第 三 讲

多 值 函 数

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 根式函数
   - 根式函数的多值性
   - 根式函数的枝点
   - 根式函数的单值化
   - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
   - 对数函数的多值性
   - 对数函数的单值化
   - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

讲授要点

1. 根式函数
   - 根式函数的多值性
   - 根式函数的枝点
   - 根式函数的单值化
   - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
   - 对数函数的多值性
   - 对数函数的单值化
   - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

讲授要点

1. 根式函数
   - 根式函数的多值性
   - 根式函数的枝点
   - 根式函数的单值化
   - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
   - 对数函数的多值性
   - 对数函数的单值化
   - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§2.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§1.6
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§1.4

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§2.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§1.6
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§1.4

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§2.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§1.6
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§1.4

多 值 函 数

复变函数

设有复数平面上的一个区域G，如果对于G内的每一个z值，都有一个或多个复数值w与之对应， 则称w为z的函数——复变函数，记为

$$w = f(z)$$

定义域为G

多值函数

设有复数平面上的一个区域G，如果对于G内的每一个z值，有多个复数值w与之对应，则$w = f(z)$为z的多值函数

复变函数

设有复数平面上的一个区域G，如果对于G内的每一个z值，都有一个或多个复数值w与之对应，则称w为z的函数——复变函数，记为

$$w = f(z)$$

定义域为G

多值函数

设有复数平面上的一个区域G，如果对于G内的每一个z值，有多个复数值w与之对应，则$w = f(z)$为z的多值函数

多值函数

- 多值函数及其应用在解析函数理论中占有重要地位
- 根式函数，对数函数，反三角函数，都是多值函数
- 介绍根式函数及对数函数，并通过这两种函数阐述多值函数的一些基本概念
- 别的多值函数都可以用这两种多值函数表达

多值函数

- 多值函数及其应用在解析函数理论中占有重要地位
- 根式函数，对数函数，反三角函数，都是多值函数
- 介绍根式函数及对数函数，并通过这两种函数阐述多值函数的一些基本概念
- 别的多值函数都可以用这两种多值函数表达

多值函数

- 多值函数及其应用在解析函数理论中占有重要地位
- 根式函数，对数函数，反三角函数，都是多值函数
- 介绍根式函数及对数函数，并通过这两种函数阐述多值函数的一些基本概念
- 别的多值函数都可以用这两种多值函数表达

多值函数

- 多值函数及其应用在解析函数理论中占有重要地位
- 根式函数，对数函数，反三角函数，都是多值函数
- 介绍根式函数及对数函数，并通过这两种函数阐述多值函数的一些基本概念
- 别的多值函数都可以用这两种多值函数表达

讲授要点

1. 根式函数
   - 根式函数的多值性
   - 根式函数的枝点
   - 根式函数的单值化
   - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
   - 对数函数的多值性
   - 对数函数的单值化
   - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

根式函数$\sqrt{z}$的多值性

定义

给定一个自变量值z，凡是满足等式$w^2 = z$的w值，就是根式函数$\sqrt{z}$的函数值，或者说，是z的平方根

- 它是幂函数$z^2 = w$即$w = z^2$的反函数
- 它的多值性表现在：对应于一个自变量值z，根式函数$\sqrt{z}$可取两个值
- 为了更清楚地看出根式函数的性质，需要仔细分析一下函数$w = \sqrt{z-a}$

根式函数$\sqrt{z}$的多值性

定义

给定一个自变量值z，凡是满足等式$w^2 = z$的w值，就是根式函数$\sqrt{z}$的函数值，或者说，是z的平方根

- 它是幂函数$z^2 = w$即$w = z^2$的反函数
- 它的多值性表现在：对应于一个自变量值z，根式函数$\sqrt{z}$可取两个值
- 为了更清楚地看出根式函数的性质，需要仔细分析一下函数$w = \sqrt{z - a}$

根式函数$\sqrt{z}$的多值性

定义

给定一个自变量值z，凡是满足等式$w^2 = z$的w值，就是根式函数$\sqrt{z}$的函数值，或者说，是z的平方根

- 它是幂函数$z^2 = w$即$w = z^2$的反函数
- 它的多值性表现在：对应于一个自变量值z，根式函数$\sqrt{z}$可取两个值
- 为了更清楚地看出根式函数的性质，需要仔细分析一下函数$w = \sqrt{z-a}$

根式函数$\sqrt{z}$的多值性

定义

给定一个自变量值z，凡是满足等式$w^2=z$的w值，就是根式函数$\sqrt{z}$的函数值，或者说，是z的平方根

- 它是幂函数$z^2=w$即$w=z^2$的反函数
- 它的多值性表现在：对应于一个自变量值z，根式函数$\sqrt{z}$可取两个值
- 为了更清楚地看出根式函数的性质，需要仔细分析一下函数$w=\sqrt{z-a}$

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的多值性

- 采用极坐标表达式$w=\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $z-a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
- 代入则有

$$\rho=\sqrt{r} \quad \phi=\frac{\theta}{2}+n\pi \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- 因此，对于给定的一个z值，有两个w值与之对应：

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} && \text{相当于}\ n=0,\pm2,\cdots \\ w_2(z) &= \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\theta/2)} \\ &= -\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} && \text{相当于}\ n=\pm1,\pm3,\cdots \end{aligned}$$

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的多值性

- 采用极坐标表达式$w=\rho e^{i\phi}$, $z-a=re^{i\theta}$
- 代入则有

$$\rho=\sqrt{r}\quad \phi=\frac{\theta}{2}+n\pi\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- 因此，对于给定的一个z值，有两个w值与之对应：

$$w_1(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2}\qquad \text{相当于}\ n=0,\pm2,\cdots$$

$$w_2(z)=\sqrt{r}e^{i(\pi+\theta/2)}$$

$$=-\sqrt{r}e^{i\theta/2}\qquad \text{相当于}\ n=\pm1,\pm3,\cdots$$

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的多值性

- 采用极坐标表达式$w=\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $z-a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
- 代入则有

$$\rho=\sqrt{r} \quad \phi=\frac{\theta}{2}+n\pi \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- 因此，对于给定的一个z值，有两个w值与之对应：

$$w_1(z)=\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \qquad \text{相当于} n=0,\pm2,\cdots$$

$$w_2(z)=\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\theta/2)}$$

$$=-\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \qquad \text{相当于} n=\pm1,\pm3,\cdots$$

结论

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的多值性

- 多值性来源于辐角的多值性
- 准确说，多值性来源于宗量$z-a$(而非自变量z)辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数w的辐角

为了确定起见，以后就把函数$w=\sqrt{z-a}$明确表示成

$$|w|=\sqrt{|z-a|}\qquad \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$$

结论

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的多值性

- 多值性来源于辐角的多值性
- 准确说，多值性来源于宗量$z-a$(而非自变量z)辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数w的辐角

为了确定起见，以后就把函数$w=\sqrt{z-a}$明确表示成

$$|w|=\sqrt{|z-a|} \qquad \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$$

