第 一 部 分

复 变 函 数

Wu Chong-shi

第一章 复数和复变函数

1. 写出下列复数的实部、虚部、模和辐角：

(1) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; (2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin x}$, x为实数;

(3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$; (4) e^{z};

(5) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x)}$, $\phi(x)$是实变数x的实函数; (6) $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, $0\le\alpha<2\pi$.

2. 把下列关系用几何图形表示出来：

(1) $|z|<2$; (2) $|z|=2$;

(3) $|z|>2$; (4) $\mathrm{Re}\,z>\dfrac{1}{2}$;

(5) $1<\mathrm{Im}\,z<2$; (6) $0<\arg(1-z)<\dfrac{\pi}{4}$;

(7) $|z-a|=|z-b|$, $a,\,b$为常数;

(8) $|z-a|+|z-b|=c$, $a,\,b,\,c$均为常数, $c>|a-b|$.

3. 求下列序列 $\{z_n\}$ 的聚点和极限，如果是实数序列，则同时求出上极限和下极限：

(1) $z_n=(-)^n\dfrac{n}{2n+1}$; (2) $z_n=(-)^n\dfrac{1}{2n+1}$;

(3) $z_n=n+(-)^n(2n+1)\mathrm{i}$; (4) $z_n=(2n+1)+(-)^n n\mathrm{i}$;

(5) $z_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{6}$; (6) $z_n=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cos\dfrac{n\pi}{3}$.

第二章 解析函数

1. 判断下列函数在何处可导 (并求出其导数) 、在何处解析：

(1) $|z|$; (2) z^*;

(3) z^m, $m=0,\,1,\,2,\,\cdots$; (4) $z\,\mathrm{Re}\,z$;

(5) $\left(x^2+2y\right)+\mathrm{i}\left(x^2+y^2\right)$; (6) $(x-y)^2+2\mathrm{i}(x+y)$.

2. 证明平面极坐标系 (r,θ) 下的 Cauchy–Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

$u(r,\,\theta)$ 和 $v(r,\,\theta)$ 分别为复变函数的实部和虚部.

3. 利用平面极坐标系 (r,θ) 下的 Cauchy–Riemann 方程证明：

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).$$

4. 设 $z=x+\mathrm{i}y$ ，已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$ 如下，试求出解析函数 $f(z)$ ：

wu-chong-shi

(1) $x^2 - y^2 + x$;　　(2) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

(3) $\mathrm{e}^y \cos x$;　　(4) $\cos x \cosh y$.

5. 设 $z = x + \mathrm{i}y$, 已知解析函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 的实部或虚部如下, 试求 $f'(z)$:

(1) $u = x + y$;　　(2) $u = \sin x \cosh y$.

6. 若 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 解析，且

$$u - v = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2),$$

试求 $f(z)$.

7. 解下列方程：

(1) $\sin z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$;　　(2) $\cos z = 4$;

(3) $\sin^2 z - \dfrac{3}{2}\sin z - 1 = 0$;　　(4) $\tan z = \mathrm{i}$;

(5) $\sinh z = 0$;　　(6) $2\cosh^2 z - 3\cosh z + 1 = 0$.

8. 判断下列函数是单值的还是多值的：

(1) $\sqrt{z^2-1}$;　　(2) $z + \sqrt{z-1}$;

(3) $\sin\sqrt{z}$;　　(4) $\cos\sqrt{z}$;

(7) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;　　(8) $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

(9) $\ln\sin z$;　　(10) $\sin\big(\mathrm{i}\ln z\big)$.

9. 找出下列多值函数的枝点，并讨论 z 绕一个枝点移动一周回到原处后函数值的变化. 如果同时绕两个、三个、乃至更多个枝点一周，函数值又如何变化？

(1) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$,　$a \neq b$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$,　$a \neq b$;

(3) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$,　$a \neq b$;　　(4) $\sqrt[3]{(z-a)^2}$;

(5) $\sqrt{1-z^3}$;　　(6) $\sqrt[3]{1-z^3}$;

(7) $\ln(z^2+1)$;　　(8) $\ln\cos z$.

