解答及评分标准

一、（ 30 分）

1. $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{z}$ 在除 $z=0$ 外的扩充的全平面（包括 ∞ 点）上可导、解析，$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$

可导区域	(2 分)
解析区域	(2 分)
导数公式	(2 分)

2. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i}$ (6 分)

3. $z=1$ 是 $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$ 的本性奇点， $\mathrm{res}f(1)=-\sin 1$； (3 分)

   $z=\infty$ 是 $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$ 的解析点， $\mathrm{res}f(\infty)=\sin 1$ (3 分)

4. $z=0$ 和 $z=\infty$ 是 $\ln z$ 的枝点，沿着正虚轴从 $z=0$ 到 $z=\infty$ 作割线，

   规定 $\ln z\big|_{z=1}=0$，则 作割线、规定单值分枝 (1 分)

   $z=1$ 是可去奇点， $\mathrm{res}f(1)=0$， (2 分)

   $z=k,\ k=-1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$ 是一阶极点， (1 分)

$$\mathrm{res}f(k)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{\pi}\ln k, & k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots \quad (1\text{ 分})\\ \mathrm{i} & k=-1\\ \dfrac{(-1)^k}{\pi}\ln|k|-(-1)^k\mathrm{i}, & k=-2,\ -3,\ -4,\ \cdots \quad (1\text{ 分})\end{cases}$$

   规定 $\ln z\big|_{z=1}=2n\pi\mathrm{i},\ n=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$，则

   $z=k,\ k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$ 都是一阶极点，

$$\mathrm{res}f(k)=\begin{cases}-2n\mathrm{i} & k=1\\ \dfrac{(-1)^k}{\pi}\ln k+(-1)^k 2n\mathrm{i}, & k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\\ -(2n-1)\mathrm{i} & k=-1\\ \dfrac{(-1)^k}{\pi}\ln|k|+(-1)^k(2n-1)\mathrm{i}, & k=-2,\ -3,\ -4,\ \cdots\end{cases}$$

5. $z=0$ 是方程 $z\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-w=0$ 的唯一正则奇点， (3 分)

   方程 $z\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-w=0$ 在 $z=0$ 点的指标为 $\rho_1=\rho_2=0$ (3 分)

二、（ 25 分）

解 一般解为

$$u(x,\ t)=C_0t+D_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$u\big|_{t=0}=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\cos\frac{n\pi}{l}x=x,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi}{l} a \cos\frac{n\pi}{l} x = 0,$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_n = 0 & n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \\ D_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l x\mathrm{d}x = \dfrac{l}{2} & \\ D_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l} x\mathrm{d}x = \dfrac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] & n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \end{cases}$$

故原问题的解为

$$u(x,\ t) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{l}\pi a t\cos\frac{2n+1}{l}\pi x$$

$\lambda = 0$ 对应的特解	(4 分)
本征函数	(4 分)
T_n	(4 分)
初位移	(2 分)
初速度	(2 分)
$C_n = 0$	(1 分)
D_0	(3 分)
D_n	(3 分)
解式	(2 分)

三、**解** 采用球坐标系．由方程以及边条件知 u 与 φ 无关，故方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0$$

一般解为

$$u(r,\ \theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

带入边界条件,

$$\left.u\right|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l a^l + B_l a^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

$$\left.u\right|_{r=b} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l b^l + B_l b^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) = \cos^2\theta$$

即得

$$A_l a^l + B_l a^{-l-1} = 0$$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2l+1}{2}\left(\frac{1}{3}\delta_{l,0} + \frac{2}{15}\delta_{l,2}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A_0 = \dfrac{b}{3(b-a)} \\ B_0 = -\dfrac{ab}{3(b-a)} \\ A_2 = \dfrac{2b^3}{3(b^5-a^5)} \\ B_2 = -\dfrac{2a^5b^3}{3(b^5-a^5)} \end{cases}$$

故原问题的解为

$$u(r,\ \theta) = \frac{b}{3(b-a)}\left(1-\frac{a}{r}\right) + \frac{2a^2b^3}{3(b^5-a^5)}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^3}{r^3}\right)\mathrm{P}_2(\cos\theta)$$

u 与 φ 无关	(1 分)
球坐标系下 Laplace 方程	(2 分)
一般解：本征函数	(2 分)
$R_l(r)$	(1 分)
模方	(2 分)
A_l 与 B_l 的方程 1	(1 分)
A_l 与 B_l 的方程 2	(1 分)
A_0	(1 分)
B_0	(1 分)
A_2	(1 分)
B_2	(1 分)
解式	(1 分)

四、**解** 设 $u(r,\ \varphi,\ t) = v(r,\ t)\sin\varphi$，则 $v(r,\ t)$ 满足定解问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2}\right] = 0, && 0<r<a, t>0 \\ &v\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad v\big|_{r=a} = 1, && t>0 \\ &v\big|_{t=0} = 0, && 0<r<a \end{aligned}$$

设 $v(r,\ t) = \dfrac{r}{a} + w(r,\ t)$，则 $w(r,\ t)$ 满足定解问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} - \kappa\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{w}{r^2}\right] = 0, && 0<r<a, t>0 \\ &w\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad w\big|_{r=a} = 0, && t>0 \\ &w\big|_{t=0} = -\frac{r}{a}, && 0<r<a \end{aligned}$$