结论

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的多值性

- 多值性来源于辐角的多值性
- 准确说，多值性来源于宗量$z-a$(而非自变量z)辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数w的辐角

为了确定起见，以后就把函数$w=\sqrt{z-a}$明确表示成

$$|w|=\sqrt{|z-a|}\qquad \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$$

结论

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的多值性

- 多值性来源于辐角的多值性
- 准确说，多值性来源于宗量$z-a$(而非自变量z)辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数w的辐角

为了确定起见，以后就把函数$w=\sqrt{z-a}$明确表示成

$$|w|=\sqrt{|z-a|} \qquad \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$$

讲授要点

1. 根式函数
    - 根式函数的多值性
    - 根式函数的枝点
    - 根式函数的单值化
    - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
    - 对数函数的多值性
    - 对数函数的单值化
    - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的进一步分析

为了更进一步揭示多值函数$w=\sqrt{z-a}$的性质，现在不妨规定好z平面上某一点$\arg(z-a)$的值，而后研究z沿简单闭合曲线(即自身不相交的闭合曲线)连续变化时，相应的w值的连续变化

当z沿一定简单闭合曲线变化一周回到原处时，可能出现两种结果

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的进一步分析

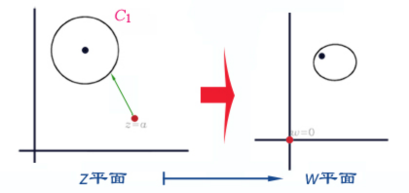
为了更进一步揭示多值函数$w=\sqrt{z-a}$的性质，现在不妨规定好z平面上某一点$\arg(z-a)$的值，而后研究z沿简单闭合曲线(即自身不相交的闭合曲线)连续变化时，相应的w值的连续变化

当z沿一定简单闭合曲线变化一周回到原处时，可能出现两种结果

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的进一步分析

闭合曲线内不包含a点

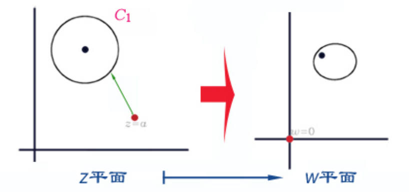
z沿闭合曲线变化一周回到原处，$\arg(z-a)$也还原，因此对应的函数值不变



根式函数$w=\sqrt{z-a}$的进一步分析

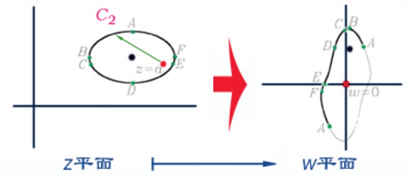
闭合曲线内不包含a点

z沿闭合曲线变化一周回到原处，$\arg(z-a)$也还原，因此对应的函数值不变



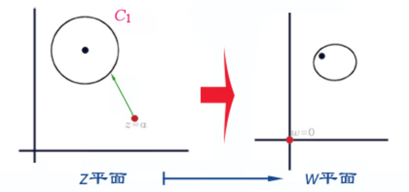
闭合曲线内含有a点

z变化一周回到原处，$\arg(z-a)$增加2π，$\arg w$随之增加π，因而w值并不还原

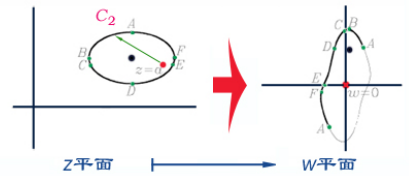


根式函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

闭合曲线内不包含a点



闭合曲线内含有a点

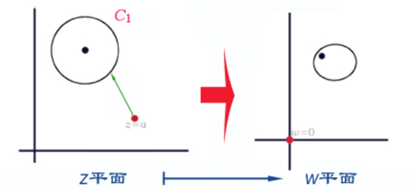


因此，a点在多值函数$w=\sqrt{z-a}$中具有特殊的地位：

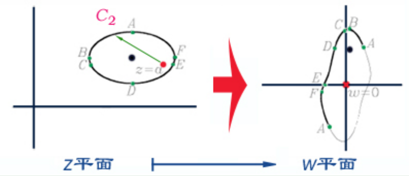
- 当z绕a点转一圈回到原处时，对应的函数值不还原
- 当z不绕a点转一圈回到原处时，函数值还原

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

闭合曲线内不包含a点



闭合曲线内含有a点

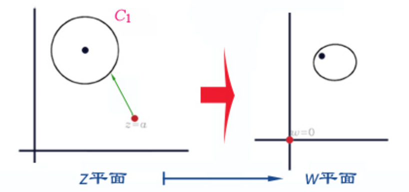


因此，a点在多值函数$w=\sqrt{z-a}$中具有特殊的地位：

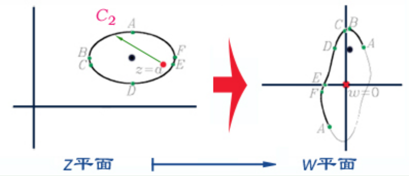
- 当z绕a点转一圈回到原处时，对应的函数值不还原
- 当z不绕a点转一圈回到原处时，函数值还原

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

闭合曲线内不包含a点



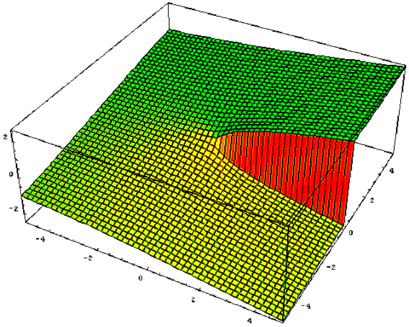
闭合曲线内含有a点



因此，a点在多值函数$w=\sqrt{z-a}$中具有特殊的地位：

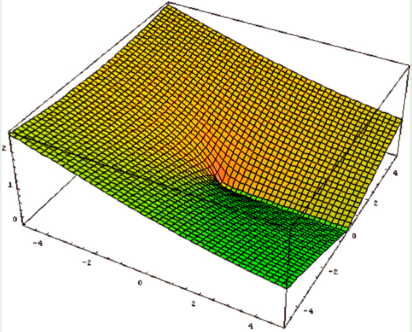
- 当z绕a点转一圈回到原处时，对应的函数值不还原
- 当z不绕a点转一圈回到原处时，函数值还原

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的实部和虚部



根式函数$w=\sqrt{z-a}$实部

$\arg(z-a)=0 \ \rightarrow \ 2\pi$

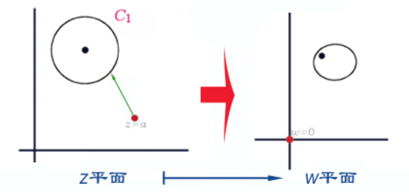


根式函数$w=\sqrt{z-a}$虚部

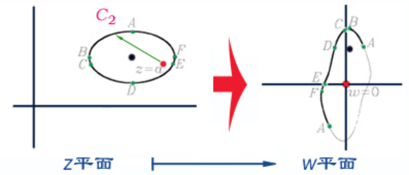
$\arg(z-a)=0 \ \rightarrow \ 2\pi$

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

闭合曲线内不包含a点



闭合曲线内含有a点

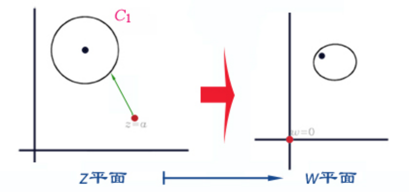


- a点称为多值函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点
- $z=\infty$也是多值函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

