy Integral Theorems)

- Cauchy定理讨论积分值与积分路径之间的关系
- 与涉及的区域有关
- 需要区别两种区域
  - 单连通区域：在区域中作任何简单闭合围道，围道内的点都属于该区域

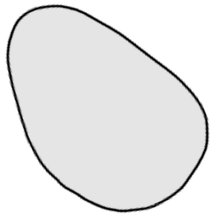
- Cauchy定理讨论积分值与积分路径之间的关系
- 与涉及的区域有关
- 需要区别两种区域
  - 单连通区域：在区域中作任何简单闭合围道，围道内的点都属于该区域
  - 复连通区域，或称多连通区域

- ☞ Cauchy定理讨论积分值与积分路径之间的关系
- ☞ 与涉及的区域有关
- ☞ 需要区别两种区域

- 单连通区域：在区域中作任何简单闭合围道，围道内的点都属于该区域
- 复连通区域，或称多连通区域



- Cauchy定理讨论积分值与积分路径之间的关系
- 与涉及的区域有关
- 需要区别两种区域
  - 单连通区域：在区域中作任何简单闭合围道，围道内的点都属于该区域
  - 复连通区域，或称多连通区域

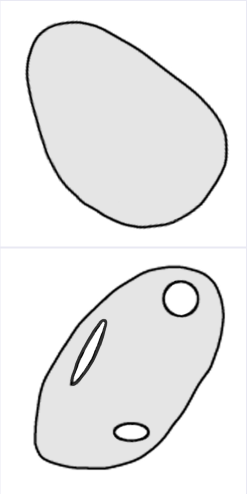


☞ Cauchy定理讨论积分值与积分路径之间的关系

☞ 与涉及的区域有关

☞ 需要区别两种区域

- 单连通区域：在区域中作任何简单闭合围道，围道内的点都属于该区域
- 复连通区域，或称多连通区域



讲授要点

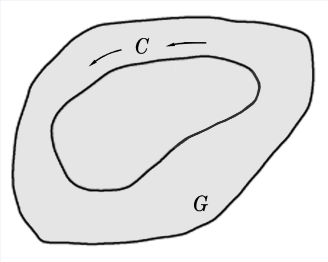
1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

单连通区域的Cauchy定理

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

这里的C也可以是$\overline{G}$的边界



单连通区域的Cauchy定理

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

C也可以是$\overline{G}$的边界

为简单起见，下面在更强的条件下证明这个定理

附加的条件是$f'(z)$在$\overline{G}$中连续[1]

[1] 下一讲将证明，只要$f(z)$在$\overline{G}$中解析， 即$f'(z)$存在，则$f''(z)$也存在，$z \in \overline{G}$， 因而$f'(z)$连续，即四个偏导数$\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$和$\partial v/\partial y$连续

单连通区域的Cauchy定理

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

C也可以是$\overline{G}$的边界

为简单起见，下面在更强的条件下证明这个定理

附加的条件是$f'(z)$在$\overline{G}$中连续[1]

[1] 下一讲将证明，只要$f(z)$在$\overline{G}$中解析，即$f'(z)$存在，则$f''(z)$也存在，$z\in\overline{G}$，因而$f'(z)$连续，即四个偏导数$\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$和$\partial v/\partial y$连续

单连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

证明

在上述附加条件下可以应用Green公式

$$\oint_C \left[P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right] = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C \left[u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y\right] + \mathrm{i}\oint_C \left[v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y\right]$$

单连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

证明

上面的闭合围道积分即可化为面积分

$$\oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

单连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

证明

根据Cauchy-Riemann方程，有

$$\oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

单连通区域的Cauchy定理

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

C也可以是$\overline{G}$的边界

证明

所以即证得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

□

单连通区域的Cauchy定理

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

C也可以是$\overline{G}$的边界

说明

- 这里所说的单连通区域，只能是一个有界区域，不能是(绕∞点的)无界区域
- 即使$f(z)$在∞点解析，它绕∞点一周的积分也可以并不为0

单连通区域的Cauchy定理

如果函数$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则沿$\overline{G}$中任何一个分段光滑的闭合围道C有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

