第 二 讲

解 析 函 数

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

讲授要点

1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§1.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§1.2, 1.3

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§1.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§1.2, 1.3

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§2.1 — 2.3
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§1.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§1.2, 1.3

讲授要点

1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

导数：定义

设$w=f(z)$是区域G内的单值函数，如果在G内的某点z

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，则称函数$f(z)$在z点**可导**

此极限值，记为$f'(z)$，即称为$f(z)$在z点的**导数**

导数：定义

设$w=f(z)$是区域G内的单值函数，如果在G内的某点z

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，则称函数$f(z)$在z点**可导**

此极限值，记为$f'(z)$，即称为$f(z)$在z点的**导数**

微分：定义

若函数$w=f(z)$在z点的改变量

$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$可以写成

$$\Delta w=A(z)\Delta z+\rho(\Delta z)$$

其中
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$$

则称$w=f(z)$在z点可微，Δw的线性部分

$A(z)\Delta z$称为函数w在z点的微分，记作

$$\mathrm{d}w=A(z)\mathrm{d}z \qquad \text{约定}\mathrm{d}z=\Delta z$$

微分：定义

若函数$w=f(z)$在z点的改变量

$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$可以写成

$$\Delta w=A(z)\Delta z+\rho(\Delta z)$$

其中
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$$

则称$w=f(z)$在z点可微，Δw的线性部分

$A(z)\Delta z$称为函数w在z点的微分，记作

$$\mathrm{d}w=A(z)\mathrm{d}z \qquad 约定\mathrm{d}z=\Delta z$$

微商

可以证明，若函数$w=f(z)$在z点可导，则一定在该点可微，反之亦然；并且$A(z)=f'(z)$，即

$$\mathrm{d}w=f'(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{或} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=f'(z)$$

因此导数也称作微商

微商

可以证明，若函数$w=f(z)$在z点可导，则一定在该点可微，反之亦然；并且$A(z)=f'(z)$，即

$$\mathrm{d}w=f'(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{或} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=f'(z)$$

因此导数也称作微商

微商

可以证明，若函数$w=f(z)$在z点可导，则一定在该点可微，反之亦然；并且$A(z)=f'(z)$，即

$$\mathrm{d}w = f'(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{或} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f'(z)$$

因此导数也称作微商

微商

可以证明，若函数$w=f(z)$在z点可导，则一定在该点可微，反之亦然；并且$A(z)=f'(z)$，即

$$\mathrm{d}w = f'(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{或} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f'(z)$$

因此导数也称作微商

评述

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

- 所谓$\lim\limits_{\Delta z \to 0}(\Delta w/\Delta z)$存在，意味着$\Delta z$以任意方式趋于0时，$\Delta w/\Delta z$都趋于同样的有限值
- 反之，若当Δz以不同方式趋于0，$\Delta w/\Delta z$趋于不同的值，则$\lim\limits_{\Delta z \to 0}(\Delta w/\Delta z)$不存在
- 特别是，考虑$\Delta z \to 0$的两种独立方式，就可以得到函数可导的必要条件

评述

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

- 所谓 $\lim\limits_{\Delta z \to 0}(\Delta w/\Delta z)$存在，意味着$\Delta z$以任意方式趋于0时，$\Delta w/\Delta z$都趋于同样的有限值
- 反之，若当Δz以不同方式趋于0，$\Delta w/\Delta z$趋于不同的值，则 $\lim\limits_{\Delta z \to 0}(\Delta w/\Delta z)$不存在
- 特别是，考虑$\Delta z \to 0$的两种独立方式，就可以得到函数可导的必要条件

评述

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

- 所谓$\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z)$存在， 意味着$\Delta z$以任意方式趋于0时，$\Delta w/\Delta z$都趋于同样的有限值
- 反之，若当Δz以不同方式趋于0， $\Delta w/\Delta z$趋于不同的值，则$\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z)$不存在
- 特别是，考虑$\Delta z \to 0$的两种独立方式，就可以得到函数可导的必要条件

评述

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

- 所谓 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z)$存在， 意味着$\Delta z$以任意方式趋于0时，$\Delta w/\Delta z$都趋于同样的有限值
- 反之，若当Δz以不同方式趋于0， $\Delta w/\Delta z$趋于不同的值，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z)$不存在
- 特别是，考虑$\Delta z \to 0$的两种独立方式，就可以得到函数可导的必要条件

$\Delta x \to 0, \quad \Delta y = 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Delta x = 0, \quad \Delta y \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Delta x \to 0,\ \ \Delta y = 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Delta x = 0,\ \ \Delta y \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Delta x \to 0,\ \Delta y = 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Delta x = 0,\ \Delta y \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- Cauchy-Riemann方程是函数可导的必要条件
- 但不是充分条件
- 可以证明，若$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$的实部$u(x, y)$和虚部$v(x, y)$均可微[1]，且满足Cauchy-Riemann方程，则函数$f(z)$可导

[1] 即四个偏导数$\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$和$\partial v/\partial y$存在且连续

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- Cauchy-Riemann方程是函数可导的必要条件
- 但不是充分条件
- 可以证明，若$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部$u(x, y)$和虚部$v(x, y)$均可微[1]，且满足Cauchy-Riemann方程，则函数$f(z)$可导