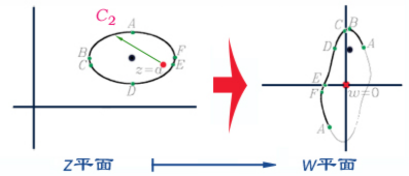
因此，为了完全确定多值函数$w=\sqrt{z-a}$的函数值与自变量z值之间的对应关系，可以采用两种办法

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

闭合曲线内不包含a点



闭合曲线内含有a点

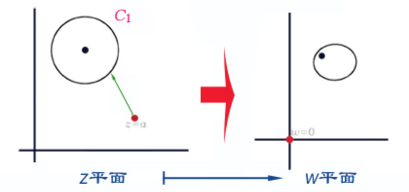


- a点称为多值函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点
- $z=\infty$也是多值函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

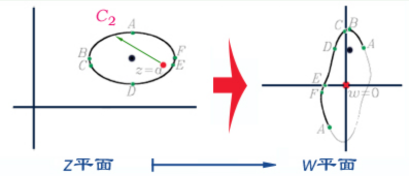
因此，为了完全确定多值函数$w=\sqrt{z-a}$的函数值与自变量z值之间的对应关系，可以采用两种办法

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

闭合曲线内不包含a点



闭合曲线内含有a点



- a点称为多值函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点
- $z=\infty$也是多值函数$w=\sqrt{z-a}$的枝点

因此，为了完全确定多值函数$w=\sqrt{z-a}$的函数值与自变量z值之间的对应关系，可以采用两种办法

讲授要点

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

- 比较简单的办法是规定宗量$z-a$的辐角变化范围
- 当宗量$z-a$的辐角限制在某个周期内时，$w=\sqrt{z-a}$的辐角也就唯一地确定，因而w值也就唯一地确定
- 例如，规定$0\leq\arg(z-a)<2\pi$或$2\pi\leq\arg(z-a)<4\pi$，等等

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

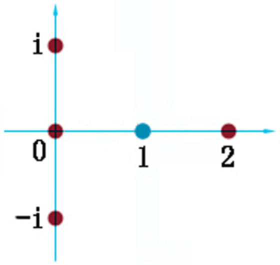
- 比较简单的办法是规定宗量$z-a$的辐角变化范围
- 当宗量$z-a$的辐角限制在某个周期内时，$w=\sqrt{z-a}$的辐角也就唯一地确定，因而w值也就唯一地确定
- 例如，规定$0\le\arg(z-a)<2\pi$或$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$，等等

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

- 比较简单的办法是规定宗量$z-a$的辐角变化范围
- 当宗量$z-a$的辐角限制在某个周期内时，$w=\sqrt{z-a}$的辐角也就唯一地确定，因而w值也就唯一地确定
- 例如，规定$0\leq\arg(z-a)<2\pi$或$2\pi\leq\arg(z-a)<4\pi$，等等

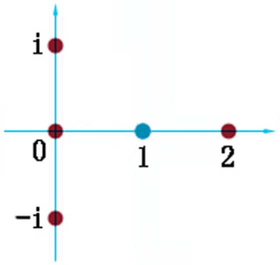
例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$0 \leq \arg(z-1) < 2\pi$，求$w(2)$, $w(\mathrm{i})$, $w(0)$, $w(-\mathrm{i})$

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$0\leq \arg(z-1)<2\pi$，求$w(2)$, $w(\mathrm{i})$, $w(0)$, $w(-\mathrm{i})$



例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$0\leq\arg(z-1)<2\pi$，求$w(2)$，$w(\mathrm{i})$，$w(0)$，$w(-\mathrm{i})$

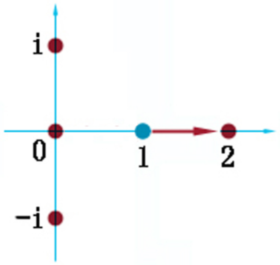
$$\arg w=\frac{1}{2}\arg(z-1)$$



例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$0\le \arg(z-1)<2\pi$，求$w(2)$, $w(\mathrm{i})$, $w(0)$, $w(-\mathrm{i})$

$$\arg w=\frac{1}{2}\arg(z-1)$$

$\arg(z-1)\big|_{z=2}=0$ $\qquad w(2)=1$

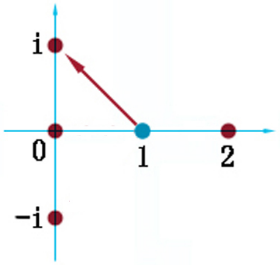


例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$0\le \arg(z-1)<2\pi$，求$w(2)$, $w(\mathrm{i})$, $w(0)$, $w(-\mathrm{i})$

$$\arg w = \frac{1}{2}\arg(z-1)$$

$$\arg(z-1)\Big|_{z=2} = 0 \qquad w(2)=1$$

$$\arg(z-1)\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{3}{4}\pi \qquad w(\mathrm{i})=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8}$$



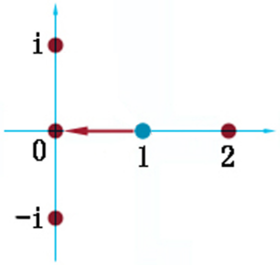
例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$0\leq \arg(z-1)<2\pi$，求$w(2)$, $w(\mathrm{i})$, $w(0)$, $w(-\mathrm{i})$

$$\arg w = \frac{1}{2}\arg(z-1)$$

$$\arg(z-1)\Big|_{z=2} = 0 \qquad w(2)=1$$

$$\arg(z-1)\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{3}{4}\pi \qquad w(\mathrm{i})=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8}$$

$$\arg(z-1)\Big|_{z=0} = \pi \qquad w(0) = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}=\mathrm{i}$$



例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$0\le\arg(z-1)<2\pi$，求$w(2)$, $w(\mathrm{i})$, $w(0)$, $w(-\mathrm{i})$

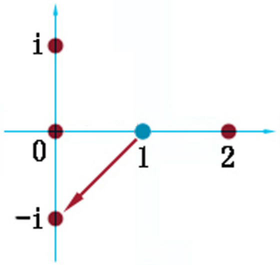
$$\arg w=\frac{1}{2}\arg(z-1)$$

$$\arg(z-1)\big|_{z=2}=0 \qquad w(2)=1$$

$$\arg(z-1)\big|_{z=\mathrm{i}}=\frac{3}{4}\pi \qquad w(\mathrm{i})=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8}$$

$$\arg(z-1)\big|_{z=0}=\pi \qquad w(0)=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}=\mathrm{i}$$

