试题答案及评分标准

一、 (20 分)

1. (2) (4 分)

2. (4) (4 分)

3. (4) (4 分)

4. (4) (4 分)

5. (1) (4 分)

二、 (10 分)

方法 1 求出 $u(x,y)$ 的全微分

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y \\ &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

积分,

$$u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C.$$

已知 $f(z)$ 在正实轴上的数值为纯虚数，说明当 $y=0$ 时,

$$u(x,y) = 0,$$

由此即可定出

$$C = 0.$$

所以,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{y+\mathrm{i}x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\mathrm{i}z^*}{zz^*} = \frac{\mathrm{i}}{z}. \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (2 分)

$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (2 分)

求出$u(x,y)$ (2 分)

积分常数 $C=0$ (2 分)

化简，求出$f(z)$ (2 分)

方法 2 直接化简给出 $f(z)$:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{z+z^*}{zz^*} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z^*}+\frac{1}{z}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{i}}{z^*}+\frac{\mathrm{i}}{z}\right] \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{i}}{z}-\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^*\right] \\
&= \frac{f(z)-f^*(z)}{2\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

由此即可直接得到

$$\boxed{f(z)=\frac{\mathrm{i}}{z}.} \qquad \text{(上述 5 步，每步 2 分)}$$

三、 (20 分)

$$\begin{aligned}
\ln\frac{z-1}{z+1} &= \ln\frac{1-\dfrac{1}{z}}{1+\dfrac{1}{z}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}\left[\left(-\frac{1}{z}\right)^n-\left(\frac{1}{z}\right)^n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}\left[(-)^n-1\right]\left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&= -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}, \qquad |z|>1.
\end{aligned}$$

正确作出割线	(3 分)
单值分枝讨论	(3 分)
$\ln\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$ 展开	(4 分)
$\ln\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$ 展开	(4 分)
化简	(4 分)
收敛范围	(2 分)

四、 (1) (20 分)

取围道为上半圆，考虑复变积分

$$\oint\frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)}\mathrm{d}z.$$

根据留数定理有

$$\begin{aligned}
&\oint\frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)}\mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)(x^2-2x\cos\theta+1)}\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_{C_R}\oint\frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)}
\end{aligned}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)}\text{在 } z=\mathrm{i} \text{ 的留数} + \frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)}\text{在 } z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ 的留数}\right].$$

可以计算

$$\begin{aligned}
\text{被积函数在 } z=\mathrm{i} \text{ 的留数} &= \frac{1}{2\mathrm{i}(-2\mathrm{i}\cos\theta)} \\
&= \frac{1}{4\cos\theta}, \\
\text{被积函数在 } z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ 的留数} &= \frac{1}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}+1)2\mathrm{i}\sin\theta} \\
&= \frac{1}{2\cos\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)2\mathrm{i}\sin\theta} \\
&= -\mathrm{i}\frac{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}{4\cos\theta\sin\theta} \\
&= -\mathrm{i}\frac{1}{4\sin\theta} - \frac{1}{4\cos\theta}.
\end{aligned}$$

同时，因为

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)} = 0,$$

根据大圆弧引理，有

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z\cos\theta+1)}\mathrm{d}z = 0.$$

综合上述结果，取极限 $R\to\infty$ ，就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2-2x\cos\theta+1)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sin\theta}.$$

积分围道	(2 分)
被积函数	(2 分)
留数定理	(3 分)
奇点 i 及留数计算	(4 分)
奇点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及留数计算	(4 分)
大圆弧引理	(2 分)
结果	(3 分)

四、 (2) (20 分)

取围道如图 8.7 ，考虑复变积分

$$\oint \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+4)}\mathrm{d}z.$$

根据留数定理有

$$\begin{aligned}
\oint \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+4)}\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{-\delta} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+4)}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\delta}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+4)}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-2}}{-8} \\
&= -\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\mathrm{e}^{-2}.
\end{aligned}
$$

因为

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+4)}=0,$$

根据 Jordan 引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+4)}\mathrm{d}z=0.$$

又因为

$$\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+4)}=\frac{1}{4},$$

根据小圆弧引理，有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+4)}\mathrm{d}z=-\frac{\pi\mathrm{i}}{4}.$$

综合上述结果，取极限 $R\to\infty,\ \delta\to 0$ ，就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x=\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right).$$

比较虚部，就得到最后结果

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right).$$

积分围道	(2 分)
被积函数	(2 分)
留数定理	(3 分)
奇点 $z=2\mathrm{i}$ 及留数计算	(4 分)
小圆弧引理，计算	(4 分)
大圆弧， Jordan 引理	(2 分)
结果	(3 分)

五、 (10 分)

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{p}{p^2+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{p^2+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{p}{p^2+\frac{1}{4}\left(z+z^{-1}\right)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\
&= \frac{4p}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z}{z^4+2(2p^2+1)z^2+1}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

作变换 $\zeta=z^2$ ，注意 z 平面上的 $|z|=1$ 一周变为 ζ 平面上的 $|\zeta|=1$ 两周，所以

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \frac{4p}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta^2+2(2p^2+1)\zeta+1}\mathrm{d}\zeta \\
&= 4p\times\frac{1}{\zeta^2+2(2p^2+1)\zeta+1}\text{在单位圆内的留数和}.
\end{aligned}
$$

$\dfrac{1}{\zeta^2+2(2p^2+1)\zeta+1}$ 的奇点是

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{-2(2p^2+1)\pm\sqrt{4(2p^2+1)^2-4}}{2}\\ &= -(2p^2+1)\pm 2p\sqrt{p^2+1},\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{1}{\zeta^2+2(2p^2+1)\zeta+1}$ 在单位圆内只有一个奇点,

$$\zeta=-(2p^2+1)+2p\sqrt{p^2+1},$$

并且是一阶极点，留数为

$$\left.\frac{1}{2\zeta+2(2p^2+1)}\right|_{\zeta=-(2p^2+1)+2p\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{4p\sqrt{p^2+1}}.$$

最后就得到

$$\boxed{F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.}$$

$\cos\omega t$ 的 Laplace 变换	(2 分)
变为沿单位圆 $\|z\|=1$ 的积分	(2 分)
作变换 $\zeta=z^2$	(1 分)
奇点及留数计算	(2 分)
结　　果	(2 分)
成立条件： $(\mathrm{Re}\,p>0)$	(1 分)