[1] 即四个偏导数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$和$\partial v/\partial y$存在且连续

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- Cauchy-Riemann方程是函数可导的必要条件
- 但不是充分条件
- 可以证明，若$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部$u(x, y)$和虚部$v(x, y)$均可微[1]，且满足Cauchy-Riemann方程，则函数$f(z)$可导

[1] 即四个偏导数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$和$\partial v/\partial y$存在且连续

Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- Cauchy-Riemann方程是函数可导的必要条件
- 但不是充分条件
- 可以证明，若$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 的实部$u(x, y)$和虚部$v(x, y)$均可微[1]，且满足Cauchy-Riemann方程，则函数$f(z)$可导

[1] 即四个偏导数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$和$\partial v/\partial y$存在且连续

评述

和实数情形一样

- 如果函数$f(z)$在z点可导，则在z点必连续
- 但是函数在某点连续，并不能推出函数在该点可导
- 甚至有这样的情况：函数在某区域内处处连续，却处处不可导

评述

和实数情形一样

- 如果函数$f(z)$在z点可导，则在z点必连续
- 但是函数在某点连续，并不能推出函数在该点可导
- 甚至有这样的情况：函数在某区域内处处连续，却处处不可导

评述

和实数情形一样

- 如果函数$f(z)$在z点可导，则在z点必连续
- 但是函数在某点连续，并不能推出函数在该点可导
- 甚至有这样的情况：函数在某区域内处处连续，却处处不可导

评述

- 导数的定义在形式上和实数中一样，只是把自变量x换成了z
- 因此，高等数学中的各种求导数的公式都可以搬用到复数中来
- 例如

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

评述

- 导数的定义在形式上和实数中一样，只是把自变量x换成了z
- 因此，高等数学中的各种求导数的公式都可以搬用到复数中来
- 例如

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

评述

- 导数的定义在形式上和实数中一样，只是把自变量x换成了z
- 因此，高等数学中的各种求导数的公式都可以搬用到复数中来
- 例如

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

讲授要点

1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

解析函数

在区域G内每一点都可导的函数，称为G内的解析函数

☞ 在数学书籍中常把解析(analytic)称作“全纯”(holomorphic)

☞ 更早的文献中使用过的同义语还有“homodromic”(单值)、“monogenic”(单演)、“regular”(正则)和“synetic”等．这些术语原来都是用来分别描写解析函数的某个特性，后来才认识到它们互相等价，因而很少再用

解析函数

在区域G内每一点都可导的函数，称为G内的解析函数

- 在数学书籍中常把解析(analytic)称作“全纯”(holomorphic)
- 更早的文献中使用过的同义语还有“homodromic”(单值)、“monogenic”(单演)、“regular”(正则)和“synetic”等．这些术语原来都是用来分别描写解析函数的某个特性，后来才认识到它们互相等价，因而很少再用

解析函数

在区域G内每一点都可导的函数，称为G内的解析函数

☞ 在数学书籍中常把解析(analytic)称作“全纯”(holomorphic)

☞ 更早的文献中使用过的同义语还有“homodromic”(单值)、“monogenic”(单演)、“regular”(正则)和“synetic”等．这些术语原来都是用来分别描写解析函数的某个特性，后来才认识到它们互相等价，因而很少再用

函数$w = f(z)$在G内解析的必要条件

在G内处处满足Cauchy-Riemann方程

- 1814年，Cauchy在讨论(实的)二重积分换序时得到了Cauchy-Riemann方程，然而他并没有把这些方程看成是(复)函数论的基础
- Riemann是认识到$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$的存在性是指 必须对于$\Delta z \to 0$的任意方式$\Delta w/\Delta z$都趋于同一值的第一人． 他认识到函数$f(z) = u + \mathrm{i}v$在一点及其邻域解析，如果它连续可微并且满足Cauchy-Riemann方程
- 其实所谓的Cauchy-Riemann方程，更早就曾经出现在d'Alembert关于流体理论的著作中(1752年)
- 在Euler(1777年)和Lagrange的著作中也出现过

函数$w = f(z)$在G内解析的必要条件

在G内处处满足Cauchy-Riemann方程

- 1814年，Cauchy在讨论(实的)二重积分换序时得到了Cauchy-Riemann方程，然而他并没有把这些方程看成是(复)函数论的基础
- Riemann是认识到dw/dz的存在性是指 必须对于$\Delta z \to 0$的任意方式$\Delta w/\Delta z$都趋于同一值的第一人．他认识到函数$f(z) = u + iv$在一点及其邻域解析，如果它连续可微并且满足Cauchy-Riemann方程
- 其实所谓的Cauchy-Riemann方程，更早就曾经出现在d'Alembert关于流体理论的著作中(1752年)
- 在Euler(1777年)和Lagrange的著作中也出现过

函数$w = f(z)$在G内解析的必要条件

在G内处处满足Cauchy-Riemann方程

- 1814年，Cauchy在讨论(实的)二重积分换序时得到了Cauchy-Riemann方程，然而他并没有把这些方程看成是(复)函数论的基础
- Riemann是认识到$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$的存在性是指 必须对于$\Delta z \to 0$的任意方式$\Delta w/\Delta z$都趋于同一值的第一人． 他认识到函数$f(z) = u + \mathrm{i}v$在一点及其邻域解析，如果它连续可微并且满足Cauchy-Riemann方程
- 其实所谓的Cauchy-Riemann方程，更早就曾经出现在d'Alembert关于流体理论的著作中(1752年)
- 在Euler(1777年)和Lagrange的著作中也出现过