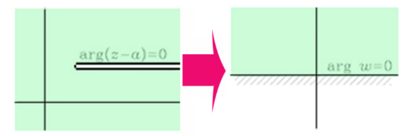
$$\arg(z-1)\big|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{5}{4}\pi \qquad w(-\mathrm{i})=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/8}$$



根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

规定宗量$z-a$的辐角变化范围

规定辐角$0\leq\arg(z-a)<2\pi$，则$0\leq\arg w<\pi$，即w被限制在上半平面

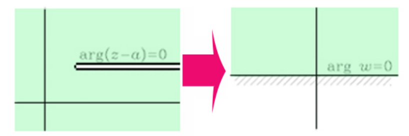


根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

规定宗量$z-a$的辐角变化范围

规定辐角$0\leq\arg(z-a)<2\pi$，则$0\leq\arg w<\pi$，即w被限制在上半平面

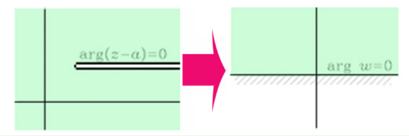
在这样的限制下，w值与自变量z值之间存在一一对应关系



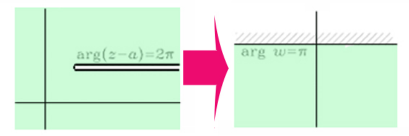
根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

规定宗量$z-a$的辐角变化范围

规定辐角$0\le \arg(z-a)<2\pi$，
则$0\le \arg w<\pi$，即w被限制在上半平面
在这样的限制下，w值与自变量z值之间存在一一对应关系



规定$2\pi\le \arg(z-a)<4\pi$，
则$\pi\le \arg w<2\pi$，w将限制在下半平面

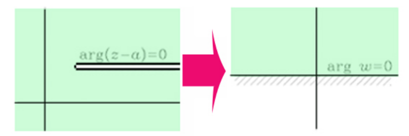


根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

规定宗量$z-a$的辐角变化范围

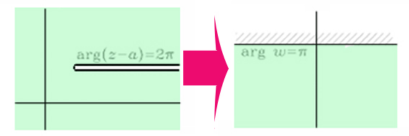
规定辐角$0\le\arg(z-a)<2\pi$，则$0\le\arg w<\pi$，即w被限制在上半平面

在这样的限制下，w值与自变量z值之间存在一一对应关系



规定$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$，则$\pi\le\arg w<2\pi$，w将限制在下半平面

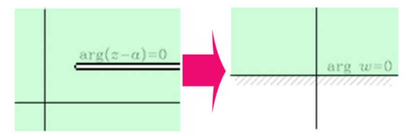
w值与自变量z值又有新的一一对应关系



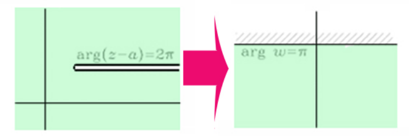
根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值化

规定宗量$z-a$的辐角变化范围

规定辐角$0\le\arg(z-a)<2\pi$，
则$0\le\arg w<\pi$，即w被限制在上半平面
在这样的限制下，w值与自变量z值之间存在一一对应关系



规定$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$，
则$\pi\le\arg w<2\pi$，w将限制在下半平面
w值与自变量z值又有新的一一对应关系



在$4\pi\le\arg(z-a)<6\pi$, $6\pi\le\arg(z-a)<8\pi,\cdots$或者$-2\pi\le\arg(z-a)<0$, $-4\pi\le\arg(z-a)<-2\pi,\cdots$的规定下，还会重复出现这些结果

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值分枝

- 因此，只要适当规定宗量的辐角变化范围，就可以将多值函数单值化
- 辐角变化的各个周期，给出多值函数的各个单值分枝
- 每个单值分枝都是单值函数，整个多值函数就是它的各个单值分枝的总和

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值分枝

- 因此，只要适当规定宗量的辐角变化范围，就可以将多值函数单值化
- 辐角变化的各个周期，给出多值函数的各个单值分枝
- 每个单值分枝都是单值函数，整个多值函数就是它的各个单值分枝的总和

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值分枝

- 因此，只要适当规定宗量的辐角变化范围，就可以将多值函数单值化
- 辐角变化的各个周期，给出多值函数的各个单值分枝
- 每个单值分枝都是单值函数，整个多值函数就是它的各个单值分枝的总和

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值分枝

在上面的讨论中，多值函数$w=\sqrt{z-a}$有两个单值分枝，分别是w的上半平面和下半平面

$0\le\arg(z-a)<2\pi$ 给出单值分枝Ⅰ： $0\le\arg w<\pi$

$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$ 给出单值分枝Ⅱ： $\pi\le\arg w<2\pi$

- 将多值函数划分为若干个(甚至无穷个)单值分枝，其实质就是限制z的变化方式
- 例如在上面的例子中，就是限制z不得绕$z=a$点或∞点转圈

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值分枝

在上面的讨论中，多值函数$w=\sqrt{z-a}$有两个单值分枝，分别是w的上半平面和下半平面

$$0\le\arg(z-a)<2\pi \text{ 给出单值分枝 I：} \quad 0\le\arg w<\pi$$

$$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi \text{ 给出单值分枝 II：} \quad \pi\le\arg w<2\pi$$

- 将多值函数划分为若干个(甚至无穷个)单值分枝，其实质就是限制z的变化方式
- 例如在上面的例子中，就是限制z不得绕$z=a$点或∞点转圈

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的单值分枝

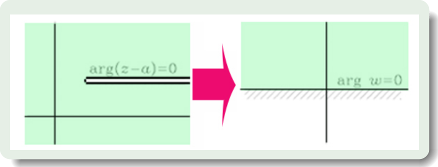
在上面的讨论中，多值函数$w=\sqrt{z-a}$有两个单值分枝，分别是w的上半平面和下半平面

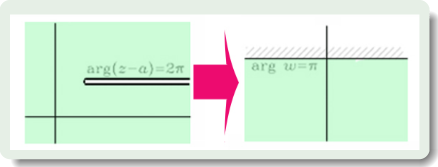
$0\le\arg(z-a)<2\pi$ 给出单值分枝Ⅰ： $0\le\arg w<\pi$

$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi$ 给出单值分枝Ⅱ： $\pi\le\arg w<2\pi$

