

第二部 分
数 学 物 理 方 程

Wu Chong-shi

第十二章 数学物理方程和定解条件



图 12.1

1. 一长为 l 、横截面积为 S 的均匀弹性杆, 已知一端 ($x = 0$) 固定, 另一端 ($x = l$) 在杆轴方向上受拉力 F 作用而得到平衡 (见图 12.1). 在 $t = 0$ 时, 撤去外力 F . 试列出杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件.

2. 在铀块中, 除了中子的扩散运动外, 还存在中子的吸收和增殖过程. 设在单位时间内、单位体积中吸收和增殖的中子数均正比于该时刻、该处的中子浓度 $u(\mathbf{r}, t)$, 因而净增中子数可表为 $\alpha u(\mathbf{r}, t)$, α 为比例常数. 试导出 $u(\mathbf{r}, t)$ 所满足的偏微分方程.

3. 有长为 l 的均匀细杆, 现通过其两端、在单位时间内、经单位面积分别供给热量 q_1 与 q_2 . 试写出相应的边界条件.

4. 有一半半径为 a 、表面涂黑的金属球, 暴晒于日光下 (见图 12.2), 在垂直于光线的单位面积上, 单位时间内吸收热量 M . 同时, 球面按 Newton 冷却定律散热 (不妨取周围介质的温度为 0). 试在适当的坐标系中写出边界条件.

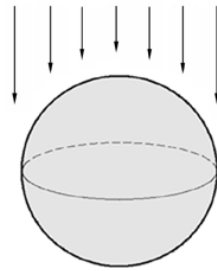


图 12.2

第十三章 线性偏微分方程的通解

1. 求下列线性齐次偏微分方程的通解:

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$(2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$(4) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad c \neq 0;$$

$$(5) (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad b \neq 0;$$

$$(6) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

2. 求下列线性非齐次偏微分方程的通解:

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + xy;$$

$$(2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy - x;$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y.$$

3. 求解偏微分方程:

$$(1) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 - y^2) \sin xy.$$

4. 求偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

的通解, 并进一步求出它在初始条件

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)$$

下的解.

第十四章 分离变量法

1. 长为 l 、两端固定的均匀弦, 初始时, 弦被拉开如图 14.1, 达到平衡后突然放手. 求解此问题.

2. 长为 $2l$ 的均匀杆, 两端受力作用而分别压缩了 αl . $t = 0$ 时撤去外力. 求解此杆的纵振动问题.

3. 求解细杆的导热问题. 杆长 l , 两端 ($x = 0, l$) 均保持为零度, 初始温度分布为 $u|_{t=0} = b \frac{x(l-x)}{l^2}$.

4. 一均匀各向同性的弹性薄膜, $0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l$, 四周夹紧. 初始位移为 $Axy(l-x)(l-y)$, 初始速度为 0. 求解膜的横振动.

5. 求解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ u|_{x=0} &= u_0, \quad u|_{x=l} = u_0 y, \\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=b} = 0, \end{aligned}$$

其中为已知常数.

6. 求解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= bx(l-x), \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

7. 求解第十二章第 1 题.

8. 一细长杆, $x = 0$ 端固定, $x = l$ 端受周期力 $A \sin \omega t$ 作用. 求解此杆的纵振动问题. 设初位移和初速度均为 0.

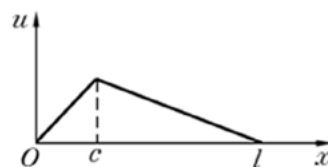


图 14.1

9. 在矩形区域 $0 \leq x \leq a, -b/2 \leq y \leq b/2$ 中求解:

$$(1) \nabla^2 u = -2,$$

$$(2) \nabla^2 u = -x^2 y,$$

u 在边界上的数值均为 0.

10. 试求下列定解问题之解:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u|_{x=0} = \cos \frac{\pi}{l} at, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{\pi}{l} x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin \frac{\pi}{2l} x.$$

11. 求解下列定解问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u|_{x=0} = A \exp\{-\alpha^2 \kappa t\}, \quad u|_{x=l} = B \exp\{-\beta^2 \kappa t\},$$

$$u|_{t=0} = 0.$$

12. 当层状铀块的厚度超过一定临界值时, 中子浓度将随时间而增高, 以致引起铀块爆炸. 这就是原子弹爆炸的基本过程. 试估计层状铀块的临界厚度. 中子浓度满足的偏微分方程见第十二章第 2 题, 假定边界条件为齐次的第二类边界条件.