函数$w=f(z)$在G内解析的必要条件

在G内处处满足Cauchy-Riemann方程

- 1814年，Cauchy在讨论(实的)二重积分换序时得到了Cauchy-Riemann方程，然而他并没有把这些方程看成是(复)函数论的基础
- Riemann是认识到$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$的存在性是指 必须对于$\Delta z\to 0$的任意方式$\Delta w/\Delta z$都趋于同一值的第一人． 他认识到函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在一点及其邻域解析，如果它连续可微并且满足Cauchy-Riemann方程
- 其实所谓的Cauchy-Riemann方程，更早就曾经出现在d'Alembert关于流体理论的著作中(1752年)
- 在Euler(1777年)和Lagrange的著作中也出现过

函数$w=f(z)$在G内解析的必要条件

在G内处处满足Cauchy-Riemann方程

- 1814年，Cauchy在讨论(实的)二重积分换序时得到了Cauchy-Riemann方程，然而他并没有把这些方程看成是(复)函数论的基础
- Riemann是认识到$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$的存在性是指 必须对于$\Delta z\to 0$的任意方式$\Delta w/\Delta z$都趋于同一值的第一人． 他认识到函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在一点及其邻域解析，如果它连续可微并且满足Cauchy-Riemann方程
- 其实所谓的Cauchy-Riemann方程，更早就曾经出现在d'Alembert关于流体理论的著作中(1752年)
- 在Euler(1777年)和Lagrange的著作中也出现过

- 解析函数的实部和虚部不是独立的
- Cauchy-Riemann方程反映了解析函数的实部与虚部之间的联系
- 例如，因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

是全微分，因此，由解析函数的实部 $u(x, y)$，通过积分

$$\int^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \right)$$

可以唯一地(可差一个可加常数)确定虚部 $v(x, y)$

- 解析函数的实部和虚部不是独立的
- Cauchy-Riemann方程反映了解析函数的实部与虚部之间的联系
- 例如，因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

是全微分，因此，由解析函数的实部 $u(x, y)$，通过积分

$$\int^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)$$

可以唯一地(可差一个可加常数)确定虚部 $v(x, y)$

- 解析函数的实部和虚部不是独立的
- Cauchy-Riemann方程反映了解析函数的实部与虚部之间的联系
- 例如，因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

是全微分，因此，由解析函数的实部 $u(x,y)$，通过积分

$$\int^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)$$

可以唯一地(可差一个可加常数)确定虚部 $v(x,y)$

举例

例2.1　已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

解：
$$\begin{aligned}\mathrm{d}v &= -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\\ &= 2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

$\therefore\quad v=2xy+C$

$$f(z)=(x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy+C)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1　已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

解：
$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$
$$=2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$

$\therefore\quad v=2xy+C$

$$f(z)=(x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy+C)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1 已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

解：
$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$
$$=2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$

$\therefore \quad v=2xy+C$

$$f(z)=(x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy+C)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1 已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

解：
$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$
$$=2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$

$\therefore\quad v=2xy+C$

$$f(z)=(x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy+C)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1 已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

解：
$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$
$$=2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$$

$\therefore\quad v=2xy+C$

$$f(z)=(x^2-y^2)+\mathrm{i}(2xy+C)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1　已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

解：
$$\mathrm{d}v = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$
$$= 2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$$

$\therefore \quad v = 2xy + C$

$$f(z) = (x^2-y^2) + \mathrm{i}(2xy+C) = z^2 + \mathrm{i}C$$

举例

例2.1　已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

【别解】 $x=\dfrac{z+z^*}{2}\qquad y=\dfrac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$

$$u(x,y)=\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2-\left(\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[z^2+\left(z^2\right)^*\right]$$

$$\therefore\quad f(z)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1 已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

【别解】 $x=\dfrac{z+z^*}{2}$ $y=\dfrac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$

$$u(x,y)=\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2-\left(\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[z^2+\left(z^2\right)^*\right]$$

$\therefore$ $f(z)=z^2+\mathrm{i}C$

举例

例2.1 已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

【别解】 $$x=\frac{z+z^*}{2} \qquad y=\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$$

$$u(x,y)=\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2-\left(\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[z^2+\left(z^2\right)^*\right]$$

$$\therefore \quad f(z)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1 已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

【别解】 $$x=\frac{z+z^*}{2}\qquad y=\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$$

$$u(x,y)=\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2-\left(\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[z^2+\left(z^2\right)^*\right]$$

$$\therefore\quad f(z)=z^2+\mathrm{i}C$$

举例

例2.1　已知$u(x,y)=x^2-y^2$，求$f(z)$

【别解】 $$x=\frac{z+z^*}{2}\qquad y=\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}$$

$$u(x,y)=\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2-\left(\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[z^2+\left(z^2\right)^*\right]$$

$$\therefore\qquad f(z)=z^2+\mathrm{i}C$$

思考题

- 如何由解析函数的虚部求实部(或整个解析函数)?
- 如何由解析函数的实部(或虚部)求解析函数导数?

