数 学 物 理 方 程 试 题

公 式 表

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l(x)=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)$$

$$\mathrm{P}'_{l+1}(x)=x\mathrm{P}'_l(x)+(l+1)\mathrm{P}_l(x)$$

$$\mathrm{P}'_{l+1}(x)=(2l+1)\mathrm{P}_l(x)+\mathrm{P}'_{l-1}(x)$$

$$\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-2x\mathrm{P}'_l(x)+\mathrm{P}'_{l-1}(x)$$

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

Laplace 变换表

原函数 $f(t)$	象函数 $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$\mathrm{erfc}\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\alpha t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-2\alpha\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha^2/p}\mathrm{erfc}\frac{\alpha}{\sqrt{p}}$

注意： 除第一题应当直接写出答案外，其余各题均须写出必要的关键步骤.

一、 (20 分) 写出下列各本征值问题的解：

(1) $\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0, \\ y(0)=0, \qquad y(l)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0, \\ y'(0)=0, \qquad y'(l)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0, \\ y(x)=y(x+2\pi)=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y(x) = 0, \\ y(\pm 1)\text{有界}. \end{cases}$

二、 (25 分) 求解下列定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^u a}{\partial x^t \partial y^-}{}^{2}\,\dfrac{\partial^u 0}{\partial x^x \partial y^=}, & & 0 < x < l,\, t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, & t > 0, \\ u\big|_{t=0} = A\cos^2\dfrac{\pi x}{l}, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & 0 < x < l, \end{cases}$$

其中 a 和 A 均为已知常数.

三、 (20 分) 求解球内的定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -4\pi r\cos\theta, & r < a, \\ u\big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

四、 (15 分) 计算积分：

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{J}_0(x)\,x\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\alpha > 0$， $\mathrm{J}_0(x)$ 为零阶 Bessel 函数.

五、 (20 分) 用 Laplace 变换方法求半无界杆热传导问题的 Green 函数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^{G(x,t;x',t')}\delta}{\partial x^x \partial y^=}(x-x')\,\delta(t-t'), & 0 < x < \infty,\, t > 0, \\ G(x,t;x',t')\big|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ G(x,t;x',t')\big|_{t=0} = 0, & 0 < x < \infty, \end{cases}$$

其中 $0 < x' < \infty, t' > 0$.

本 试 题 用 毕 收 回