- 将多值函数划分为若干个(甚至无穷个)单值分枝，其实质就是限制z的变化方式
- 例如在上面的例子中，就是限制z不得绕$z=a$点或∞点转圈

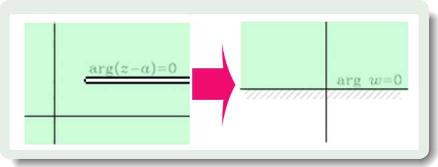
根式函数$w=\sqrt{z-a}$的割线

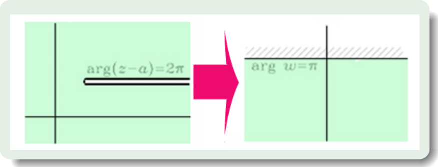




- 这种规定可以用几何方法形象化地表现出来：在z平面上平行于实轴从$z=a$点向右作一割线，一直延续到∞点
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=0$，给出单值分枝 I
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=2\pi$，给出单值分枝 II
- 这两个单值分枝合起来，就得到一个完整的w平面，即整个多值函数w

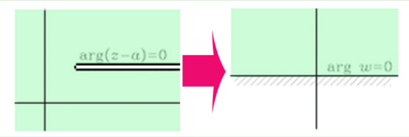
根式函数$w=\sqrt{z-a}$的割线

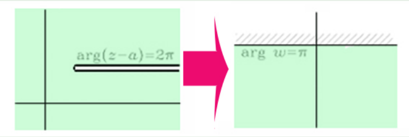




- 这种规定可以用几何方法形象化地表现出来：在z平面上平行于实轴从$z=a$点向右作一割线，一直延续到∞点
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=0$，给出单值分枝 I
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=2\pi$，给出单值分枝 II
- 这两个单值分枝合起来，就得到一个完整的w平面，即整个多值函数w

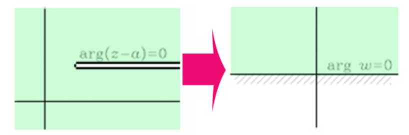
根式函数$w=\sqrt{z-a}$的割线

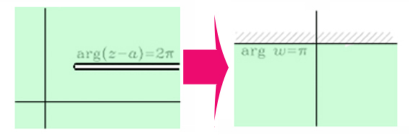




- 这种规定可以用几何方法形象化地表现出来：在z平面上平行于实轴从$z=a$点向右作一割线，一直延续到∞点
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=0$，给出单值分枝 I
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=2\pi$，给出单值分枝 II
- 这两个单值分枝合起来，就得到一个完整的w平面，即整个多值函数w

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的割线





- 这种规定可以用几何方法形象化地表现出来：在z平面上平行于实轴从$z=a$点向右作一割线，一直延续到∞点
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=0$，给出单值分枝 I
- 规定割线上岸$\arg(z-a)=2\pi$，给出单值分枝 II
- 这两个单值分枝合起来，就得到一个完整的w平面，即整个多值函数w

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的割线

- 割线的作用，就是限制 z 的变化方式
- 由于割线连结了多值函数的两个枝点，$z=a$和∞，因此z不再能够绕一个分枝点转圈（这时，同时围绕两个分枝点转一圈还是允许的）
- 单值分枝的划分(或者说，宗量辐角变化范围的规定)不是唯一的
- 割线的作法多种多样，甚至不必是直线
  只要割线连结了多值函数的分枝点，同时适当规定割线一侧(例如上岸或下岸)的宗量辐角值(或者等价地，规定在某一点的宗量辐角值或函数值)即可

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的割线

- 割线的作用，就是限制 z 的变化方式
- 由于割线连结了多值函数的两个枝点，$z=a$和∞，因此z不再能够绕一个分枝点转圈（这时，同时围绕两个分枝点转一圈还是允许的）
- 单值分枝的划分(或者说，宗量辐角变化范围的规定)不是唯一的
- 割线的作法多种多样，甚至不必是直线
只要割线连结了多值函数的分枝点， 同时适当规定割线一侧(例如上岸或下岸)的宗量辐角值(或者等价地，规定在某一点的宗量辐角值或函数值)即可

根式函数$w = \sqrt{z-a}$的割线

- 割线的作用，就是限制 z 的变化方式
- 由于割线连结了多值函数的两个枝点，$z=a$和∞，因此z不再能够绕一个分枝点转圈（这时，同时围绕两个分枝点转一圈还是允许的）
- 单值分枝的划分(或者说，宗量辐角变化范围的规定)不是唯一的
- 割线的作法多种多样，甚至不必是直线
  只要割线连结了多值函数的分枝点，同时适当规定割线一侧(例如上岸或下岸)的宗量辐角值(或者等价地，规定在某一点的宗量辐角值或函数值)即可

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的割线

- 割线的作用，就是限制 z 的变化方式
- 由于割线连结了多值函数的两个枝点，$z=a$ 和∞，因此z不再能够绕一个分枝点转圈（这时，同时围绕两个分枝点转一圈还是允许的）
- 单值分枝的划分(或者说，宗量辐角变化范围的规定)不是唯一的
- 割线的作法多种多样，甚至不必是直线
  只要割线连结了多值函数的分枝点， 同时适当规定割线一侧(例如上岸或下岸)的宗量辐角值(或者等价地，规定在某一点的宗量辐角值或函数值)即可

讲授要点

1. 根式函数
   - 根式函数的多值性
   - 根式函数的枝点
   - 根式函数的单值化
   - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
   - 对数函数的多值性
   - 对数函数的单值化
   - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

评述

☞ 将多值函数划分为单值分枝，其优点是， 每个单值分枝都是单值函数，因而可以像普通的单值函数那样讨论它们的解析性

单值函数的分枝点是奇点，它不对应于哪一个单值分枝

在枝点附近，也不存在一个只对应于一个单值分枝的邻域

评述

☞ 将多值函数划分为单值分枝，其优点是，每个单值分枝都是单值函数，因而可以像普通的单值函数那样讨论它们的解析性

单值函数的分枝点是奇点，它不对应于哪一个单值分枝

在枝点附近，也不存在一个只对应于一个单值分枝的邻域

评述

☞ 将多值函数划分为单值分枝，其优点是， 每个单值分枝都是单值函数，因而可以像普通的单值函数那样讨论它们的解析性

单值函数的分枝点是奇点，它不对应于哪一个单值分枝

在枝点附近，也不存在一个只对应于一个单值分枝的邻域

评述

☞ 这种划分的缺点是有一定的局限性： 它限制了宗量的辐角变化范围，就不能用来讨论一些比较复杂的问题

☞ 为了克服这个缺点，另一种完全确定函数值与自变量值对应关系的办法是：

规定函数w在某一点z_0的值，并明确说明z的连续变化路线． 当z沿这曲线连续变化时，函数w也随之连续变化

评述

- 这种划分的缺点是有一定的局限性： 它限制了宗量的辐角变化范围，就不能用来讨论一些比较复杂的问题
- 为了克服这个缺点，另一种完全确定函数值与自变量值对应关系的办法是：