第十五章 正交曲面坐标系

1. 一个半径为 a 的无穷长空心导体圆柱, 分成两半, 互相绝缘. 一半电势为 V , 另一半电势为 $-V$. 求柱内的电势分布.

2. 半径为 a 、表面熏黑的均匀金属圆柱, 平放在地上, 受到阳光照射, 在垂直于光线的单位面积上单位衰减内吸收热量为 M , 同时, 柱面按 Newton 冷却定律向外散热. 试求柱内的稳定温度分布. 取外界温度为 0, 并设圆柱为无穷长.

3. 求在环形区域 $a \leq r \leq b$ 内满足边界条件

$$u|_{r=a} = f(\phi), \quad u|_{r=b} = g(\phi)$$

的调和函数.

4. 在圆域 $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ 上求解:

$$(1) \begin{cases} \nabla^2 u = -4, \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \nabla^2 u = -4y, \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \nabla^2 u = -4xy, \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \nabla^2 u = -4(x+y), \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0. \end{cases}$$

5. 一个由理想导体做成的无穷长波导管, 其截面均匀, 如图 15.1 所示. 管内为真空. 假定一个平面 (即图中的一条直边) 的电势为 V , 其余面上的电势均为 0. 试求波导管内的电势分布.

6. 求解球内的定解问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0,$$

$$u|_{r=0} \text{ 有界}, \quad u|_{r=1} = A \exp \left\{ - (p\pi)^2 \kappa t \right\},$$

$$u|_{t=0} = 0.$$

$$\text{提示: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

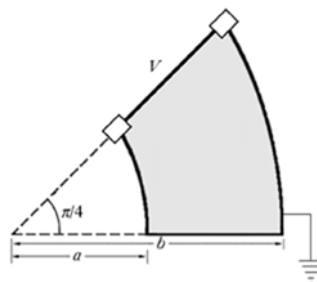


图 15.1

第十六章 球函数

(在下列各题中, k, l 均为自然数)

1. 证明:

$$\int_x^1 P_k(x) P_l(x) dx = (1-x^2) \frac{P'_k(x) P_l(x) - P'_l(x) P_k(x)}{k(k+1) - l(l+1)}, \quad k \neq l.$$

2. 计算积分

$$\int_{-1}^1 (1+x)^k P_l(x) dx,$$

注意分别讨论 $k \geq l$ 和 k, l 两种情形.

3. 计算下列积分:

$$(1) \int_{-1}^1 P_l(x) \ln(1-x) dx;$$

$$(2) \int_{-1}^1 P_l(x) (1-x)^{-\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

4. 从 Legendre 多项式的生成函数证明:

$$(1) P_l(-1/2) = \sum_{k=0}^{2l} P_k(-1/2) P_{2l-k}(1/2);$$

$$(2) P_l(\cos 2\theta) = \sum_{k=0}^{2l} (-)^k P_k(\cos \theta) P_{2l-k}(\cos \theta).$$

5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 P_k(x) P_l(x) dx;$$

$$(2) \int_{-1}^1 x P_l(x) P_{l+1}(x) dx;$$

$$(3) \int_{-1}^1 x^2 P_l(x) P_{l+2}(x) dx;$$

$$(4) \int_{-1}^1 [x P_l(x)]^2 dx;$$

6. 将下列定义在 $[-1, 1]$ 上的函数按 Legendre 多项式展开:

$$(1) f(x) = x^2;$$

$$(2) f(x) = \sqrt{1-2xt+t^2};$$

$$(3) f(x) = |x|;$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{2} [x + |x|].$$

7. 求解空心球壳内的定解问题:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & a < r < b, \\ u|_{r=a} &= u_0, & u|_{r=b} &= u_0 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

8. 求解球内的定解问题:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < a, 0 < \theta < \pi, \\ u|_{r=0} &\text{有界}, & u|_{r=a} &= u_0 \eta(\alpha - \theta). \end{aligned}$$

9. 求解第十二章第 4 题.

10. 一完全柔软的均匀细线, $x = 0$ 端固定在匀速转动的轴上, 角频率为 ω , 另一端 ($x = l$) 自由. 在重力可以忽略的条件下, 由于惯性离心力的作用, 此细线的平衡位置为水平线. 当此线相对于平衡位置作横振动时, 方程及定解条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(l^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= 0, \\ u|_{x=0} &= 0, & u|_{x=l} &\text{有界}, \\ u|_{t=0} &= \phi(x), & \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned}$$

试求解此定解问题.