思考题

- 如何由解析函数的虚部求实部(或整个解析函数)?
- 如何由解析函数的实部(或虚部)求解析函数导数?

解析函数的几何表现

在平面上作一族曲线，$u(x,y)=$ 常数，则这一族曲线的切线的方向矢量便是 $(\partial u/\partial y, -\partial u/\partial x)$

同样，再作一族曲线，$v(x,y)=$ 常数，它们的切线的方向矢量当然也就是 $(\partial v/\partial y, -\partial v/\partial x)$

由Cauchy-Riemann方程，可以求得这两族方向矢量之间的标积

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$\therefore$ 这两族曲线互相正交

解析函数的几何表现

在平面上作一族曲线，$u(x, y) =$ 常数，则这一族曲线的切线的方向矢量便是 $(\partial u/\partial y, -\partial u/\partial x)$

同样，再作一族曲线，$v(x, y) =$ 常数，它们的切线的方向矢量当然也就是 $(\partial v/\partial y, -\partial v/\partial x)$

由Cauchy-Riemann方程，可以求得这两族方向矢量之间的标积

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$\therefore$ 这两族曲线互相正交

解析函数的几何表现

在平面上作一族曲线，$u(x,y)=$ 常数，则这一族曲线的切线的方向矢量便是 $(\partial u/\partial y, -\partial u/\partial x)$

同样，再作一族曲线，$v(x,y)=$ 常数，它们的切线的方向矢量当然也就是 $(\partial v/\partial y, -\partial v/\partial x)$

由Cauchy-Riemann方程，可以求得这两族方向矢量之间的标积

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\begin{array}{c}\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$\therefore$ 这两族曲线互相正交

解析函数的几何表现

在平面上作一族曲线，$u(x,y)=$ 常数，则这一族曲线的切线的方向矢量便是 $(\partial u/\partial y, -\partial u/\partial x)$

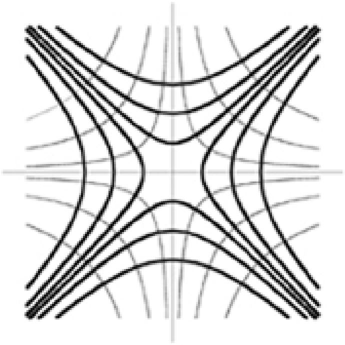
同样，再作一族曲线，$v(x,y)=$ 常数，它们的切线的方向矢量当然也就是 $(\partial v/\partial y, -\partial v/\partial x)$

由Cauchy-Riemann方程，可以求得这两族方向矢量之间的标积

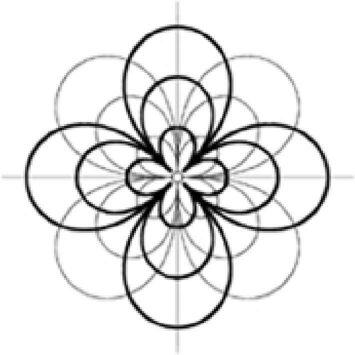
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$\therefore$ 这两族曲线互相正交

解析函数的几何表现



$w = z^2$



$w = 1/z^2$

粗实线表示实部$u(x,y)=$常数，灰线表示虚部$v(x,y)=$常数

任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部？

~~任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部？~~

任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部?

以后将证明，作为解析函数的实部和虚部, $u(x,y)$和$v(x,y)$，它们的二阶偏导数一定存在并且连续

因此，根据Cauchy-Riemann方程，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

所以$u(x,y)$和$v(x,y)$都必须满足二维Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

即解析函数的实部和虚部都必须是调和函数

任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部？

以后将证明，作为解析函数的实部和虚部, $u(x,y)$和$v(x,y)$，它们的二阶偏导数一定存在并且连续

因此，根据Cauchy-Riemann方程，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

所以$u(x,y)$和$v(x,y)$都必须满足二维Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

即解析函数的实部和虚部都必须是调和函数

任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部？

以后将证明，作为解析函数的实部和虚部，$u(x,y)$和$v(x,y)$，它们的二阶偏导数一定存在并且连续

因此，根据Cauchy-Riemann方程，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

所以$u(x,y)$和$v(x,y)$都必须满足二维Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

即解析函数的实部和虚部都必须是调和函数

任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部?

以后将证明，作为解析函数的实部和虚部, $u(x,y)$和$v(x,y)$，它们的二阶偏导数一定存在并且连续

因此，根据Cauchy-Riemann方程，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

所以$u(x,y)$和$v(x,y)$都必须满足二维Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

即解析函数的实部和虚部都必须是调和函数

任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部？

以后将证明，作为解析函数的实部和虚部，$u(x,y)$和$v(x,y)$，它们的二阶偏导数一定存在并且连续

因此，根据Cauchy-Riemann方程，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

所以$u(x,y)$和$v(x,y)$都必须满足二维Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

即解析函数的实部和虚部都必须是调和函数

小结

- 函数的解析性，是一个很高的要求，这表现为解析函数具有一系列的重要性质
- 讨论解析函数的各种特殊性质，是复变函数论的中心课题

小结

- 函数的解析性，是一个很高的要求，这表现为解析函数具有一系列的重要性质
- 讨论解析函数的各种特殊性质，是复变函数论的中心课题

小结

- 函数的解析性，总是和一定的区域联系在一起
- “函数在某点解析”，应理解为函数在该点及其邻域内处处可导
- “函数在闭区域内解析”，应理解为函数在闭区域内每一点及其邻域内处处可导