C也可以是$\overline{G}$的边界

说明

- 这里所说的单连通区域，只能是一个有界区域，不能是(绕∞点的)无界区域
- 即使$f(z)$在∞点解析，它绕∞点一周的积分也可以并不为0

评述

Cauchy定理从一个侧面反映了解析函数的一个基本特性：解析函数在它的解析区域内，各点的函数值是密切相关的

- Cauchy-Riemann方程是这种关联性的微分形式
- Cauchy定理则是它的积分形式

推论

若$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则复变积分

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z$$与路径无关

评述

Cauchy定理从一个侧面反映了解析函数的一个基本特性：解析函数在它的解析区域内，各点的函数值是密切相关的

- Cauchy-Riemann方程是这种关联性的微分形式
- Cauchy定理则是它的积分形式

推论

若$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则复变积分
$$\int_C f(z)\mathrm{d}z$$与路径无关

评述

Cauchy定理从一个侧面反映了解析函数的一个基本特性：解析函数在它的解析区域内，各点的函数值是密切相关的

- Cauchy-Riemann方程是这种关联性的微分形式
- Cauchy定理则是它的积分形式

推论

若$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则复变积分
$$\int_C f(z)\mathrm{d}z$$
与路径无关

评述

Cauchy定理从一个侧面反映了解析函数的一个基本特性：解析函数在它的解析区域内，各点的函数值是密切相关的

- Cauchy-Riemann方程是这种关联性的微分形式
- Cauchy定理则是它的积分形式

推论

若$f(z)$在单连通区域$\overline{G}$中解析，则复变积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$与路径无关

讲授要点

1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

不定积分

既然在单连通区域中解析函数的积分与路径无关，因此，如果固定起点z_0，而令终点z为变点，则作为积分上限的函数

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = F(z)$$

是单连通区域G内的单值函数，称为$f(z)$的不定积分

不定积分

既然在单连通区域中解析函数的积分与路径无关，因此，如果固定起点z_0，而令终点z为变点，则作为积分上限的函数

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = F(z)$$

是单连通区域G内的单值函数，称为$f(z)$的不定积分

不定积分

既然在单连通区域中解析函数的积分与路径无关，因此，如果固定起点z_0，而令终点z为变点，则作为积分上限的函数

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = F(z)$$

是单连通区域G内的单值函数，称为$f(z)$的不定积分

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，
则$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

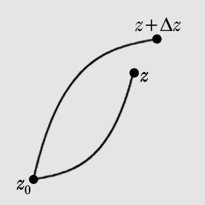
$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z}f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$

证明

只要直接求出$F(z)$的导数即可
设z是G内一点，$z+\Delta z$是它的邻点

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$F(z+\Delta z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$



定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，

则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$

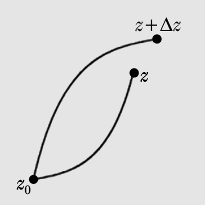
证明

只要直接求出$F(z)$的导数即可

设z是G内一点，$z+\Delta z$是它的邻点

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$F(z+\Delta z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$



定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，
则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

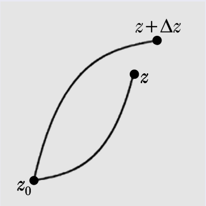
$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$

证明

只要直接求出$F(z)$的导数即可
设z是G内一点，$z+\Delta z$是它的邻点

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

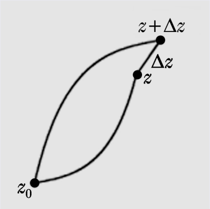
$$F(z+\Delta z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$



定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



证明

因为积分与路径无关，所以

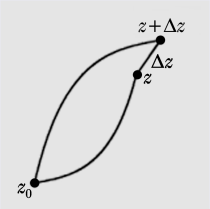
$$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



证明

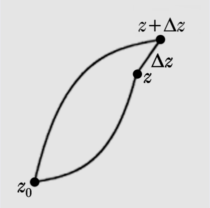
因为积分与路径无关，所以

$$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}$$
$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



证明

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)\right|$$

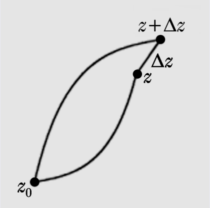
$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\zeta)-f(z)\right]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}\left|f(\zeta)-f(z)\right|\cdot|\mathrm{d}\zeta|$$