本征值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) + \left(\lambda - \frac{1}{r^2}\right)R(r) = 0$$

$$R(0)\text{有界}, \quad R(a)=0$$

的解为

$$\lambda_i=\left(\frac{\mu_{1i}}{a}\right)^2, \qquad R_i(r)=\mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_{1i}}{a}r\right), \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中 μ_{1i} 是 $J_1(x)$ 的第 i 个正零点。

因此 $w(r,\ t)$ 的一般解为

$$w(r,\ t)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_{1i}}{a}r\right)\mathrm{e}^{-\kappa(\mu_{1i}/a)^2t}$$

带入初条件

$$w\big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_{1i}}{a}r\right)=-\frac{r}{a}$$

由此得

$$\begin{aligned}C_i &= \frac{\displaystyle\int_0^a -\frac{r}{a}\mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_{1i}}{a}r\right)r\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^a \mathrm{J}_1^2\left(\frac{\mu_{1i}}{a}r\right)r\mathrm{d}r}\\ &= \frac{-\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{a}{\mu_{1i}}\right)^3 x^2\mathrm{J}_2(x)\Bigg|_{x=0}^{x=\mu_{1i}}}{\dfrac{a^2}{2}\mathrm{J}_1'^{\,2}(\mu_{1i})}=\frac{2}{\mu_{1i}\mathrm{J}_0(\mu_{1i})}\end{aligned}$$

所以原问题的解为

$$u(r,\ \varphi,\ t)=\frac{r}{a}\sin\varphi+2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1i}\mathrm{J}_0(\mu_{1i})}\mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_{1i}}{a}r\right)\mathrm{e}^{-\kappa(\mu_{1i}/a)^2t}\sin\varphi.$$

平面极坐标下 ∇^2 的表达式	(2 分)
齐次化函数	(2 分)
$w(r,\ t)$ 的定解问题	(2 分)
本征值与本征函数	(2 分)
$T_i(t)$	(1 分)
C_i 的表达式	(2 分)
模方	(1 分)
分子	(2 分)
解式	(1 分)

五、**解**： **方法一** $x\neq x'$ 时，方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,x')}{\mathrm{d}x^2}+k^2G(x,x')=0$$

$$G(x,\ x')=\begin{cases} A\sin kx+B\cos kx & x<x' \\ C\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & x>x' \end{cases}\qquad \begin{matrix}(2\text{ 分})\\(2\text{ 分})\end{matrix}$$

$$G(x,\ x')\big|_{x=0}=0 \implies B=0 \qquad (2\text{ 分})$$

$$G在x\to\infty只有出射波（取时间因子为\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\ ） \implies D=0 \qquad (2\text{ 分})$$

$$G(x,\ x')\big|_{x=x'-}=G(x,\ x')\big|_{x=x'+} \implies A\sin kx'=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'} \qquad (2\text{ 分})$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'+}-\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'-}=-1 \implies \mathrm{i}kC\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'}-Ak\cos kx'=-1 \qquad (2\text{ 分})$$

$$\implies\begin{cases} A=\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'} & x<x' \\ C=\dfrac{1}{k}\sin kx' & x>x' \end{cases}\qquad \begin{matrix}(3\text{ 分})\\(3\text{ 分})\end{matrix}$$

$$G(x,\ x')=\begin{cases} \dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'}\sin kx & x<x' \\ \dfrac{1}{k}\sin kx'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} & x>x' \end{cases}\qquad (1\text{ 分})$$

方法二　对 x 作 Laplace 变换，设

$$G(x,\ x')\fallingdotseq g(p,\ x')$$

则

$$\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\fallingdotseq pg(p,\ x') \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,\ x')}{\mathrm{d}x^2}\fallingdotseq p^2g(p,\ x')-\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \qquad (2\text{ 分})$$

所以原方程变为

$$p^2g(p,\ x')-\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}+k^2g(p,\ x')=-\mathrm{e}^{-px'} \qquad (2\text{ 分})$$

$$g(p,\ x')=\frac{1}{p^2+k^2}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}-\mathrm{e}^{-px'}\right\} \qquad (2\text{ 分})$$

反演得

$$G(x,\ x')=\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\frac{1}{k}\sin kx\eta(x)-\frac{1}{k}\sin k(x-x')\eta(x-x') \qquad (2\text{ 分})$$

G 在 $x\to\infty$ 只有出射波（取时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ ）

$$\implies\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\frac{1}{k}\sin kx-\frac{1}{k}\sin k(x-x')\propto\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad (2\text{ 分})$$

$$\implies\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}-\cos kx'=\mathrm{i}\sin kx' \qquad (1\text{ 分})$$

$$\implies\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\ x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\cos kx'+\mathrm{i}\sin kx'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'} \qquad (1\text{ 分})$$

所以

$$G(x,\ x')=\begin{cases} \dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'}\sin kx & x<x' \\ \dfrac{1}{k}\sin kx'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} & x>x' \end{cases}\qquad (1\text{ 分})$$