小结

- 函数的解析性，总是和一定的区域联系在一起
- “函数在某点解析”，应理解为函数在该点及其邻域内处处可导
- “函数在闭区域内解析”，应理解为函数在闭区域内每一点及其邻域内处处可导

小结

- 函数的解析性，总是和一定的区域联系在一起
- “函数在某点解析”，应理解为函数在该点及其邻域内处处可导
- “函数在闭区域内解析”，应理解为函数在闭区域内每一点及其邻域内处处可导

小结

如果一个函数

- 在某点z_0无定义
- 或者在z_0虽有定义但不可导
- 或者在z_0虽可导但不解析

则z_0称为函数的奇点

例如，$z = 0$就是函数$w = 1/z$的奇点

如果要讨论函数$f(z)$在$z = \infty$点是否解析，则需作变换$t = 1/z$，然后讨论函数$f(1/t)$在$t = 0$点是否解析即可

小结

如果一个函数

- 在某点z_0无定义
- 或者在z_0虽有定义但不可导
- 或者在z_0虽可导但不解析

则z_0称为函数的奇点

例如，$z = 0$就是函数$w = 1/z$的奇点

如果要讨论函数$f(z)$在$z = \infty$点是否解析，则需作变换$t = 1/z$，然后讨论函数$f(1/t)$在$t = 0$点是否解析即可

小结

如果一个函数

- 在某点z_0无定义
- 或者在z_0虽有定义但不可导
- 或者在z_0虽可导但不解析

则z_0称为函数的奇点

例如，$z = 0$就是函数$w = 1/z$的奇点

如果要讨论函数$f(z)$在$z = \infty$点是否解析，则需作变换$t = 1/z$，然后讨论函数$f(1/t)$在$t = 0$点是否解析即可

小结

如果一个函数

- 在某点z_0无定义
- 或者在z_0虽有定义但不可导
- 或者在z_0虽可导但不解析

则z_0称为函数的奇点

例如，$z=0$就是函数$w=1/z$的奇点

如果要讨论函数$f(z)$在$z=\infty$点是否解析，则需作变换$t=1/z$，然后讨论函数$f(1/t)$在$t=0$点是否解析即可

小结

如果一个函数

- 在某点z_0无定义
- 或者在z_0虽有定义但不可导
- 或者在z_0虽可导但不解析

则z_0称为函数的奇点

例如，$z = 0$就是函数$w = 1/z$的奇点

如果要讨论函数$f(z)$在$z = \infty$点是否解析，则需作变换$t = 1/z$，然后讨论函数$f(1/t)$在$t = 0$点是否解析即可

小结

如果一个函数

- 在某点z_0无定义
- 或者在z_0虽有定义但不可导
- 或者在z_0虽可导但不解析

则z_0称为函数的奇点

例如，$z = 0$就是函数$w = 1/z$的奇点

如果要讨论函数$f(z)$在$z = \infty$点是否解析，则需作变换$t = 1/z$，然后讨论函数$f(1/t)$在$t = 0$点是否解析即可

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- ···

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- ⋯

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- $\cdots$

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- · · ·

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- $\cdots$

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- $\cdots$

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- $\cdots$

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- $\cdots$

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- $\cdots$

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

常见的初等函数有

- 幂函数
- 指数函数
- 三角函数
- 双曲函数
- $\cdots$

它们都是相应实函数在复数域中的推广

☞ 学习时要注意

- 如何将相应实函数推广到复数域
- 这些函数的解析性
- 这些函数作为复变函数所特有的性质

讲授要点

1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

幂函数z^n

- 当$n=0,1,2,\cdots$时，z^n在全平面解析，且当$n=1,2,\cdots$时，$z=\infty$是奇点
- 当$n=-1,-2,-3,\cdots$时，z^n除$z=0$外处处解析，在$z=\infty$也解析

$$(z^n)'=nz^{n-1}$$

还可以进一步定义(n次)多项式(函数)

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

和有理函数$R(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，其中$P_n(z)$和$Q_m(z)$分别是$n$次和$m$次多项式

幂函数z^n

- 当$n = 0, 1, 2, \cdots$时，z^n在全平面解析，且当$n = 1, 2, \cdots$时，$z = \infty$是奇点
- 当$n = -1, -2, -3, \cdots$时，z^n除$z = 0$外处处解析，在$z = \infty$也解析

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

还可以进一步定义(n次)多项式(函数)

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

和有理函数$R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，其中$P_n(z)$和$Q_m(z)$分别是$n$次和$m$次多项式

幂函数z^n

- 当$n = 0, 1, 2, \cdots$时，z^n在全平面解析，且当$n = 1, 2, \cdots$时，$z = \infty$是奇点
- 当$n = -1, -2, -3, \cdots$时，z^n除$z = 0$外处处解析，在$z = \infty$也解析

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

还可以进一步定义(n次)多项式(函数)

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

和有理函数$R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，其中$P_n(z)$和$Q_m(z)$分别是$n$次和$m$次多项式