10. 求下列函数在指定点的全部可能取值：

(1) $\ln z$, $z = 1, \mathrm{i}, -1, 1+\mathrm{i}$;

(2) z^{i}, $z = 2, \mathrm{i}, -1, (1+\mathrm{i})$.

11. 规定函数 $w = z\sqrt[3]{z-2}$ 在图 2.1 中割线上岸的辐角为 0 ，试求该函数在割线下岸 $z = 3$ 处的数值.

又问：这个函数有几个单值分枝？求出在其它分枝中割线下岸 $z = 3$ 处的函数值.

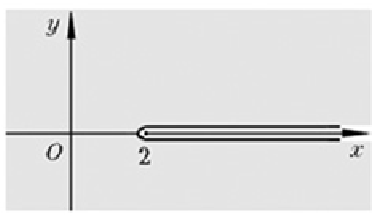

图 2.1

Wu Chong-shi

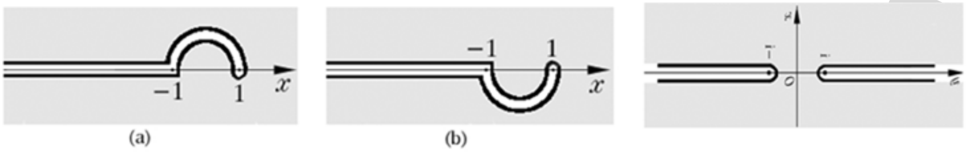

图 2.2

12. 已知函数 $w=\ln(1-z^2)$ ，规定 $w(0)=0$ ，试讨论当 z 限制在图 2.2(a) 和 (b) 中的 $w(3)$ 值. 若作割线如图 2.2(c) ，则在割线上、下岸 $z=3$ 处 w 又取何值？

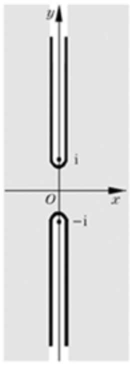

图 2.3

13. 反正切函数 $\arctan z$ 的定义为

$$\arctan z \equiv \frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}.$$

若作割线如图 2.3 ，并规定

$$\arctan z\big|_{z=0}=\pi,$$

求函数在 $z=2$ 处的导数值.

14. 已知函数 $f(z)=z^{-p}(1-z)^p,\ -1<p<2$. 若在实轴上沿 0 到 1 作割线，规定割线上岸 $\arg z=\arg(1-z)=0$ ，试求 $f(\pm\mathrm{i})$ 和 $f(\infty)$.

15. 若函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，且其模为常数，证明 $f(z)$ 本身也必为常数.

第三章 复变积分

1. 试按给定的路径计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2+\mathrm{i}}\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$ ，积分路径为：

(i) 线段 $[0,2]$ 和 $[2,2+\mathrm{i}]$ 组成的折线， (ii) 线段 $z=(2+\mathrm{i})t,\ 0\le t\le 1$;

(2) $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$. 规定 $\sqrt{z}\big|_{z=1}=1$ ，积分路径为由 $z=1$ 出发的：

(i) 单位圆的上半周， (ii) 单位圆的下半周.

2. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$; (2) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z}$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$; (4) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|$.

3. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\oint_C\frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi z}{4}\mathrm{d}z$ ， C 分别为：

Wu Chong-shi

(i) $|z|=\dfrac{1}{2}$,　　(ii) $|z-1|=1$,

(iii) $|z|=3$,　　(iv) $|z|=R,\ R\to\infty$;

(2) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，　C 分别为：

(i) $|z-\mathrm{i}|=1$,　　(ii) $|z|=2$,

(iii) $|z+\mathrm{i}|+|z-\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$,　　(iv) 闭合曲线 $r=3-\sin^2\dfrac{\theta}{4}$.

4. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$;　　(2) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^2-1}{z^2+1}\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin(\mathrm{e}^z)}{z}\mathrm{d}z$;　　(4) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\mathrm{d}z$.

5. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z$;　　(2) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{|z|\,\mathrm{e}^z}{z^2}\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^4}\mathrm{d}z$;　　(4) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}$.

6. (1) 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z^3}\mathrm{d}z$；

(2) a 取何值时，函数 $F(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z}\mathrm{e}^z\left(\frac{1}{z}+\frac{a}{z^3}\right)\mathrm{d}z$ 是单值的？

7. 求 $|\sin z|$ 在闭区域 $0\le\operatorname{Re}z\le 2\pi,\ 0\le\operatorname{Im}z\le 2\pi$ 中的最大值.

第四章　无穷级数

1. 判断下列级数的收敛性与绝对收敛性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$.

2. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})},\qquad |z|\neq 1$$

收敛，并求其和.

3. 试确定下列级数的收敛区域：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n(z^2+2z+2)^n$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{z}{3^n}$.

wu-chong-shi

4. 证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}\right]$$

的和函数在 $z=1$ 点不连续.

5. 证明:

$$\ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\cdots,\quad |z|<1,$$

并由此导出

$$r\cos\theta-r^2\frac{\cos 2\theta}{2}+r^3\frac{\cos 3\theta}{3}-+\cdots=\frac{1}{2}\ln\left(1+2r\cos\theta+r^2\right),$$
$$r\sin\theta-r^2\frac{\sin 2\theta}{2}+r^3\frac{\sin 3\theta}{3}-+\cdots=\arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta},$$

其中 $-1<r<1$.

6. 求下列级数之和:

(1) $\cos\theta+\dfrac{\cos 2\theta}{2}+\dfrac{\cos 3\theta}{3}+\dfrac{\cos 4\theta}{4}+\cdots,\qquad 0<\theta<2\pi,$

$\sin\theta+\dfrac{\sin 2\theta}{2}+\dfrac{\sin 3\theta}{3}+\dfrac{\sin 4\theta}{4}+\cdots,\qquad 0<\theta<2\pi;$

(2) $\cos\theta+\dfrac{\cos 3\theta}{3}+\dfrac{\cos 5\theta}{5}+\dfrac{\cos 7\theta}{7}+\cdots,\qquad 0<\theta<\pi,$

$\sin\theta+\dfrac{\sin 3\theta}{3}+\dfrac{\sin 5\theta}{5}+\dfrac{\sin 7\theta}{7}+\cdots,\qquad -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2};$

(3) $\sin\theta-\dfrac{\sin 3\theta}{3^2}+\dfrac{\sin 5\theta}{5^2}-\dfrac{\sin 7\theta}{7^2}+-\cdots,\qquad -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2};$

(4) $\cos\theta-\dfrac{\cos 5\theta}{5}+\dfrac{\cos 7\theta}{7}-\dfrac{\cos 11\theta}{11}+-\cdots,\qquad -\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{3}.$

提示:利用上题结果以及 Abel 第二定理.

7. 试求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}z^n;$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^n}z^n;$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n;$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2}z^n;$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}z^n;$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}z^{2n};$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n^n}{n!}z^n;$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z^n.$

第五章 Taylor 展开和 Laurent 展开

1. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数,并给出其收敛半径:

Wu Chong-shi

(1) $1-z^2$, 在 $z=1$ 展开；

(2) $\sin z$, 在 $z=n\pi$ 展开；

(3) $\dfrac{1}{1+z+z^2}$, 在 $z=0$ 展开；

(4) $\dfrac{\sin z}{1-z}$, 在 $z=0$ 展开；

(5) $\exp\left\{\dfrac{1}{1-z}\right\}$, 在 $z=0$ 展开 (可只求前四项) .