规定函数w在某一点z_0的值，并明确说明z的连续变化路线． 当z沿这曲线连续变化时，函数w也随之连续变化

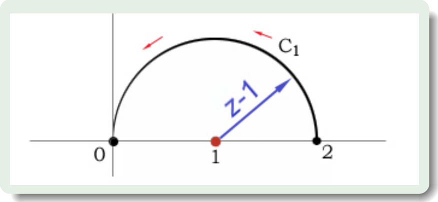
评述

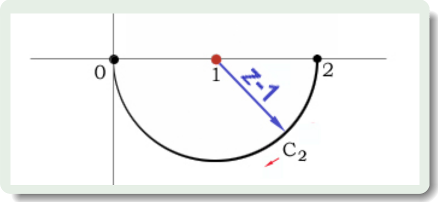
- 这种划分的缺点是有一定的局限性： 它限制了宗量的辐角变化范围，就不能用来讨论一些比较复杂的问题

- 为了克服这个缺点，另一种完全确定函数值与自变量值对应关系的办法是：

  规定函数w在某一点z_0的值，并明确说明z的连续变化路线． 当z沿这曲线连续变化时，函数w也随之连续变化

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，讨论z沿C_1或C_2连续变化到原点时，函数w之值





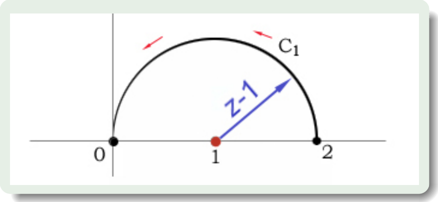
当z沿C_1移动到$z=0$时

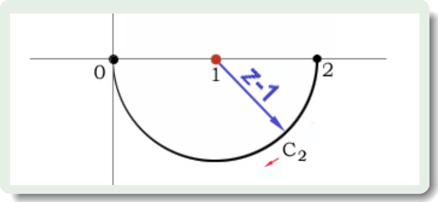
$$\Delta\arg(z-1)=\pi$$

$$\Delta\arg w=\frac{1}{2}\Delta\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$$

$$w(0)=e^{i\pi/2}=i$$

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，讨论z沿C_1或C_2连续变化到原点时，函数w之值





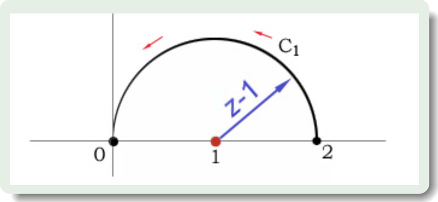
当z沿C_1移动到$z=0$时

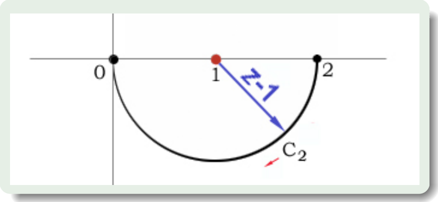
$$\Delta\arg(z-1)=\pi$$

$$\Delta\arg w=\frac{1}{2}\Delta\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$$

$$w(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}$$

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，讨论z沿C_1或C_2连续变化到原点时，函数w之值





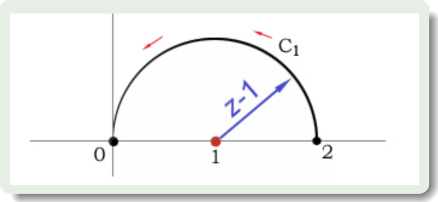
当z沿C_1移动到$z=0$时

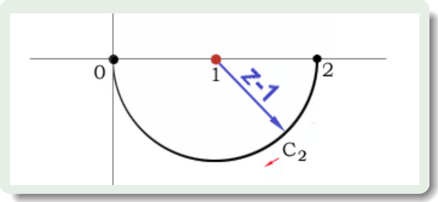
$$\Delta\arg(z-1)=\pi$$

$$\Delta\arg w=\frac{1}{2}\Delta\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$$

$$w(0)=e^{i\pi/2}=i$$

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，讨论z沿C_1或C_2连续变化到原点时，函数w之值





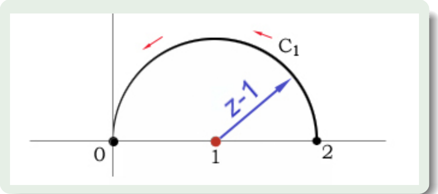
当z沿C_1移动到$z=0$时

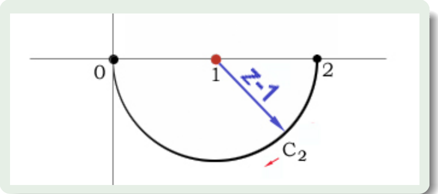
$$\Delta\arg(z-1)=\pi$$

$$\Delta\arg w=\frac{1}{2}\Delta\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$$

$$w(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}$$

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，讨论z沿C_1或C_2连续变化到原点时，函数w之值





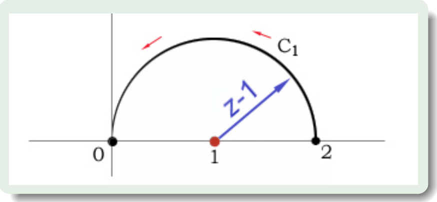
当z沿C_2移动到$z=0$时

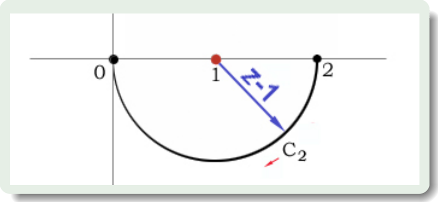
$$\Delta \arg(z-1) = -\pi$$

$$\Delta \arg w = \frac{1}{2}\Delta \arg(z-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$w(0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$$

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，讨论z沿C_1或C_2连续变化到原点时，函数w之值





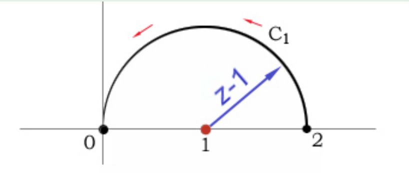
当z沿C_2移动到$z=0$时

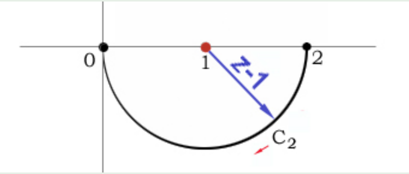
$$\Delta \arg(z-1) = -\pi$$

$$\Delta \arg w = \frac{1}{2}\Delta \arg(z-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$w(0) = e^{-i\pi/2} = -i$$

例：设$w=\sqrt{z-1}$，规定$w(2)=1$，讨论z沿C_1或C_2连续变化到原点时，函数w之值





当z沿C_2移动到$z=0$时

$$\Delta\arg(z-1)=-\pi$$

$$\Delta\arg w=\frac{1}{2}\Delta\arg(z-1)=-\frac{\pi}{2}$$

$$w(0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}=-\mathrm{i}$$

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的Riemann面

评述

- 采用这种办法，z的变化路线不受限制，因而可以从一个单值分枝运动到另一个单值分枝
- 在几何图形上，这相当于将两个割开的z平面粘接起来，从而构成二叶Riemann面 See Figure
- 对于函数$w=\sqrt{z-1}$或$\sqrt{z-a}$来说，二叶Riemann面上的z点和w平面上的点一一对应