11. 设有一半径为 a 的导体半球, 球面温度为常数 u_0 , 底面温度为 0. 求半球内的稳定温度分布.

12. 有一半径为 b 的接地导体球壳, 内部放有一个圆环, 环的半径为 a , 环心与球心重合, 环上均匀带电, 总电量为 Q . 求球内的电势分布.

13. 将下列函数按球谐函数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ 展开:

$$(1) \sin^2 \theta \cos^2 \phi; \quad (2) (1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \phi.$$

14. 一半径为 a 的均匀导体球, 表面温度为:

$$(1) u|_{r=a} = P_1^1(\cos \theta) \cos \phi; \quad (2) u|_{r=a} = P_1(\cos \theta) \sin \theta \cos \phi.$$

试求出球内的稳定温度分布.

15. 求解球内问题:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= A + Br^2 \sin 2\theta \cos \phi, \\ u|_{r=a} &= 0, \end{aligned}$$

其中 A, B 为已知常数.

第十七章 柱函数

1. 证明:

$$(1) \cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \dots, \quad (2) x = 2[J_1 + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \dots];$$

$$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \dots;$$

$$(3) x^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 J_{2n}(x); \quad (4) J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1.$$

2. 将函数 $f(\theta) = \cos(x \sin \theta)$ 和 $g(\theta) = \sin(x \sin \theta)$ 展开为 Fourier 级数.

3. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^x x^{-n} J_{n+1}(x) dx;$$

$$(2) \int_0^a x^3 J_0(x) dx;$$

$$(3) \int_0^t J_0(\sqrt{x(t-x)}) dx;$$

$$(4) \int_0^t [\sqrt{x(t-x)}]^n J_n(\sqrt{x(t-x)}) dx.$$

4. 半径为 R 的圆形膜, 边缘固定, 初始形状呈旋转抛物面

$$u|_{t=0} = A \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

形, 初速为 0. 求解圆膜的横振动问题.

5. 求解下列定解问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] = 0,$$

$$u|_{r=0} \text{ 有界}, \quad u|_{r=a} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0 \sin 2\phi.$$

6. 一长为 π 、半径为 1 的圆柱形导体, 柱体的侧面和上下底面的温度均保持为 0, 初始时柱体内的温度分布为 $f(r) \sin z$, 求柱体内温度的分布与变化.

7. 一空心圆柱, 内半径为 a , 外半径为 b , 维持内外柱面的温度为 0. 又设柱体高 h , 上下底绝热, 初温为 u_0 , 求柱体内温度的分布与变化.

8. 半径为 R 的圆形膜, 边缘固定, 在单位质量上受周期力

$$(1) f(r, t) = A \sin \omega t, \quad (2) f(r, t) = A \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \sin \omega t$$

的作用, 求解圆膜的强迫振动, 设初位移与初速度均为 0.

9. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{1-x} \sin(a\sqrt{x}) dx, \quad a > 0;$$

$$(2) \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(\sqrt{bx}) dx, \quad a > 0, b \geq 0;$$

$$(3) \int_0^{\infty} e^{-ax} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx, \quad \nu > -1, a > 0, b > 0;$$

$$(4) \int_0^{\infty} \exp\{-a^2 x^2\} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx, \quad \nu > -1, a > 0, b > 0.$$

10. 一导体球, 半径为 a , 初温为常数 u_0 , 球面温度为 0 . 求球内温度的分布和变化.

11. 计算积分:

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-ax/2} \sin bx I_0\left(\frac{ax}{2}\right) dx, \int_0^{\infty} e^{-ax/2} \cos bx I_0\left(\frac{ax}{2}\right) dx, \quad \text{其中 } a > 0, b > 0;$$

$$(2) \int_0^{\infty} J_0(\alpha x) K_0(\beta x) x dx, \quad \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0.$$

12. 高为 h 、半径为 a 的圆柱体, 上下底保持温度为 0 , 而柱面温度为 $u_0 \sin \frac{2\pi}{h} z$, 求柱体内的稳定温度分布. 这里取定上下底所在的平面分别为 $z = h$ 和 $z = 0$.