2. 将下列函数在指定点展开为 Taylor 级数，并给出其收敛半径：

(1) $\ln z$, 在 $z=\mathrm{i}$ 展开，规定 $0\leq\arg z<2\pi$;

(2) $\ln z$, 在 $z=\mathrm{i}$ 展开，规定 $\ln z\big|_{z=\mathrm{i}}=-\dfrac{3}{2}\pi$;

(3) $\arctan z$的主值，在 $z=0$ 展开；

(4) $\ln\dfrac{1+z}{1-z}$, 在 $z=\infty$ 展开，规定 $\ln\dfrac{1+z}{1-z}\Big|_{z=\infty}=(2k+1)\pi$.

3. 求下列无穷级数之和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1},\quad |z|<1$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n},\quad |z|<\infty$.

4. 求下列函数的 Laurent 展开：

(1) $\dfrac{1}{z^2(z-1)}$, 在 $z=1$ 附近展开；

(2) $\dfrac{1}{z^2(z-1)}$, 展开区域为 $1<|z|<\infty$;

(3) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$, 展开区域为 $1<|z|<2$;

(4) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$, 展开区域为 $2<|z|<\infty$;

(5) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$, 展开区域为 $3<|z|<4$;

(6) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$, 展开区域为 $4<|z|<\infty$.

5. 用级数相乘的方法求下列函数 (取主值分枝) 在 $z=0$ 点附近的级数展开：

(1) $-\ln(1-z)\ln(1+z)$;

(2) $\ln(1+z^2)\arctan z$.

6. 判断下列函数奇点的性质，如果是极点，确定其阶数：

(1) $\dfrac{1}{z^2+a^2}$, $a\neq 0$;

(2) $\dfrac{\cos az}{z^2}$;

(3) $\dfrac{\cos az-\cos bz}{z^2}$, $a\neq b$;

(4) $\dfrac{\sin z}{z^2}-\dfrac{1}{z}$;

(5) $\cos\dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

(6) $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$;

(7) $\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$;

(8) $\displaystyle\int_0^z\frac{\sinh\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\mathrm{d}\zeta$.

7. 判断下列函数在 ∞ 点的性质：

(1) z^2;

(2) $\dfrac{1}{z}$;

(3) $\dfrac{\cos z}{z}$;

(4) $\dfrac{z}{\cos z}$;

(5) $\dfrac{z^2+1}{\mathrm{e}^z}$;

(6) $\exp\left\{-\dfrac{1}{z^2}\right\}$;

(7) $\dfrac{1}{\cosh\sqrt{z}}$;

(8) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

Wu Chong-shi

第六章 常微分方程的幂级数解法

1. 求二阶线性常微分方程，使其解为：

(1) $w_1(z)=z$, $w_2(z)=\mathrm{e}^z$;

(2) $w_1(z)=\exp\left\{\dfrac{1}{z}\right\}$, $w_2(z)=\exp\left\{-\dfrac{2}{z}\right\}$;

(3) $w_1(z)=\cos\dfrac{a}{z}$, $w_2(z)=\sin\dfrac{a}{z}$;

(4) $w_1(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1}$, $w_2(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$.

2. 求下列方程在 $z=0$ 邻域内的两个级数解：

(1) $w''-z^2w=0$;

(2) $w''-zw=0$;

(3) $(z^2-1)w''+zw'-w=0$;

(4) $(1+z+z^2)w''+2(1+2z)w'+2w=0$;

3. 求下列方程在 $z=0$ 邻域内的两个级数解：

(1) $z^2(1-z)w''+z(1-3z)w'-(1+z)w=0$;

(2) $9z^2w''-15zw'+(36z^4+7)w=0$.

(3) $zw''-zw'+w=0$;

(4) $zw''+(z-1)w'+w=0$;

4. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\dfrac{2}{z}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+m^2u=0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解.

5. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-m^2w=0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解.

第七章 解析延拓

1. 定义在不同区域内的两个级数可以互为解析延拓. 作为一个例子，证明

$$f_1(z)=1+az+a^2z^2+a^3z^3+\cdots$$

与

$$f_2(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-+\cdots$$

互为解析延拓.