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



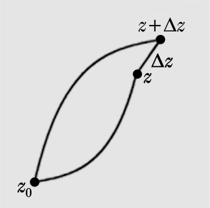
证明

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - f(z)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\zeta)-f(z)\right]\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}\left|f(\zeta)-f(z)\right|\cdot|\mathrm{d}\zeta|\end{aligned}$$

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



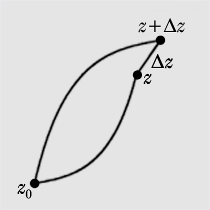
证明

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - f(z)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)|\cdot|\mathrm{d}\zeta|\end{aligned}$$

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



证明

由于$f(z)$连续，故对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|\zeta-z|<\delta$时，$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$，所以

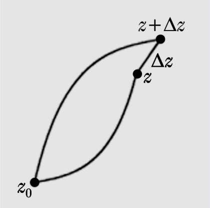
$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon$$

$$\therefore \quad F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z}=f(z) \qquad \square$$

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



证明

由于$f(z)$连续，故对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|\zeta-z|<\delta$时，$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$，所以

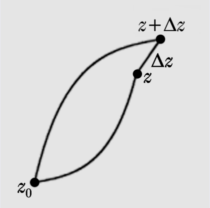
$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon$$

$$\therefore\quad F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z}=f(z)$$

定理(不定积分的解析性)

如果函数$f(z)$在单连通区域G内解析，则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$也在$G$内解析，且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)$$



证明

由于$f(z)$连续，故对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|\zeta-z|<\delta$时，$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$，所以

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon$$

$$\therefore\qquad F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z}=f(z)\qquad\square$$

原函数

定义

若$\Phi'(z)=f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

- $f(z)$的不定积分就是$f(z)$的一个原函数
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 任意两个原函数之间只相差一个常数

原函数

定义

若$\Phi'(z)=f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

- $f(z)$的不定积分就是$f(z)$的一个原函数
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 任意两个原函数之间只相差一个常数

  因为若$\Phi_1(z)$与$\Phi_2(z)$都是$f(z)$的原函数，则

$$\Phi_1'(z)=f(z)\qquad \Phi_2'(z)=f(z)$$

$$\therefore\qquad \left[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)\right]'=0$$

$$\therefore\qquad \Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C$$

原函数

定义

若$\Phi'(z)=f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

- $f(z)$的不定积分就是$f(z)$的一个原函数
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 任意两个原函数之间只相差一个常数

  因为若$\Phi_1(z)$与$\Phi_2(z)$都是$f(z)$的原函数，则

$$\Phi_1'(z)=f(z) \qquad \Phi_2'(z)=f(z)$$

$$\therefore \qquad \left[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)\right]'=0$$

$$\therefore \qquad \Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C$$

原函数

定义

若$\Phi'(z) = f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

- $f(z)$的不定积分就是$f(z)$的一个原函数
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 任意两个原函数之间只相差一个常数

因为若$\Phi_1(z)$与$\Phi_2(z)$都是$f(z)$的原函数，则

$$\Phi_1'(z) = f(z) \qquad \Phi_2'(z) = f(z)$$

$$\therefore \quad \left[\Phi_1(z) - \Phi_2(z)\right]' = 0$$

$$\therefore \quad \Phi_1(z) - \Phi_2(z) = C$$

原函数

定义

若$\Phi'(z)=f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

- $f(z)$的不定积分就是$f(z)$的一个原函数
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 任意两个原函数之间只相差一个常数

因为若$\Phi_1(z)$与$\Phi_2(z)$都是$f(z)$的原函数，则

$$\Phi_1'(z)=f(z) \qquad \Phi_2'(z)=f(z)$$

$$\therefore \quad \left[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)\right]'=0$$

$$\therefore \quad \Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C$$

原函数

定义

若$\Phi'(z)=f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

- $f(z)$的不定积分就是$f(z)$的一个原函数
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 任意两个原函数之间只相差一个常数