幂函数z^n

- 当$n=0,1,2,\cdots$时，z^n在全平面解析，且当$n=1,2,\cdots$时，$z=\infty$是奇点
- 当$n=-1,-2,-3,\cdots$时，z^n除$z=0$外处处解析，在$z=\infty$也解析

$$(z^n)'=nz^{n-1}$$

还可以进一步定义(n次)多项式(函数)

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

和有理函数$R(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，其中$P_n(z)$和$Q_m(z)$分别是$n$次和$m$次多项式

幂函数z^n

- 当$n=0,1,2,\cdots$时，z^n在全平面解析，且当$n=1,2,\cdots$时，$z=\infty$是奇点
- 当$n=-1,-2,-3,\cdots$时，z^n除$z=0$外处处解析，在$z=\infty$也解析

$$(z^n)'=nz^{n-1}$$

还可以进一步定义(n次)多项式(函数)

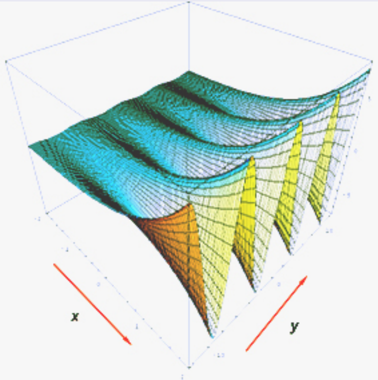
$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

和有理函数$R(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，其中$P_n(z)$和$Q_m(z)$分别是$n$次和$m$次多项式

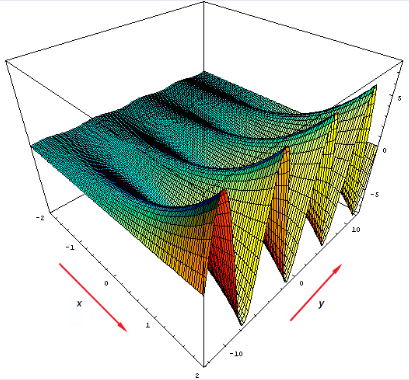
讲授要点

1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

指数函数$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

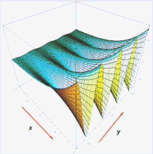


指数函数实部$e^x \cos y$

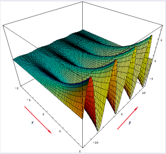


指数函数虚部$e^x \sin y$

指数函数$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$



$e^x \cos y$



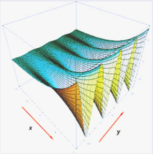
$e^x \sin y$

- $e^{2\pi i} = 1$
- “指数函数相乘等于指数相加”，对于复指数函数仍然成立

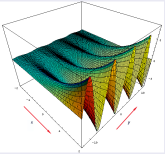
$$\begin{aligned} e^{z_1}\cdot e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1}\cdot e^{x_2+iy_2} \\ &= e^{x_1}\cdot e^{x_2}\cdot e^{iy_1}\cdot e^{iy_2} \\ &= e^{x_1+x_2}\cdot e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

- e^z在全平面解析，$(e^z)' = e^z$

指数函数$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$



$e^x\cos y$



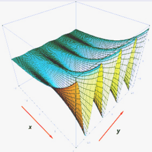
$e^x\sin y$

- $e^{2\pi i} = 1$
- “指数函数相乘等于指数相加”，对于复指数函数仍然成立

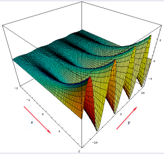
$$
\begin{aligned}
e^{z_1}\cdot e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1}\cdot e^{x_2+iy_2} \\
&= e^{x_1}\cdot e^{x_2}\cdot e^{iy_1}\cdot e^{iy_2} \\
&= e^{x_1+x_2}\cdot e^{i(y_1+y_2)} \\
&= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}
\end{aligned}
$$

- e^z在全平面解析，$(e^z)' = e^z$

指数函数$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$



$e^x \cos y$



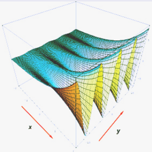
$e^x \sin y$

- $e^{2\pi i} = 1$
- "指数函数相乘等于指数相加"，对于复指数函数仍然成立

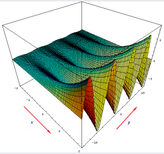
$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} \\ &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

- e^z在全平面解析，$(e^z)' = e^z$

指数函数$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$



$\mathrm{e}^x \cos y$



$\mathrm{e}^x \sin y$

复指数函数的特有性质

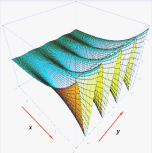
- 复指数函数是周期函数，周期为$2\pi\mathrm{i}$

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}(y+2\pi)} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^z$$

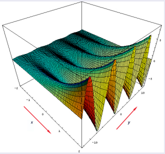
- e^z在无穷远点无定义

  例如，当z沿正实轴、负实轴或虚轴趋于∞时，e^z逼近不同的值．所以$z=\infty$是指数函数e^z的奇点

指数函数$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$



$e^x \cos y$



$e^x \sin y$

复指数函数的特有性质

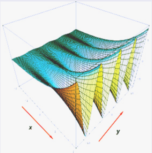
- 复指数函数是周期函数，周期为$2\pi i$

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} \\ &= e^{x+iy}e^{2\pi i} \\ &= e^{x+iy} = e^z \end{aligned}$$