2. 无穷级数在不同区域内可以收敛到不同的和函数. 这两个和函数尽管 (在不同区域内) 有相同形式的级数表达式，但却不互为解析延拓. 作为一个例子，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z^n}\right)$$

在区域 $|z|<1$ 与 $|z|>1$ 内分别代表两个解析函数，但不互为解析延拓.

3. 已知：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}=z+z^2+z^4+z^8+z^{16}+\cdots,\quad |z|<1.$$

(1) 证明： $z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点;

(2) 证明： $f(z)=z+f(z^2)$ ，因此， $z^2=1$ 的根也都是 $f(z)$ 的奇点;

wu-chong-shi

(3) 类似地证明： $z^{2^k}=1$ 的 2^k 个根也是 $f(z)$ 的奇点， k 为任意正整数;

(4) 由此证明：不可能将 $f(z)$ 延拓到单位圆外.

第八章　留数定理及其应用

1. 求下列函数在指定点 z_0 处的留数：

(1) $\dfrac{1}{z-1}\exp\left(z^2\right)$, $z_0=1$;

(2) $\dfrac{1}{(z-1)^2}\exp\left(z^2\right)$, $z_0=1$;

(3) $\left(\dfrac{z}{1-\cos z}\right)^2$, $z_0=0$;

(4) $\dfrac{z^2}{z^4-1}$, $z_0=\mathrm{i}$;

(5) $\dfrac{1}{z^2\sin z}$, $z_0=0$;

(6) $\dfrac{1+\mathrm{e}^z}{z^4}$, $z_0=0$;

(7) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2-1)^2}$, $z_0=1$;

(8) $\dfrac{1}{\cosh\sqrt{z}}$, $z_0=-\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2$, $n=0,1,2,\cdots$.

2. 求下列函数在奇点处的留数：

(1) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$;

(2) $\dfrac{1}{(1+z^2)^{m+1}}$, m为正整数;

(3) $\dfrac{z}{1-\cos z}$;

(4) $\dfrac{\sqrt{z}}{\sinh\sqrt{z}}$;

(5) $\exp\left[\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\right]$;

(6) $\cos\dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

(7) $\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$;

(8) $\dfrac{1}{z}\left[1+\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(z+1)^n}\right]$.

3. 求下列函数在 ∞ 点处的留数：

(1) $\dfrac{1}{z}$;

(2) $\dfrac{\cos z}{z}$;

(3) $\dfrac{z}{\cos z}$;

(4) $(z^2+1)\mathrm{e}^z$;

(5) $\exp\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)$;

(6) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

4. 计算下列积分值：

(1) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi z}{4}\mathrm{d}z$;

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi z}{4}\mathrm{d}z$;

Wu Chong-shi

(5) $\oint_{|z|=n}\tan\pi z\mathrm{d}z$, n为正整数;

(6) $\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z^3(z^{10}-2)}\mathrm{d}z$;

(7) $\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^3}\mathrm{d}z$;

(8) $\oint_{|z|=R}\dfrac{z^2}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z^3}-1}\mathrm{d}z$, $n<R^3<n+1$, n为正整数 .

5. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$, n为正整数;

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^2}$, $a>b>0$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}$.

6. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x$, n,m 均为正整数，且 $n>m$;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$, n为正整数;

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\cosh\dfrac{\pi x}{2}}$.

7. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+2n)x-\sin ax}{(1+x^2)\sin x}\mathrm{d}x$, $a>-1$, n为正整数.

8. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)(x-2)}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$, $a>0$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{px}-\mathrm{e}^{qx}}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $0<p<1$, $0<q<1$.

9. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\mathrm{d}x$, $0<s<1$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{-\alpha}(\cos px-\cos qx)\mathrm{d}x$, $0<\alpha<2$, $p,q>0$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^s}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, $-1<s<3$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x$, $0<\alpha<1$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$, $a>0$;

(6) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}\mathrm{d}x$, $b>a>0$.