因为若$\Phi_1(z)$与$\Phi_2(z)$都是$f(z)$的原函数，则

$$\Phi_1'(z)=f(z) \qquad \Phi_2'(z)=f(z)$$

$$\therefore \quad \left[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)\right]'=0$$

$$\therefore \quad \Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C$$

原函数

定义

若$\Phi'(z)=f(z)$，则$\Phi(z)$称为$f(z)$的原函数

- $f(z)$的不定积分就是$f(z)$的一个原函数
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 任意两个原函数之间只相差一个常数

因为若$\Phi_1(z)$与$\Phi_2(z)$都是$f(z)$的原函数，则

$$\Phi_1'(z)=f(z)\qquad \Phi_2'(z)=f(z)$$

$$\therefore \quad \left[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)\right]'=0$$

$$\therefore \quad \Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C$$

评述

- 知道了被积函数的原函数，可使复变积分的计算大为简化
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 设$\Phi(z)$为$f(z)$的原函数，则$f(z)$的不定积分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)+C$$

但显然有

$$F(z_0)=\Phi(z_0)+C=0 \;\Rightarrow\; C=-\Phi(z_0)$$

$$\therefore \quad \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

评述

- 知道了被积函数的原函数，可使复变积分的计算大为简化
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 设$\Phi(z)$为$f(z)$的原函数，则$f(z)$的不定积分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)+C$$

但显然有

$$F(z_0)=\Phi(z_0)+C=0 \ \Rightarrow \ C=-\Phi(z_0)$$

$$\therefore \qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

评述

- 知道了被积函数的原函数，可使复变积分的计算大为简化
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 设$\Phi(z)$为$f(z)$的原函数，则$f(z)$的不定积分

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z) + C$$

但显然有

$$F(z_0) = \Phi(z_0) + C = 0 \Rightarrow C = -\Phi(z_0)$$

$$\therefore \quad \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

评述

- 知道了被积函数的原函数，可使复变积分的计算大为简化
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 设$\Phi(z)$为$f(z)$的原函数，则$f(z)$的不定积分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)+C$$

但显然有

$$F(z_0)=\Phi(z_0)+C=0 \ \Rightarrow\ C=-\Phi(z_0)$$

$$\therefore \quad \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

评述

- 知道了被积函数的原函数，可使复变积分的计算大为简化
- 对于给定的$f(z)$来说，原函数不唯一
- 设$\Phi(z)$为$f(z)$的原函数，则$f(z)$的不定积分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)+C$$

但显然有

$$F(z_0)=\Phi(z_0)+C=0 \ \Rightarrow\ C=-\Phi(z_0)$$

$$\therefore \qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

例4.2

计算积分$\displaystyle\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，$n$为整数

Answer

当n为自然数时，z^n在全平面解析，$\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$是它的一个原函数．因此，对于z平面上的任意一条积分路线，均有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1} - a^{n+1}\right]$$

例4.2

计算积分$\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，n为整数

Answer

当n为自然数时，z^n在全平面解析，$\frac{1}{n+1}z^{n+1}$是它的一个原函数．因此，对于z平面上的任意一条积分路线，均有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1} - a^{n+1}\right]$$

例4.2

计算积分$\displaystyle\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，$n$为整数

Answer

当n为自然数时，z^n在全平面解析，$\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$是它的一个原函数．因此，对于z平面上的任意一条积分路线，均有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1} - a^{n+1}\right]$$

例4.2

计算积分$\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，n为整数

Answer

当$n=-2,-3,-4,\cdots$时，z^n在不包含$z=0$点在内的任意一个单连通区域内解析，其原函数仍可取为$\frac{1}{n+1}z^{n+1}$．因此，仍有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]$$

而且此结果对于不包含$z=0$点在内的任意(单连通或复连通)区域均成立　　(理由见例4.3)

例4.2

计算积分$\displaystyle\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，$n$为整数

Answer

当$n=-2,-3,-4,\cdots$时，z^n在不包含$z=0$点在内的任意一个单连通区域内解析，其原函数仍可取为$\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$．因此，仍有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]$$

而且此结果对于不包含$z=0$点在内的任意(单连通或复连通)区域均成立 (理由见例4.3)

例4.2

计算积分$\displaystyle\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，$n$为整数

Answer

当$n=-2,-3,-4,\cdots$时，z^n在不包含$z=0$点在内的任意一个单连通区域内解析，其原函数仍可取为$\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$．因此，仍有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]$$