13. 将下列函数在 $t = 0$ 的邻域内作 Taylor 展开:

$$(1) \frac{1}{z} \sin \sqrt{z^2 + 2zt}, \quad \text{规定 } \sqrt{z^2 + 2zt} \Big|_{t=0} = z;$$

$$(2) \frac{1}{z} \cos \sqrt{z^2 - 2zt}, \quad \text{规定 } \sqrt{z^2 - 2zt} \Big|_{t=0} = z;$$

$$(3) \frac{1}{z} \sinh \sqrt{z^2 - 2izt}, \quad \text{规定 } \sqrt{z^2 - 2izt} \Big|_{t=0} = z;$$

$$(4) \frac{1}{z} \cosh \sqrt{z^2 + 2izt}, \quad \text{规定 } \sqrt{z^2 + 2izt} \Big|_{t=0} = z.$$

14. 求长圆柱形和圆形铀块的临界半径.

第十八章 分离变量法总结

1. 将下列方程化为 Sturm-Liouville 型方程的标准形式:

$$(1) x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + (x + \lambda)y = 0; \quad (2) x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a-bx) \frac{dy}{dx} - \lambda y = 0;$$

$$(3) x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0; \quad (4) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2\lambda y = 0.$$

2. 求解本征值问题:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\lambda}{r^2} R = 0,$$

$$R(a) = 0, \quad R(b) = 0,$$

其中 $b > a > 0$.

3. 设有本征值问题

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)] y = 0,$$

$$y(b) = \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a),$$

$$y'(b) = \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a),$$

其中 $p(a) = p(b)$. 试证明, 当

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 1$$

时, 对应不同本征值的本征函数正交.

4. 设本征值问题

$$\nabla^2 \Phi + \lambda \Phi = 0,$$

$$\Phi|_{\Sigma} = 0$$

的解 (本征函数) 为 Φ_k , 对应的本征值为 λ_k , 这里的 k 是本征值的编号. 试证明: 当 $\lambda = 0$ 不是本征值时, Poisson 方程的第一类边值问题

$$\nabla^2 u = -f,$$

$$u|_{\Sigma} = 0$$

的解为

$$u = \sum_k \frac{A_k}{\lambda_k} \Phi_k,$$

A_k 是非齐次项 f 按 $\{\Phi_k\}$ 展开的系数,

$$f = \sum_k A_k \Phi_k.$$

这里假设 Φ_k 已归一化.

5. 用第 4 题的方法求解矩形区域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 内 Poisson 方程的定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y),$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

第十九章 积分变换

1. 用 Laplace 变换求解半无界问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, t > 0,$$

$$u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x \rightarrow \infty} \text{ 有界}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

2. 设有两个半无界杆, 温度分别为 0 和 u_0 , 在 $t = 0$ 时将两杆端点相接, 求 $t > 0$ 时杆中各点的温度分布.

3. 利用 Laplace 变换求解第十四章第 11 题.
4. 用 Fourier 变换方法求解一维无界弦上的强迫振动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x).$$

5. 用 Fourier 变换方法求解二维无界平面上的自由振动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0,$$

$$u|_{t=0} = \phi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x, y).$$

6. 一半无界弦 $x \geq 0$, 原处于平衡状态. 设在 $t > 0$ 时 $x = 0$ 端作微小振动 $A \sin \omega t$. 试求弦上各点的运动.

7. 电子光学中常遇到一种简单的静电透镜——等径双筒镜, 它的两极是两个无限接近的等径 (设为 a) 同轴长圆筒, 其电势分别为 V_0 和 $-V_0$. 求筒内的静电势.

提示: 先在边界条件 $u|_{r=a} = V_0 e^{-k|z|} \operatorname{sgn} z$ 下利用 Fourier 变换求解, 而后令 $k \rightarrow 0$.

第二十章 Green 函数解法

- (1) 用电像法求出球内 Laplace 方程第一类边值问题的 Green 函数 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$;
- (2) 求出边界面 (球面 $r = a$) 上各点的感生电荷密度 $\sigma(\theta, \phi)$;
- (3) 证明像电荷和感生电荷在球内完全等效;
- (4) 证明球内 Laplace 方程第一类边值问题

$$\nabla^2 u = 0,$$

$$u|_{r=a} = f(\theta, \phi)$$

的解是

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \frac{f(\theta', \phi')}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta' d\theta' \right] d\phi',$$

其中 ψ 是 $\mathbf{r}(r, \theta, \phi)$ 与 $\mathbf{r}'(r', \theta', \phi')$ 的夹角,

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

2. 一无穷长弦, $t = t_0$ 时在 $x = x_0$ 处受到瞬时的打击, 冲量为 I . 试求解弦的横振动, 设初位移和初速度均为 0.

