试题答案及评分标准

一、 (20 分)

(1)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad (2 分)$$

$$y_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (2 分)$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots \qquad (1 分)$$

(2)

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{l}\pi\right)^2 \qquad (2 分)$$

$$y_n(x) = \sin\frac{2n+1}{l}\pi x \qquad (2 分)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \cdots \qquad (1 分)$$

(3)

$$\lambda_n = n^2 \qquad (2 分)$$

$$y_n(x) = \sin nx,\ \cos nx \qquad (2 分)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \cdots \qquad (1 分)$$

(4)

$$\lambda_l = l(l+1) \qquad (2 分)$$

$$y_l(x) = \mathrm{P}_l(x) \qquad (2 分)$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \cdots \qquad (1 分)$$

二、 (25 分)

$$u(x,t) = C_0 t + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u\Big|_{t=0} = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = u_0\cos^2\frac{\pi}{l}x = \frac{u_0}{2}\left[1+\cos\frac{2\pi}{l}x\right]$$

$$\Rightarrow \qquad D_0 = \frac{u_0}{2},\ D_n = \frac{u_0}{2}\,\delta_{n2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n}{l}\pi a\cdot\sin\frac{n}{l}\pi x \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = C_n = 0$$

$$\boxed{\boxed{u(x,t) = \frac{u_0}{2} + \frac{u_0}{2}\,\cos\frac{2\pi}{l}x\,\cos\frac{2\pi}{l}at}}$$

分离变量	$X(x)$的方程	(2 分)
	边界条件	(2 分)
	$T(t)$的方程	(2 分)
本征值问题	λ_n	(2 分)
	$X_n(x)$	(2 分)
	n的取值	(1 分)
特　　解	$T_n(t), T_0(t)$	(2 分)
一般解		(2 分)
定系数	C_0	(2 分)
	C_n	(2 分)
	D_0, D_2	(2 分)
	$D_n \quad (n \neq 0, 2)$	(2 分)
解　　式		(2 分)

三、 (20 分) 按相应齐次问题的本征函数展开

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l=-4\pi r\delta_{l1}$$

$$R_l(0)\text{有界}\qquad R_l(a)=0$$

当 $l=1$ 时， $R_1(r)=A_1r+B_1r^{-2}-\frac{2}{5}\pi r^3$ ，

$$\begin{aligned}&R_1(0)\text{有界}\quad\Rightarrow\quad B_1=0\\&R_1(a)=0\quad\Rightarrow\quad A_1=\frac{2}{5}\pi a^2\end{aligned}\qquad\boxed{R_1(r)=\frac{2}{5}\pi\left(a^2-r^2\right)}$$

当 $l\neq 1$ 时， $R_l(r)=A_lr^l+B_lr^{-l-1}$ ，

$$\begin{aligned}&R_l(0)\text{有界}\quad\Rightarrow\quad B_l=0\\&R_l(a)=0\quad\Rightarrow\quad A_l=0\end{aligned}\qquad\boxed{R_l(r)=0,\qquad l\neq 1}$$

所以

$$\boxed{\boxed{u(r,\theta)=\frac{2}{5}\pi\left(a^2-r^2\right)r\cos\theta}}$$

数学表述正确	(2 分)
解题方法正确	(2 分)
判断与 ϕ 无关	(2 分)
本征函数	(2 分)
$R_l(r)$ 满足的微分方程	(2 分)
$R_l(r)$ 满足的边界条件	(2 分)
$l=1$ 时的解	(3 分)
$l\neq 1$ 时的解	(3 分)
解　　式	(2 分)

四、 (15 分) 方法一 代入 Bessel 函数的级数表达式直接积分

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{J}_0(x)\, x\, \mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n}{n!\, n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, x^{2n+1}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n}{n!\, n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\, t^n\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n}{n!\, n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2\alpha} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n}{n!} \left(\frac{1}{4\alpha}\right)^n \\
&= \frac{1}{2\alpha} \mathrm{e}^{-1/4\alpha}
\end{aligned}$$

方法的正确选择	(3 分)
逐项积分	(2 分)
利用 Γ 函数计算积分	(5 分)
求　　和	(5 分)

方法二 含参量积分法. 令

$$I(b) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{J}_0(bx)\, x\, \mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned}
I'(b) &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{J}_1(bx)\, x^2\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, x\, \mathrm{J}_1(bx) \Big|_0^\infty - \frac{b}{2\alpha} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{J}_0(bx)\, x\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{b}{2\alpha} I(b)
\end{aligned}$$

所以

$$I(b) = A \exp\left\{-\frac{b^2}{4\alpha}\right\},$$

其中 $A = I(0) = 1/2\alpha$. 故

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{J}_0(x)\, x\, \mathrm{d}x = I(1) = \frac{1}{2\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{4\alpha}\right\}.$$

方法的正确选择	(3 分)
导出 $I(b)$ 的微分方程	(4 分)
解微分方程	(4 分)
利用特殊值定积分常数	(2 分)
求出所求积分	(2 分)

五、 (20 分) 设

$$G(x,t;x',t') \risingdotseq \overline{G}(x,p;x',t'),$$

则定解问题变为

$$\begin{cases} p\overline{G}(x,p;x',t') - \kappa\dfrac{\mathrm{d}2}{\mathrm{d}}x\overline{G}(x,p;x',t') = \mathrm{e}^{-pt'}\delta(x-x'), \\ \overline{G}(x,p;x',t')\big|_{x=0} = 0, \qquad \overline{G}(x,p;x',t')\big|_{x\to\infty} \to 0. \end{cases}$$

解之得

$$\overline{G}(x,p;x',t') = \begin{cases} A\sinh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}x, & x<x', \\ B\exp\left\{-\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}x\right\}, & x>x'. \end{cases}$$

由连接条件

$$\overline{G}(x,p;x',t')\Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = 0, \qquad -\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{G}(x,p;x',t')\Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = \mathrm{e}^{-pt'}$$

即

$$\begin{aligned} B\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x'\right\} - A\sinh\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x' &= 0, \\ B\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x'\right\} + A\cosh\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x' &= \frac{1}{\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'}, \end{aligned}$$

可以定出常数

$$A = \frac{1}{\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'}\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x'\right\}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'}\sinh\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x'.$$

于是,

$$\overline{G}(x,p;x',t') = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'}\exp\left\{-\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}x'\right\}\sinh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}x, & x<x', \\ \dfrac{1}{\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'}\exp\left\{-\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}x\right\}\sinh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}x'. & x>x', \end{cases}$$

查表，即得反演

$$\boxed{G(x,t;x',t') = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-t')}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\kappa(t-t')}\right]\right\}\eta(t-t').}$$

Laplace 变换，常微分方程定解问题		(4 分)
解方程:	$x<x'$	(2 分)
	$x>x'$	(2 分)
连接条件:	形式	(4 分)
	结果	(2 分)
反　演:	$\eta(t-t')$	(2 分)
	查表，得最后结果	(4 分)