而且此结果对于不包含$z=0$点在内的任意(单连通或复连通)区域均成立 (理由见例4.3)

例4.2

计算积分$\displaystyle\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，$n$为整数

Answer

当$n=-2,-3,-4,\cdots$时，z^n在不包含$z=0$点在内的任意一个单连通区域内解析，其原函数仍可取为$\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$．因此，仍有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]$$

而且此结果对于不包含$z=0$点在内的任意(单连通或复连通)区域均成立 (理由见例4.3)

例4.2

计算积分$\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，n为整数

Answer

当$n=-1$时，z^{-1}也是在不包含$z=0$在内的任一区域内解析，但其原函数应为$\ln z$．因此，在不包含$z=0$的任一单连通区域内

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln b - \ln a$$

思考题 ...

例4.2

计算积分$\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，n为整数

Answer

当$n=-1$时，z^{-1}也是在不包含$z=0$在内的任一区域内解析，但其原函数应为$\ln z$. 因此，在不包含$z=0$的任一单连通区域内

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln b - \ln a$$

思考题 ...

例4.2

计算积分$\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，n为整数

Answer

当$n=-1$时，z^{-1}也是在不包含$z=0$在内的任一区域内解析，但其原函数应为$\ln z$. 因此，在不包含$z=0$的任一单连通区域内

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln b - \ln a$$

思考题 $\cdots$

例4.2

计算积分$\int_a^b z^n \mathrm{d}z$，n为整数

Answer

当$n=-1$时，z^{-1}也是在不包含$z=0$在内的任一区域内解析，但其原函数应为$\ln z$．因此，在不包含$z=0$的任一单连通区域内

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln b - \ln a$$

思考题 ...

讲授要点

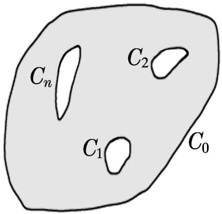
1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

复连通区域的Cauchy定理

如果$f(z)$是复连通区域$\overline{G}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

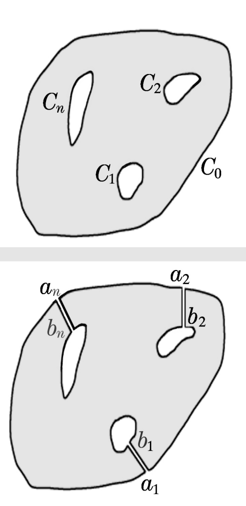
其中$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$是构成复连通区域$\overline{G}$的边界的各个分段光滑闭合曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$都包含在$C_0$的内部，而且所有的积分路径走向相同



复连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果$f(z)$是复连通区域$\overline{G}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

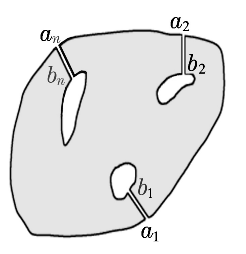


不妨取$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$均为逆时针方向．作适当的割线把$C_1, C_2, \cdots, C_n$和$C_0$连结起来，从而得到一个单连通区域$\overline{G'}$，$f(z)$在单连通区域$\overline{G'}$内解析，因而可以应用单连通区域的Cauchy定理

复连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果$f(z)$是复连通区域$\overline{G}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

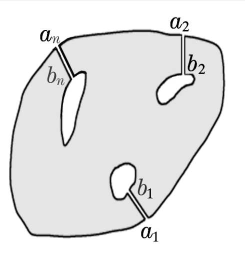


$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \int_{a_1}^{b_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{b_1}^{a_1} f(z)\mathrm{d}z$$
$$+ \int_{a_2}^{b_2} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{b_2}^{a_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots$$
$$+ \int_{a_n}^{b_n} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{b_n}^{a_n} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

复连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果$f(z)$是复连通区域$\overline{G}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$



