复 变 函 数 试 题

注　　意

除第一题要求直接回答外，其余各题

均需写出必要的关键步骤及理由

一、选择题 (20 分)

1. 对数函数 $w=\ln(1+z)$ 是多值函数，其原因是：

(1) $\arg z$ 的多值性；　　(2) $\arg(1+z)$ 的多值性；

(3) z 的数值不确定；　　(4) $1+z$ 的数值不确定.

2. 设函数 $f(z)$ 在复连通区域 G 内解析，C 为 G 内的分段光滑曲线，端点为 A 和 B，则积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$

(1) 与积分路径无关，但与端点坐标有关；

(2) 与积分路径有关，但与端点坐标无关；

(3) 与积分路径及端点坐标均无关；

(4) 与积分路径及端点坐标均有关.

3. 若函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点解析，

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq 0,$$

则函数 $f'(z)/f(z)$ 在 $z=a$ 点的留数为

(1) $1-n$；　　(2) $n-1$；

(3) $-n$；　　(4) n.

4. $z=\infty$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的

(1) 一阶极点；　　(2) 本性奇点；

(3) 解析点；　　(4) 非孤立奇点.

5. $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ 的成立区域为：

(1) 全平面；　　(2) 带形区域 $0<\mathrm{Re}z<1$；

(3) 右半平面 $\mathrm{Re}z>0$；　　(4) 左半平面 $\mathrm{Re}z<1$.

二、(10 分) 已知解析函数 $f(z)$ 在正实轴上的数值为纯虚数，且虚部 $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，试求 $f(z)$.

三、 (20 分) 将函数 $\ln\dfrac{z-1}{z+1}$ 在 $z=\infty$ 的邻域内展开为幂级数，规定 $\ln\dfrac{z-1}{z+1}\Big|_{z=\infty}=0$.

四、 (40 分) 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2-2x\cos\theta+1)}$, $0<\theta<\pi$, 且 $\theta\neq\pi/2$.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

五、 (10 分) 已知 $f(t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)\mathrm{d}\theta$ ，试求其拉普拉斯变换的象函数 $F(p)$.