Wu Chong-shi

第九章　Γ 函数

1. 将下列连乘积用 Γ 函数表示出来：

(1) $(2n)!!$;　　(2) $(2n-1)!!$;

(3) $(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)\cdots(n+\nu)$;

(4) $\big[n(n+1)-\nu(\nu+1)\big]\big[(n-1)n-\nu(\nu+1)\big]\cdots\big[0-\nu(\nu+1)\big]$.

2. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x\mathrm{d}x,\quad 0<\alpha<2,$

$\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\cos x\mathrm{d}x,\quad 0<\alpha<1;$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}x,\ \alpha>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},$

$\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\mathrm{d}x,\ \alpha>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$

3. 设 $\psi(z)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$，证明：

(1) $\psi(z+1)=\dfrac{1}{z}+\psi(z)$;　　(2) $\psi(z+n)-\psi(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z+1}+\cdots+\dfrac{1}{z+n-1}$;

(3) $\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\cot\pi z$;　　(4) $2\psi(2z)-\psi(z)-\psi\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=2\ln 2$.

4. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1(1-x)^p(1+x)^q\mathrm{d}x,\quad \mathrm{Re}\,p>-1,\quad \mathrm{Re}\,q>-1;$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad \int_0^{\pi/2}\cot^\alpha\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad -1<\alpha<1;$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(r-\mathrm{i}x)^a(s-\mathrm{i}x)^b},\quad r>0,\ s>0,\ 0<a<1,\ 0<b<1,\ a+b>1;$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{a+b-2}\theta\,\cos(b-a)\theta\,\mathrm{d}\theta,\ 0<a<1,\ 0<b<1,\ a+b>1;$

5. 求下列无穷级数之和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n(4n^2-1)}$;　　(3) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^\infty\frac{1}{\left(n^2+1\right)^2}$.

第十章　Laplace 变换

(下列各题中的原函数 $f(t)$，均应理解为乘有 $\eta(t)$)

1. 求下列函数的 Laplace 换式：

Wu Chong-shi

(1) $t^n,\ n=0,1,2,\cdots;$ (2) $t^\alpha,\ \mathrm{Re}\,\alpha>-1;$

(3) $\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t,\ \lambda>0,\ \omega>0;$ (4) $\dfrac{\sin\omega t}{t},\ \omega>0;$

(5) $\dfrac{1-\cos\omega t}{t^2},\ \omega>0;$ (6) $\displaystyle\int_t^\infty\frac{\cos\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau.$

2. 若 $f(t)$ 为周期函数，周期为 α ，即 $f(t+\alpha)=f(t),\, t>0$ ．如果 $f(t)$ 的 Laplace 变换存在，证明：像函数是

$$F(p)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha p}}\int_0^\alpha \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t.$$

3. 求下列函数的 Laplace 换式：

(1) $|\sin\omega t|,\ \omega>0;$ (2) $t-a\left[\dfrac{t}{a}\right],\ a>0.$

4. 求下列 Laplace 换式的原函数：

(1) $\dfrac{a^3}{p(p+a)^3};$ (2) $\dfrac{\omega}{p(p^2+\omega^2)},\ \omega>0;$

(3) $\dfrac{4p-1}{(p^2+p)(4p^2-1)};$ (4) $\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2},\ \omega>0;$

(5) $\dfrac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^2},\quad \tau>0;$ (6) $\dfrac{1}{p}\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha p}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha p}},\ \alpha>0.$

5. 利用 Laplace 变换求解下列微分方程 (组) 或积分方程：

(1) 如图 9.1 ，已知 $i(0)=0,\quad q(0)=0,\quad$ 求$i(t)$;