由于$f(z)$在$\overline{G'}$内单值，故沿同一割线两岸的积分值互相抵消

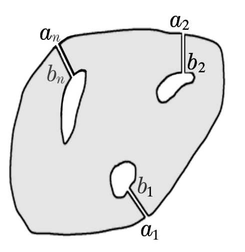
$$\int_{a_i}^{b_i} f(z)\mathrm{d}z+\int_{b_i}^{a_i} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$\therefore\quad \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i^-} f(z)\mathrm{d}z=0$$

复连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果$f(z)$是复连通区域$\overline{G}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$



由于$f(z)$在$\overline{G'}$内单值，故沿同一割线两岸的积分值互相抵消

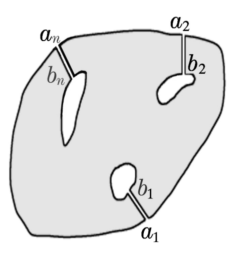
$$\int_{a_i}^{b_i} f(z)\mathrm{d}z + \int_{b_i}^{a_i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\therefore \quad \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

复连通区域的Cauchy定理 （要点）

如果$f(z)$是复连通区域$\overline{G}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$



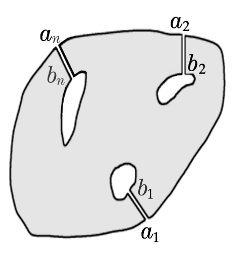
$$\therefore \qquad \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = -\sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i^-} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z \qquad \square$$

复连通区域的Cauchy定理　（要点）

如果$f(z)$是复连通区域$\overline{G}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$



$$\therefore \qquad \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = -\sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i^-} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z \qquad \square$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

1. 当n为自然数时，按照单连通区域Cauchy定理
$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$
2. 当n为负整数时，若C内不含$z=0$，则也有
$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

1. 当n为自然数时，按照单连通区域Cauchy定理
$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$
2. 当n为负整数时，若C内不含$z=0$，则也有
$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

1. 当n为自然数时，按照单连通区域Cauchy定理
$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$
2. 当n为负整数时，若C内不含$z=0$，则也有
$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

❸ 若C内含有$z=0$，则按复连通区域Cauchy定理

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} z^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1 \\ 0, & n=-2,-3,-4,\cdots \end{cases}$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

3. 若C内含有$z=0$，则按复连通区域Cauchy定理

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} z^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1 \\ 0, & n=-2,-3,-4,\cdots \end{cases}$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

❸ 若C内含有$z=0$，则按复连通区域Cauchy定理

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} z^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} \mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1 \\ 0, & n=-2,-3,-4,\cdots \end{cases}$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

❸ 若C内含有$z=0$，则按复连通区域Cauchy定理

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} z^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1 \\ 0, & n=-2,-3,-4,\cdots \end{cases}$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

总结上面的结果，就有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1,\ \text{且}\, C\ \text{内含有}\, z=0 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

或者，更一般地

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1,\ \text{且}\, C\ \text{内含有}\, z=a \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

例4.3

计算$\oint_C z^n \mathrm{d}z$值，n为整数，C为逆时针方向

Answer

总结上面的结果，就有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1,\ \text{且}\,C\,\text{内含有}\,z=0 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

或者，更一般地

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1,\ \text{且}\,C\,\text{内含有}\,z=a \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

讲授要点

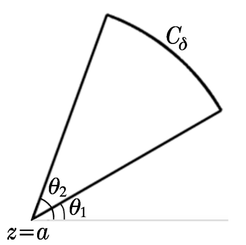
1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

引理I

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$，$|z-a| \to 0$时，$(z-a)f(z) \rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$

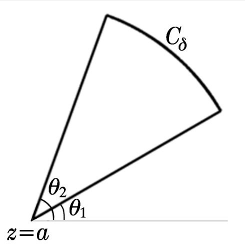
其中C_δ是以$z=a$为圆心，δ为半径，夹角为$\theta_2-\theta_1$的圆弧



引理I （要点）

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1\leq\arg(z-a)\leq\theta_2$，$|z-a|\to0$时，$(z-a)f(z)\rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$



$$\because\quad\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$$

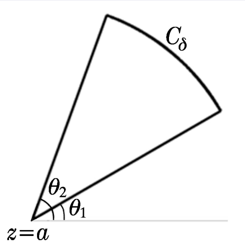
$$\therefore\quad\left|\int_{C_\delta}f(z)\mathrm{d}z-\mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right|=\left|\int_{C_\delta}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq\int_{C_\delta}|(z-a)f(z)-k|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|}$$