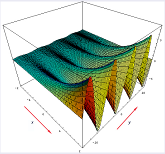
- e^z在无穷远点无定义

例如，当z沿正实轴、负实轴或虚轴趋于∞时，e^z逼近不同的值．所以$z=\infty$是指数函数e^z的奇点

指数函数$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$



$e^x \cos y$



$e^x \sin y$

复指数函数的特有性质

- 复指数函数是周期函数，周期为$2\pi i$

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} \\ &= e^{x+iy}e^{2\pi i} \\ &= e^{x+iy} = e^z \end{aligned}$$

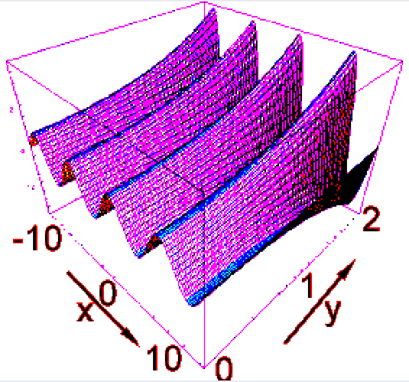
- e^z在无穷远点无定义
  例如，当z沿正实轴、负实轴或虚轴趋于∞时，e^z逼近不同的值．所以$z=\infty$是指数函数e^z的奇点

讲授要点

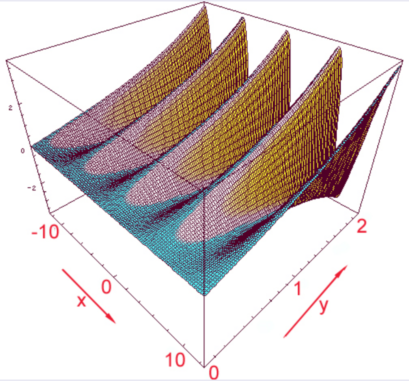
1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right]$$



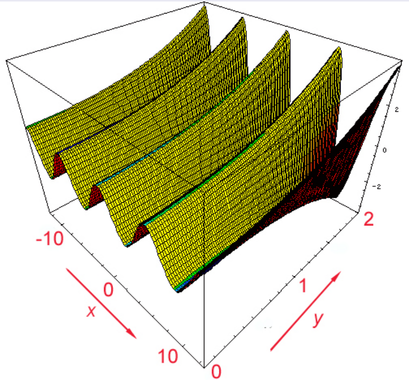
正弦函数实部



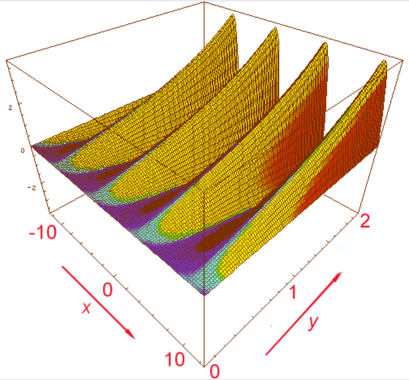
正弦函数虚部

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right]$$



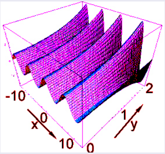
余弦函数实部



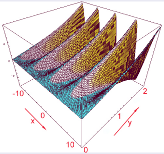
余弦函数虚部

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

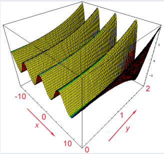
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left[e^{iz} - e^{-iz}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right]$$



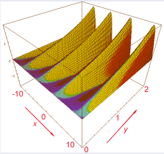
正弦函数实部



正弦函数虚部



余弦函数实部



余弦函数虚部

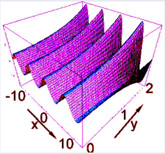
- $\sin z, \cos z$在全平面解析

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

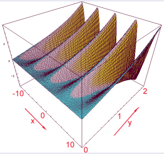
- $z=\infty$是它们的唯一奇点
- $\sin z$和$\cos z$都是周期函数，周期为2π

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

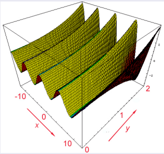
$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right]$$



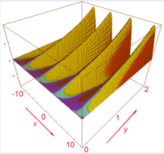
正弦函数实部



正弦函数虚部



余弦函数实部



余弦函数虚部

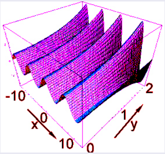
- $\sin z$, $\cos z$在全平面解析

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

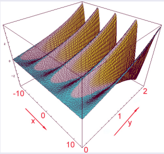
- $z = \infty$是它们的唯一奇点
- $\sin z$和$\cos z$都是周期函数，周期为2π

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

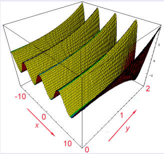
$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right]$$



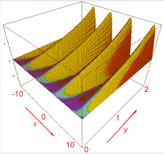
正弦函数实部



正弦函数虚部



余弦函数实部



余弦函数虚部

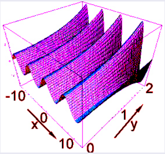
- $\sin z$, $\cos z$在全平面解析

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

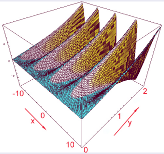
- $z = \infty$是它们的唯一奇点
- $\sin z$和$\cos z$都是周期函数，周期为2π

