

《数学物理方法》期终考试试题

一、（30分）简答题

1. 判断函数 $\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ 在何处可导（并求出其导数）、在何处解析
2. 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3} dz$
3. 写出函数 $f(z) = \cos \frac{z}{z-1}$ 在其所有孤立奇点（包括 ∞ 点）处的留数
4. 写出函数 $f(z) = \frac{\ln z}{\sin \pi z}$ 在其所有孤立奇点（包括 ∞ 点）处的留数
5. 写出方程 $z \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{dw}{dz} - w = 0$ 在其所有正则奇点处的指标

二、（25分）求解下列定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, & t \geq 0 \\ u \Big|_{t=0} &= x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

其中 a 是已知的与 x 和 t 都无关的常数。

三、（15分）求解同心球壳内的定解问题

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & a < r < b, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi \\ u \Big|_{r=a} &= 0, \quad u \Big|_{r=b} = \cos^2 \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

四、（15分）求解圆内定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0 \\ u \Big|_{r=0} &\text{有界}, \quad u \Big|_{r=a} = \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0 \\ u \Big|_{t=0} &= 0, & 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

其中 κ 是已知的与 r , φ 和 t 都无关的常数。

五、（15分）求一维半无界 Helmholtz 方程相应的 Green 函数 $G(x, x')$ 。它满足

$$\begin{cases} \frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} + k^2 G(x, x') = -\delta(x - x') & 0 < x, x' < \infty \\ G \Big|_{x=0} = 0, \quad G \text{ 在 } x \rightarrow \infty \text{ 只有出射波 (取时间因子为 } e^{-i\omega t} \text{)} \end{cases}$$

其中 k 是已知的与 x 和 x' 都无关的常数。