3. 用 Green 函数方法解无界弦的横振动问题, 定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x).$$

4. 两端固定的弦, 长为 l . $t = t_0$ 时用细棒敲击弦上 $x = x_0$ 点, 使得该处获得冲量 I . 求解弦的横振动, 设初位移和初速度均为 0.
5. 用 Green 函数方法解第十四章第 6 题.
6. 用 20.5 节中求解三维无界空间波动方程 Green 函数的方法, 求热传导方程的 Green 函数.

第二十一章 变分法初步

1. 写出使下列泛函取极值的 Euler-Lagrange 方程, 并求解:

$$(1) \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y^2 y'^2} dx;$$

$$(2) \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2) dx;$$

$$(3) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x}{x + y'} dx;$$

$$(4) \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + x} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

规定极值曲线均通过平面上的已知点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) .

2. 求锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上的“短程线”(准确说, 称为测地线, Geodesic).

3. 求圆柱面上的测地线, 设圆柱的母线平行于 z 轴.

4. 光在折射率为 n 的介质中的传播速率为 $v = \frac{ds}{dt} = \frac{c}{n}$, c 是真空中速率, 于是光由 A 点 (x_0, y_0) 传播到 B 点 (x_1, y_1) 的时间便是

$$T = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} n ds.$$

Fermat 原理说, 光线由 A 到 B 的实际路径应当使 T 取极值. 试求光在下列介质中传播时的实际轨迹:

$$(1) n = k(x + 1);$$

$$(2) n = k\sqrt{y};$$

$$(3) n = \frac{k}{2x + 3};$$

$$(4) n = \frac{k}{y};$$

$$(5) n = ke^y;$$

$$(6) n = k\sqrt{x + y};$$

$$(7) n = kr^{-1/2};$$

$$(8) n = \frac{k}{r}.$$

其中 k 均为已知常数, $r^2 = x^2 + y^2$.

5. 试写出本征值问题

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0$$

所对应的泛函极值问题, 设 $\beta \neq 0$.

6. 用 Rayleigh-Ritz 方法求出

$$y'' + \lambda y = 0,$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

的最低的两个本征值的近似值, 取试探函数为:

$$(1) y = c_1(1 - x^2) + c_2x(1 - x^2); \quad (2) y = c_1(1 - x^2) + c_2x^2(1 - x^2).$$

第二十二章 数学物理方程综述

1. 讨论下列方程的类型, 并将它们化为标准形式:

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(4) (1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(5) \tan^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \tan x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$(6) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. 有些方程, 对未知函数作适当的变换后, 可以消去一阶偏导数项.

(1) 证明: 在变换

$$u(x, y) = e^{-(ax+by)} v(x, y)$$

下, 方程

$$\nabla^2 u + 2a \frac{\partial u}{\partial x} + 2b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

化为 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 v - (a^2 + b^2)v = 0,$$

其中 a, b 为常数;

(2) 寻求适当的变换, 使方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial x} + 2b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

在变换后不再含有一阶偏导数项;

(3) 设有方程

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = \frac{\partial u}{\partial t},$$

其中 a, b, c, d, e, f 为常数, 且 $b^2 - ac \neq 0$. 证明: 在变换

$$u(x, y, t) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma t} v(x, y, t)$$

下, 可使 $v(x, y, t)$ 满足方程

$$a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

3. 求解弦振动方程的 Goursat 问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u|_{x-at=0} = \phi(x), \quad u|_{x+at=0} = \psi(x),$$

其中 $\phi(x), \psi(x)$ 满足 $\phi(0) = \psi(0)$.

4. 在波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

中用 iy 代替 at , 我们就能得到 Laplace 方程的“初值”问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u|_{y=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \psi(x)$$

的形式解为

$$u = \frac{1}{2} [\phi(x + iy) + \phi(x - iy)] + \frac{1}{2i} \int_{x-iy}^{x+iy} \psi(\xi) d\xi.$$

(1) 令

$$\phi(x) = x, \quad \psi(x) = e^{-x},$$

则可得

$$u(x, y) = x + e^{-x} \sin y.$$

验证这个表达式处处满足 Laplace 方程, 也满足 $y = 0$ 时的“初始”条件;

(2) 如果

$$\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \psi(x) = 0,$$

则形式解变为

$$u(x, y) = \frac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2}.$$

证明: 这个函数在 $(0, \pm 1)$ 点不连续, 因此, 至少在这些点上, 并不满足 Laplace 方程.

这说明: 在一般情况下, Laplace 方程的“初值”问题无解.