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

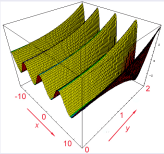
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left[e^{iz} - e^{-iz}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right]$$



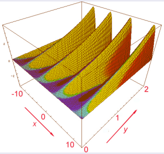
正弦函数实部



正弦函数虚部



余弦函数实部



余弦函数虚部

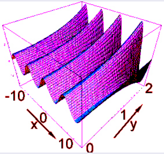
- $\sin z$, $\cos z$在全平面解析

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

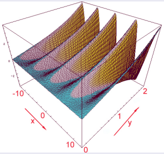
- $z = \infty$是它们的唯一奇点
- $\sin z$和$\cos z$都是周期函数，周期为2π

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

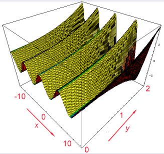
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left[e^{iz} - e^{-iz}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right]$$



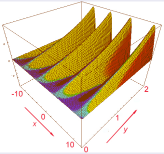
正弦函数实部



正弦函数虚部



余弦函数实部



余弦函数虚部

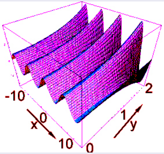
- $\sin z$和$\cos z$的模可以大于1

$$i \sin i = \frac{1}{2}\left[e^{-1} - e^{1}\right] = -1.1752012\cdots$$

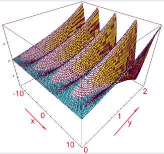
$$\cos i = \frac{1}{2}\left[e^{-1} + e^{1}\right] = 1.5430806\cdots$$

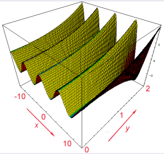
三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

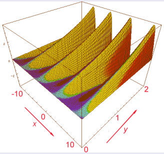
$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right]$$



正弦函数实部


正弦函数虚部


余弦函数实部


余弦函数虚部

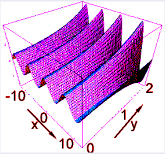
- 其他三角函数，$\tan z, \cot z, \sec z, \csc z$可以用$\sin z$和$\cos z$定义，形式和实数时一样

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

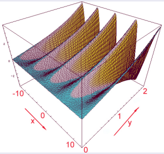
- 根据这些定义，容易证明，实三角函数的各种恒等式对于复三角函数仍然成立

三角函数$\sin z, \cos z, \cdots$

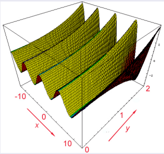
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left[e^{iz} - e^{-iz}\right] \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right]$$



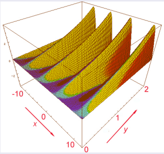
正弦函数实部



正弦函数虚部



余弦函数实部



余弦函数虚部

- 其他三角函数，$\tan z, \cot z, \sec z, \csc z$可以用$\sin z$和$\cos z$定义，形式和实数时一样

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

- 根据这些定义，容易证明，实三角函数的各种恒等式对于复三角函数仍然成立

讲授要点

1. 解析函数
   - 可导与可微
   - 函数的解析性
2. 初等函数
   - 幂函数
   - 指数函数
   - 三角函数
   - 双曲函数

双曲函数$\sinh z, \cosh z, \cdots$

$\sinh z, \cosh z$也是通过复指数函数定义的

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right] \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right]$$

其它双曲函数

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

双曲函数$\sinh z, \cosh z, \cdots$

$\sinh z, \cosh z$也是通过复指数函数定义的

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left[e^z - e^{-z}\right] \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left[e^z + e^{-z}\right]$$

其它双曲函数

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

双曲函数$\sinh z, \cosh z, \cdots$

- 双曲函数和三角函数可以互化
  $$\sinh z = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z \qquad \cosh z = \cos \mathrm{i}z$$
  $$\tanh z = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z \qquad \cdots\cdots$$
  因此，双曲函数的性质完全可以由三角函数推出
- 周期性：双曲函数$\sinh z, \cosh z$的周期是$2\pi\mathrm{i}$
- 导数公式
  $$(\sinh z)' = \cosh z \qquad (\cosh z)' = \sinh z$$
  $$(\tanh z)' = \mathrm{sech}^2 z$$

双曲函数$\sinh z, \cosh z, \cdots$

- 双曲函数和三角函数可以互化
  $$\sinh z = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z \qquad \cosh z = \cos \mathrm{i}z$$
  $$\tanh z = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z \qquad \cdots\cdots$$
  因此，双曲函数的性质完全可以由三角函数推出
- 周期性：双曲函数$\sinh z, \cosh z$的周期是$2\pi\mathrm{i}$
- 导数公式
  $$(\sinh z)' = \cosh z \qquad (\cosh z)' = \sinh z$$
  $$(\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z$$

双曲函数$\sinh z, \cosh z, \cdots$

- 双曲函数和三角函数可以互化
  $$\sinh z = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z \qquad \cosh z = \cos \mathrm{i}z$$
  $$\tanh z = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z \qquad \cdots\cdots$$
  因此，双曲函数的性质完全可以由三角函数推出
- 周期性：双曲函数$\sinh z, \cosh z$的周期是$2\pi\mathrm{i}$
- 导数公式
  $$(\sinh z)' = \cosh z \qquad (\cosh z)' = \sinh z$$
  $$(\tanh z)' = \mathrm{sech}^2 z$$