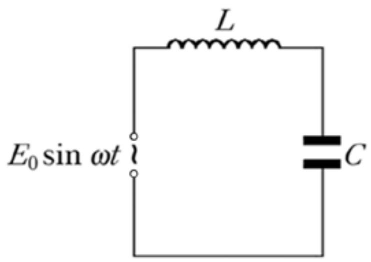

图 9.1

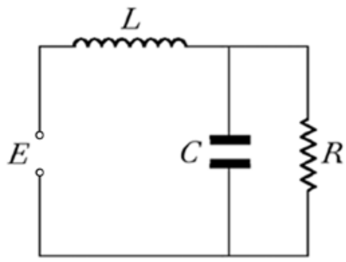

图 9.2

(2) 如图 9.2 ，已知 $i(0)=0,\quad q(0)=0,\quad$ 求$i(t)$;

(3) $y(t)=a\sin t-2\displaystyle\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau;$ (4) $f(t)+2\displaystyle\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=9\mathrm{e}^{2t}.$

6. 利用 Laplace 变换计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\,\mathrm{d}x,\ a>0,\ b>0,\ c>0;$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x,\ b>0;$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin xt}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x.$

7. 用普遍反演公式求下列 Laplace 换式的原函数：

wu chong-shi

(1) $\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$, $\omega>0$;

(2) $\dfrac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^4+4\omega^4}$, $\tau>0$, $\omega>0$;

(3) $\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha p}, \alpha>0$;

(4) $\dfrac{1}{p}\dfrac{\cosh(l-x)\sqrt{p}}{\cosh l\sqrt{p}}$, $0<x<l$.

8. 求下列无穷级数之和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$.

第十一章　δ 函数

1. 证明 δ 函数的下列性质：

(1) $\delta(x)=\delta(-x)$;

(2) $x\delta(x)=0$;

(3) $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$;

(4) $x\delta'(x)=-\delta(x)$;

(5) $\delta(ax)=\dfrac{1}{a}\delta(x), \quad a>0$;

(6) $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{2a}\big[\delta(x-a)+\delta(x+a)\big], \quad a>0$.

2. 求下列常微分方程初值问题的解：

(1) $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-k^2\right]g(x;t)=\delta(x-t), \qquad x,\ t>0,\ k>0,$

$g(0;t)=0, \qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0;$

(2) $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-x^2\right]g(x;t)=\delta(x-t), \qquad x,\ t>0,$

$g(0;t)=0, \qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0;$

(3) $\left[\big(1+x+x^2\big)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+2(1+2x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+2\right]g(x;t)=\delta(x-t), \qquad x,\ t>0,$

$g(0;t)=0, \qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0.$

提示：以上各变系数常微分方程的解见第六章习题.

3. 用 Green 函数方法求解下列常微分方程初值问题：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=f(x), \qquad x>0,\ k>0,$

$y(0)=A, \qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=B;$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}-k^2y(x)=f(x), \qquad x>0,\ k>0,$

wu-chong-shi

$y(0)=A, \qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=B;$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}-x^2y(x)=f(x), \qquad x>0,$

$y(0)=A, \qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=B.$

4. 求下列常微分方程边值问题的解:

(1) $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-k^2\right]g(x;t)=\delta(x-t), \qquad 0<x,\ t<1,\ k>0,$

$g(0;t)=0, \qquad g(1;t)=0;$

(2) $\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-x^2\right]g(x;t)=\delta(x-t), \qquad 0<x,\ t<1,$

$g(0;t)=0, \qquad g(1;t)=0;$

(3) $\left[\left(1+x+x^2\right)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+2(1+2x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+2\right]g(x;t)=\delta(x-t), \qquad 0<x,\ t<l<1,$

$g(0;t)=0, \qquad g(l;t)=0.$

5. 用 Green 函数方法求解下列常微分方程边值问题:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=f(x), \qquad 0<x<1,$

$y(0)=A, \qquad y(1)=B;$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}-k^2y(x)=f(x), \qquad 0<x<1,\ k>0,$

$y(0)=A, \qquad y(1)=B;$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}-x^2y(x)=f(x), \qquad 0<x<1,$

$y(0)=A, \qquad y(1)=B.$

Wu Chong-shi