Next Frame

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的Riemann面

评述

- ☞ 采用这种办法，z的变化路线不受限制，因而可以从一个单值分枝运动到另一个单值分枝
- ☞ 在几何图形上，这相当于将两个割开的z平面粘接起来，从而构成二叶Riemann面 See Figure
- ☞ 对于函数$w=\sqrt{z-1}$或$\sqrt{z-a}$来说，二叶Riemann面上的z点和w平面上的点一一对应

Next Frame

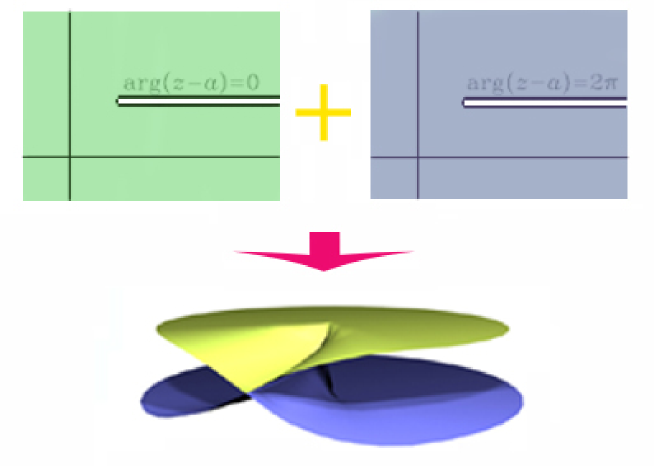
根式函数$w=\sqrt{z-a}$的Riemann面

评述

- 采用这种办法，z的变化路线不受限制，因而可以从一个单值分枝运动到另一个单值分枝
- 在几何图形上，这相当于将两个割开的z平面粘接起来，从而构成二叶Riemann面 See Figure
- 对于函数$w=\sqrt{z-1}$或$\sqrt{z-a}$来说，二叶Riemann面上的z点和w平面上的点一一对应

Next Frame

根式函数$w=\sqrt{z-a}$的Riemann面



多值函数$w=\sqrt{z-a}$的Riemann面

Return

评述

- 对于更复杂一些的根式函数，例如 $w=\sqrt[3]{z-a}$或$\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$，等等，也可以类似地讨论
- 只是需要注意找出多值函数的全部枝点，并且正确地确定割线的作法
- 在一般情况下，割线可能不止一条，也不一定需要用一条割线把全部枝点都连接起来

评述

- 对于更复杂一些的根式函数，例如 $w=\sqrt[3]{z-a}$或$\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$，等等，也可以类似地讨论
- 只是需要注意找出多值函数的全部枝点，并且正确地确定割线的作法
- 在一般情况下，割线可能不止一条，也不一定需要用一条割线把全部枝点都连接起来

评述

- 对于更复杂一些的根式函数，例如 $w=\sqrt[3]{z-a}$或$\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$，等等，也可以类似地讨论
- 只是需要注意找出多值函数的全部枝点，并且正确地确定割线的作法
- 在一般情况下，割线可能不止一条，也不一定需要用一条割线把全部枝点都连接起来

讲授要点

1. 根式函数
   - 根式函数的多值性
   - 根式函数的枝点
   - 根式函数的单值化
   - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
   - 对数函数的多值性
   - 对数函数的单值化
   - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

对数函数$\ln z$的多值性

定义

$w=\ln z$的定义是$\mathrm{e}^w=z$，即给定自变量z的一个数值，凡是满足$\mathrm{e}^w=z$的所有w值均称为对数函数$w=\ln z$的函数值

- 它是指数函数$w=\mathrm{e}^z$的反函数
- 令$w=u+\mathrm{i}v$，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，就得到$\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
  $u=\ln r=\ln|z| \quad v=\theta+2n\pi \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
- 以后就把对数函数$w=\ln z$明确表示为
  $w=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2n\pi)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$

对数函数$\ln z$的多值性

定义

$w=\ln z$的定义是$e^w=z$，即给定自变量z的一个数值，凡是满足$e^w=z$的所有w值均称为对数函数$w=\ln z$的函数值

- 它是指数函数$w=e^z$的反函数
- 令$w=u+iv$，$z=re^{i\theta}$，就得到$e^u\cdot e^{iv}=re^{i\theta}$
  $u=\ln r=\ln|z|\quad v=\theta+2n\pi\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
- 以后就把对数函数$w=\ln z$明确表示为
  $w=\ln z=\ln|z|+i(\theta+2n\pi)=\ln|z|+i\arg z$

对数函数$\ln z$的多值性

定义

$w=\ln z$的定义是$\mathrm{e}^w=z$，即给定自变量z的一个数值，凡是满足$\mathrm{e}^w=z$的所有w值均称为对数函数$w=\ln z$的函数值

- 它是指数函数$w=\mathrm{e}^z$的反函数
- 令$w=u+\mathrm{i}v$，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，就得到$\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

  $u=\ln r=\ln|z|\quad v=\theta+2n\pi\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
- 以后就把对数函数$w=\ln z$明确表示为

  $w=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2n\pi)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$

对数函数$\ln z$的多值性

定义

$w=\ln z$的定义是$\mathrm{e}^w=z$，即给定自变量z的一个数值，凡是满足$\mathrm{e}^w=z$的所有w值均称为对数函数$w=\ln z$的函数值

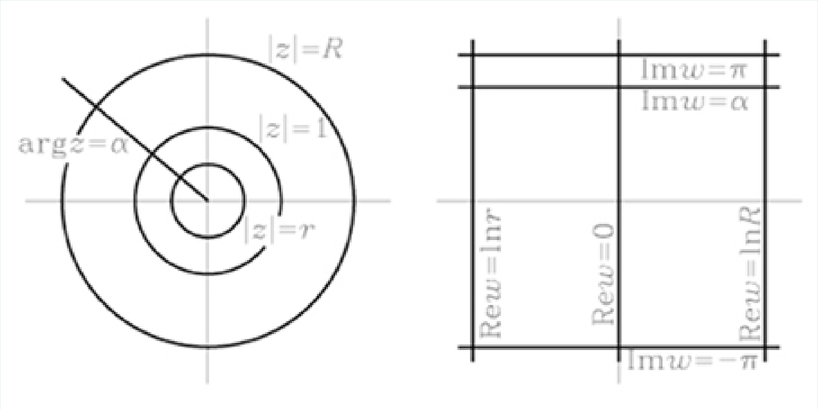
- 它是指数函数$w=\mathrm{e}^z$的反函数
- 令$w=u+\mathrm{i}v$，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，就得到$\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

  $u=\ln r=\ln|z| \quad v=\theta+2n\pi \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
- 以后就把对数函数$w=\ln z$明确表示为

  $w=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2n\pi)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$

