第七章 自 旋

1、设λ为常数，证明$e^{i\lambda\sigma_z}=\cos\lambda+i\sigma_z\sin\lambda$。

2、若$\sigma_{\pm}=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\pm i\sigma_y\right)$,证明$\sigma_{\pm}^2=0$

3、在σ_z表象中，求$\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$的本征态，$\vec{n}(\sin\theta\mathrm{con}\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$是$(\theta,\varphi)$方向的单位矢。

4、证明恒等式：$\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)+i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$其中$\vec{A},\vec{B}$都与$\vec{\sigma}$对易。

5、已知原子${}^{12}c$的电子填布为$(1s)_0^2(2_s)_0^2(2_p)_j^2$，试给出

（1）简并度；

（2）给出jj耦合的组态形式；

（3）给出LS耦合的组态形式；

6、电子的磁矩算符$\mu=-\frac{e}{2\mu_0}\vec{l}-\frac{e}{\mu_0}\vec{S}$，电子处于$l^2,j^2,j_z$的本征态$\left|l_j m_j\right>$中，求磁矩$\mu$。

$$\mu=<l_j m_j|\vec{\mu}_z|l_j m_j>_{m_j=j}$$

7、对于自旋为$\frac{1}{2}$的体系，求$\hat{S}_x+\hat{S}_y$的本征值和本征态，在具有较小的本征值所相应的态中，测量$\hat{s}_z=\frac{\eta}{2}$的几率是多大？

8、自旋为$\frac{1}{2}$的体系，在$t=0$时处于本征值为$\eta/2$的S_x的本征态，将其置于$B=\left(0.0.B\right)$的磁场中，求t 时刻，测量S_x取$\eta/2$的几率。

9、某个自旋为$1/2$的体系，磁矩$\mu=\mu_0\underline{\sigma},t<0$时，处于均匀磁场$B_0$中，$B_0$指向$Z$方向，$t\geq 0$时，再加上一个旋转磁场$B_1(t)$，其方向和$Z$轴垂直。

$$\vec{B}_1(t) = B_2 \cos 2\omega_0 t\hat{e}_1 - B_1 \sin 2\omega_0 t\hat{e}_2$$

其中$\omega_0 = \mu_0 B_0 / \eta c$

已知$t \le 0$时，体系处于$s_z = \eta / 2$的本征态$\kappa_{1/2}$，求$t > 0$时，体系的自旋波函数，以及自旋反向所需要的时间。

10、有三个全同粒子，可以处于ψ_1, ψ_2, ψ_3三个单粒子态上，当$n_1 = 3; n_1 = n_2 = n_3 = 1; n_1 = 2, n_2 = 1$三种情形下的对称或反对称波函数如何写？

11、两个全同费米子体系处于一个二维方势阱中，假设两粒子间无相互作用，求体系最低两上能级的能量和波函数。

$$V_{(x,y)} = \begin{cases} 0 & 0 < x < L, \quad 0 < y < L \\ \infty & x > L, \qquad x < 0 \\ & y > L, \qquad y < 0 \end{cases}$$

12、设有两个全同粒子，处于一维谐振子势中，彼此间还有与相互距离成正比的作用力，即位能为

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k (x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{2} a (x_1 - x_2)^2, \qquad a, k > 0$$

求体系的能量本征值及本征函数，按波函数的交换对称性分别讨论之。