第八章　量子力学中的近似方法

一、定态微扰论

1、设一体系未受微扰作用时只有两个能级：E_{01}及E_{02}现在受到微扰$\hat{H}'$的作用，微扰矩阵元为$H'_{12}=H'_{21}=a, H_{11}=H_{22}=b, a,b$都是实数，用微扰公式求能量至二级修正值。

2、一个一维线性谐振子受一恒力作用，设力的方向沿x方向：

（1）用微扰法求能量至二级修正；

（2）求能量的精确值，并与（1）所得结果比较。

3、设在H_0表象中，H矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} E_1^{(0)} & 0 & a \\ 0 & E_2^{(0)} & b \\ a^* & b^* & E_3^{(0)} \end{Bmatrix}$$

试用微扰论求能量的二级修正。

4、设自由粒子在长度为L的一维区域中运动，波函数满足周期性边条件

$$\psi(-\frac{L}{2})=\psi(\frac{L}{2})$$

波函数的形式可取为

$$\psi_+^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos kx, \psi_-^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin kx \qquad k=\frac{2\pi n}{L} \qquad n=0,1,2\Lambda$$

设粒子还受到一个“陷阱”的作用

$$H_{(x)}^1=-V_0e^{-x^2/a^2} \qquad a \ll L$$

试用简并微扰论计算能量一级修正。

5、一体系在无微扰时有两条能级，其中一条是二重简并的，在H_0表象中

$$\left\{\begin{matrix} E_1^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & E_2^{(0)} \end{matrix}\right\} \quad E_1^{(0)} < E_2^{(0)}$$

在计及微扰后，哈密顿量为

$$\left\{\begin{matrix} E_1^{(0)} & 0 & a \\ 0 & E_1^{(0)} & b \\ a^* & b^* & E_2^{(0)} \end{matrix}\right\}$$

（1）用微扰论求 H 本征值，准到二级近似；

（2）把 H 严格对角化，求 H 的精确本征值，然后进行比较。

二． 变分法

1、试用变分法求一维谐振子的基态波函数和能量（试探波函数取 $e^{-\lambda x^2}$，λ 为特定参数）。

2、设氢原子的基态试探波函数取为

$$\psi(\lambda, r) = Ne^{-\lambda(r/a)^2}$$

$$a = \eta^2/\mu e^2$$

N 为归一化常数，λ 为变分参数，求基态能量，并与精确解比较。

3、粒子在一维势场中运动 $V_{(x)} < 0$（当 $x \to \pm\infty, V_{(x)} \to 0)$，试证明：至少存在一个束缚态 $E < 0,$ 取试探波函数。

$$\psi(\lambda, x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^{1/4}} e^{-\lambda^2 x^2/2}$$

三、量子跃迁

1、氢原子处于基态，受到脉冲电场作用

$$\vec{\varepsilon}(t) = \vec{\varepsilon}_0 \delta(t) \qquad \vec{\varepsilon}_0 \text{是常数}$$

试用微扰论计算电子跃迁到各激发态的几率以及仍停留在基态的几率。

2、具有电荷q的离子，在其平衡位置附近作一维简谐运动。在光的照射下发生跃迁，入射光能量密度分布为$\rho(\omega)$，波长较长，求

（1）跃迁选择定则；

（2）设离原来处于基态，求跃迁到第一激发态的几率。

3、设把处于基态的氢原子放在平板电容器中，取平板法线方向为 Z 轴方向，电场沿 Z 轴方向可视为均匀，设电容器突然充电，然后放电，电势随时间变化为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{t} < 0 \\ \varepsilon_0 \mathbf{e}^{-\mathbf{t}/\tau} & \mathbf{t} > 0 \end{cases} \quad （\tau \text{为常数}）$$

求充分长的时间之后，氢原子跃迁到$2S$态及$2p$态的几率。

4、有一自旋$\eta/2$，磁矩μ，电荷为零的粒子，置于磁场$\vec{\mathbf{B}}$中，开始时$\mathbf{t}=0, \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 = (0,0,\mathbf{B}_0)$，粒子处于$\hat{\sigma}_{\mathbf{z}}$的本征态$\binom{0}{1}$，即$\sigma_{\mathbf{z}} = -1$。$t > 0$时，再加上沿$\mathbf{x}$方向较弱的磁场$\vec{\mathbf{B}}_1 = (\mathbf{B},0,0)$,从而$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}_1 = (\mathbf{B}_1, 0, \mathbf{B}_0)$，求$\mathbf{t} > 0$时，粒子的自旋态，以及测得自旋“向上”$(\sigma_{\mathbf{z}} = 1)$的几率。

四、散射问题

1、用玻恩近似法，求在下列势中的散射微分截面

（1）$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_0 \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{r}^2} \qquad (\mathbf{a} > 0)$

（2）$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_0 \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{r}} \qquad (\mathbf{a} > 0)$

2、用分波法公式，证明光学定量

$$\mathbf{Im}\,\mathbf{f}(0) = \frac{\mathbf{k}}{4\pi}\sigma_{\mathbf{T}}$$

3、设势场$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_0/\mathbf{r}^2$,用分波法求$\mathbf{l}$分波的相移。

4、质量为μ的粒子束，被球壳δ势场散射。

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

在高能近似下，用玻恩近似法计算散射振幅和微分截面。

5、求各分波相移δ_l，并和刚球散射的结果比较。

6、求中子一中子低能$(E \to 0)S$波散射截面，设两中子间的作用为

$$V = \begin{cases} V_0 \sigma_1 \cdot \sigma_2 & r \le a \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

其中$V_0 > 0, \sigma_1, \sigma_2$是两中子的 *pauli* 自旋算符，入射中子和靶中子都是未极化的。

7、实验发现，中子一质子低能 S 波散射的散射振幅和散射截面与中子一质子体系的自旋状态有关。对于自旋单态和自旋三重态，散射振幅分别为

$$f_1 = -2.37 \cdot 10^{-12} \text{cm}$$
$$f_2 = 0.538 \cdot 10^{-12} \text{cm}$$

（1）分别求自旋单态和三重态的总散射截面；

（2）如入射中子(n)和质子(p)都是未极化的，求总截面；

（3）如入射中子自旋“向上”，质子靶自旋“向下”，求总截面，以及散射后，n、p自旋均转向相反方向的几率。