引理 I （要点）

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$，$|z-a| \to 0$时，$(z-a)f(z) \rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1)$$



$$\because \qquad \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)$$

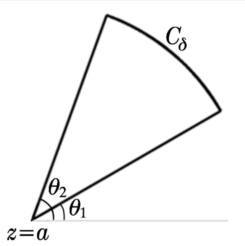
$$\therefore \quad \left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1)\right| = \left|\int_{C_\delta} \left[f(z) - \frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq \int_{C_\delta} |(z-a)f(z) - k| \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|}$$

引理 I （要点）

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1\leq\arg(z-a)\leq\theta_2$，$|z-a|\to 0$时，$(z-a)f(z)\rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$



$$\because \quad \int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$$

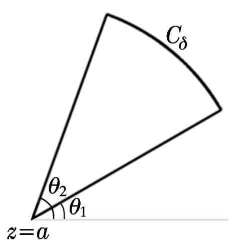
$$\therefore \quad \left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{C_\delta}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq \int_{C_\delta}\left|(z-a)f(z)-k\right|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|}$$

引理 I（要点）

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$，$|z-a|\to 0$时，$(z-a)f(z)\rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$



当$\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2, z-a\to 0$时，$(z-a)f(z)\rightrightarrows k$

$$\Downarrow$$

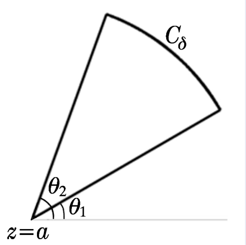
$\forall\varepsilon>0,\exists$(与$\arg(z-a)$无关的)$r(\varepsilon)>0$，

使当$|(z-a)|=\delta<r$时，$|(z-a)f(z)-k|<\varepsilon$

引理 I（要点）

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$，$|z-a| \to 0$时，$(z-a)f(z) \rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$



当$\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2, z-a \to 0$时，$(z-a)f(z) \rightrightarrows k$

$$\Downarrow$$

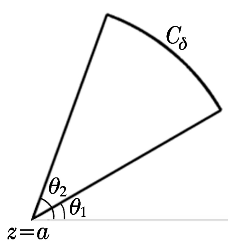
$\forall \varepsilon > 0, \exists$(与$\arg(z-a)$无关的)$r(\varepsilon) > 0$,

使当$|(z-a)| = \delta < r$时，$|(z-a)f(z)-k| < \varepsilon$

引理 I **（要点）**

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1\leq\arg(z-a)\leq\theta_2$，$|z-a|\to 0$时，$(z-a)f(z)\rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$



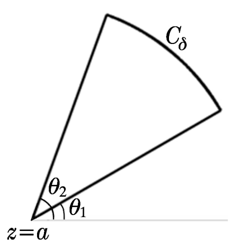
$$\therefore \quad \left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| \leq \varepsilon(\theta_2-\theta_1)$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1) \qquad \square$$

引理 I （要点）

若函数$f(z)$在$z=a$点的邻域内连续，且当$\theta_1\leq\arg(z-a)\leq\theta_2$，$|z-a|\to 0$时，$(z-a)f(z)\rightrightarrows k$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$



$$\therefore \quad \left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z-\mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right|\leq\varepsilon(\theta_2-\theta_1)$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1) \qquad \square$$

讲授要点

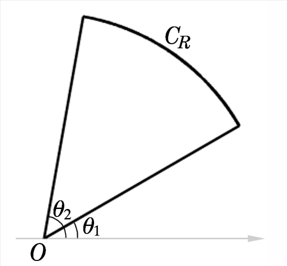
1. 复变积分
   - 复变积分的定义
   - 复变积分的基本性质
2. Cauchy定理
   - 单连通区域的Cauchy定理
   - 不定积分与原函数
   - 复连通区域的Cauchy定理
3. 两个有用的引理
   - 引理：适用于半径为无穷小的圆弧
   - 引理：适用于半径为无穷大的圆弧

引理II

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2, z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$