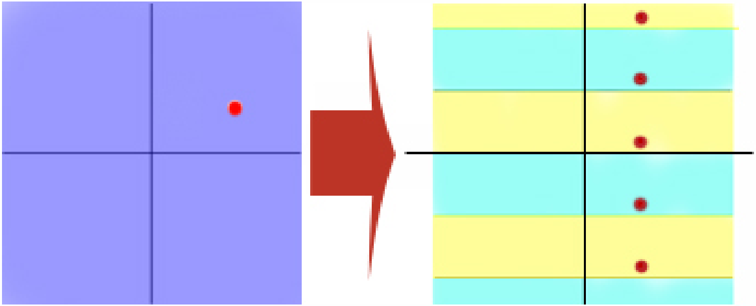
对数函数$\ln z$的多值性

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$



对数函数$\ln z$的多值性

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

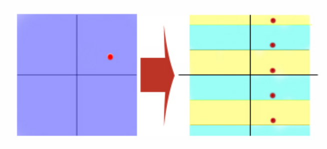


$w = \ln z$：给定一个z值，有无穷多个w值

对数函数$\ln z$的多值性

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- $w = \ln z$也是多值的
- 多值性的来源是宗量z辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数值w的虚部
- 对应每一个z值，有无穷多个w值，它们的实部相同，虚部相差2π的整数倍



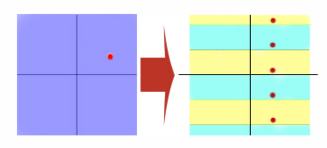
$w = \ln z$：给定一个z值

有无穷多个w值

对数函数$\ln z$的多值性

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- $w = \ln z$也是多值的
- 多值性的来源是宗量z辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数值w的虚部
- 对应每一个z值，有无穷多个w值，它们的实部相同，虚部相差2π的整数倍



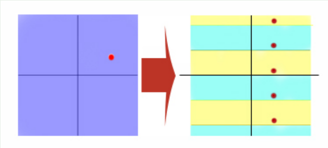
$w = \ln z$：给定一个z值

有无穷多个w值

对数函数$\ln z$的多值性

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- $w = \ln z$也是多值的
- 多值性的来源是宗量z辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数值w的虚部
- 对应每一个z值，有无穷多个w值，它们的实部相同，虚部相差2π的整数倍

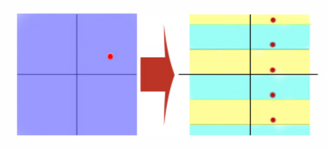


$w = \ln z$：给定一个z值有无穷多个w值

对数函数$\ln z$的多值性

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- $w = \ln z$也是多值的
- 多值性的来源是宗量z辐角的多值性
- 多值性的表现则是函数值w的虚部
- 对应每一个z值，有无穷多个w值，它们的实部相同，虚部相差2π的整数倍



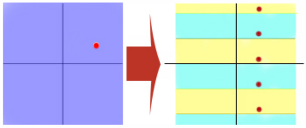
$w = \ln z$：给定一个z值
有无穷多个w值

讲授要点

对数函数$\ln z$的枝点与割线

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- 枝点是$z = 0$和∞
- 作割线连接0与∞，并规定割线一侧的$\arg z$值，即得到$w = \ln z$的单值分枝
- $w = \ln z$有无穷多个单值分枝
- 每个单值分枝内，都有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z) = \frac{1}{z}$$

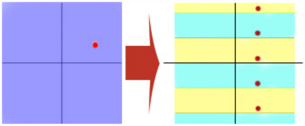


$w = \ln z$：给定一个z值
有无穷多个w值

对数函数$\ln z$的枝点与割线

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- 枝点是$z = 0$和∞
- 作割线连接0与∞，并规定割线一侧的$\arg z$值，即得到$w = \ln z$的单值分枝
- $w = \ln z$有无穷多个单值分枝
- 每个单值分枝内，都有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z) = \frac{1}{z}$$



$w = \ln z$：给定一个z值

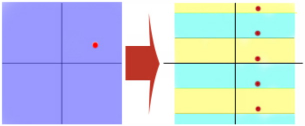
有无穷多个w值

对数函数$\ln z$的枝点与割线

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

- 枝点是$z=0$和∞
- 作割线连接0与∞，并规定割线一侧的$\arg z$值，即得到$w=\ln z$的单值分枝
- $w=\ln z$有无穷多个单值分枝
- 每个单值分枝内，都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z) = \frac{1}{z}$$

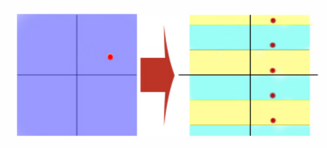


$w=\ln z$：给定一个z值有无穷多个w值

对数函数$\ln z$的枝点与割线

$$w=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2n\pi)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$$

- 枝点是$z=0$和∞
- 作割线连接0与∞，并规定割线一侧的$\arg z$值，即得到$w=\ln z$的单值分枝
- $w=\ln z$有无穷多个单值分枝
- 每个单值分枝内，都有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z)=\frac{1}{z}$$



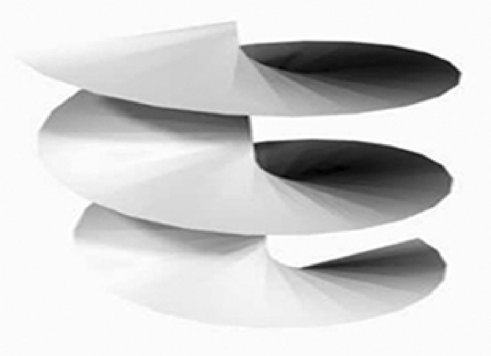
$w=\ln z$：给定一个z值
有无穷多个w值

讲授要点

1. 根式函数
   - 根式函数的多值性
   - 根式函数的枝点
   - 根式函数的单值化
   - 根式函数的Riemann面
2. 对数函数
   - 对数函数的多值性
   - 对数函数的单值化
   - 对数函数的Riemann面
3. 其它多值函数

对数函数$\ln z$的Riemann面

$w = \ln z$的Riemann面是无穷多叶的



多值函数$w = \ln z$的Riemann面

其它多值函数

反三角函数和一般的幂函数

$$\arcsin z = \frac{1}{\mathrm{i}} \ln\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\arccos z = \frac{1}{\mathrm{i}} \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\arctan z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \ln \frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}$$

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln z} \quad (\alpha\text{为任意复数})$$

也都是多值函数

不过是对数函数或对数函数与根式函数的组合，因此它们的多值性可以根据这两种基本的多值函数来讨论

反三角函数和一般的幂函数

$$\arcsin z = \frac{1}{\mathrm{i}}\ln\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\arccos z = \frac{1}{\mathrm{i}}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\arctan z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$$

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln z} \quad (\alpha\text{为任意复数})$$

也都是多值函数

不过是对数函数或对数函数与根式函数的组合，因此它们的多值性可以根据这两种基本的多值函数来讨论