其中C_R是以$z=0$为圆心，R为半径，夹角为$\theta_2-\theta_1$的圆弧



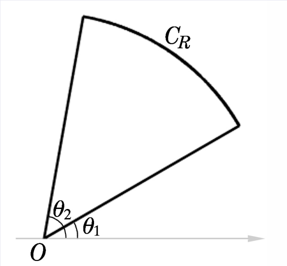
证明与引理I相似

引理II

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$

其中C_R是以$z=0$为圆心，R为半径，夹角为$\theta_2-\theta_1$的圆弧

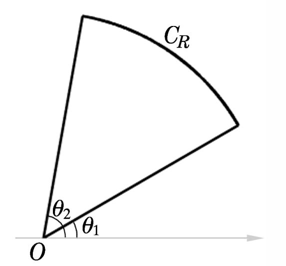


证明与引理I相似

引理II （要点）

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$



$$\because \quad \int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$$

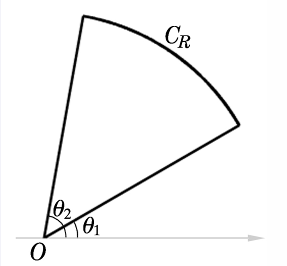
$$\therefore \quad \left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{C_R}\left[f(z)-\frac{K}{z}\right]\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq \int_{C_R}\left|zf(z)-K\right|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}$$

引理II （要点）

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$



$$\because \quad \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$$

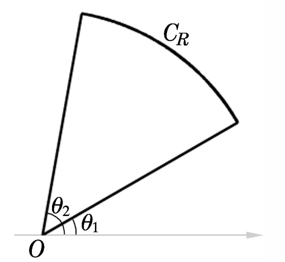
$$\therefore \quad \left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{C_R} \left[f(z)-\frac{K}{z}\right]\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq \int_{C_R} |zf(z)-K|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}$$

引理 II （要点）

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$



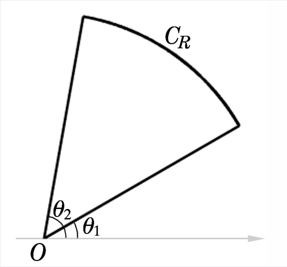
$$\because \quad \int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$$

$$\therefore \quad \left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{C_R}\left[f(z)-\frac{K}{z}\right]\mathrm{d}z\right|$$
$$\le \int_{C_R}|zf(z)-K|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}$$

引理 II （要点）

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$



当$\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$

$$\Downarrow$$

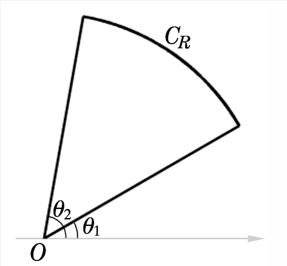
$\forall\varepsilon>0, \exists$(与$\arg(z-a)$无关的)$M(\varepsilon)>0$,

使当$|z|=R>M$时，$|zf(z)-K|<\varepsilon$

引理 II （要点）

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$



当$\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$

$$\Downarrow$$

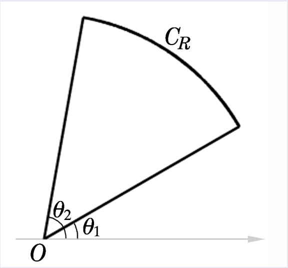
$\forall \varepsilon > 0, \exists$(与$\arg(z-a)$无关的)$M(\varepsilon) > 0$,

使当$|z| = R > M$时，$|zf(z) - K| < \varepsilon$

引理 II　　（要点）

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$



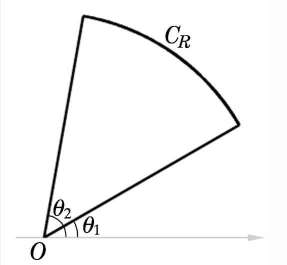
$$\therefore \qquad \left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| \le \varepsilon(\theta_2-\theta_1)$$

$$\therefore \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1) \qquad \square$$

引理 II （要点）

设$f(z)$在∞点的邻域内连续，且当$\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$时，$zf(z) \rightrightarrows K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$



$$\therefore \qquad \left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| \le \varepsilon(\theta_2-\theta_1)$$

$$\therefore \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1) \qquad \square$$