

第五章 变量可分离型的波动方程

- 1、求三维各向异性的谐振子的波函数和能级。
- 2、对于球方位势

$$V_{(r)} = \begin{cases} V_0 & r > a_0 \\ 0 & r < a_0 \end{cases}$$

试给出有 n 个 $l=0$ 的束缚态条件。

- 3、设氢原子处于状态

$$\varphi(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{21}(\mathbf{r}) Y_{10}(\theta, \varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2} R_{21}(\mathbf{r}) Y_{1-1}(\theta, \varphi)$$

求氢原子能量，角动量平方和角动量分量的可能值，以及这些可能值出现的几率和这些力学量的平均量。

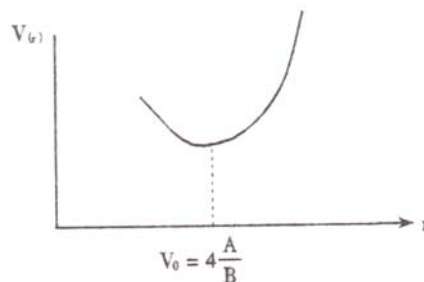
- 4、证明

$$\frac{1}{2} [\nabla^2, \mathbf{r}] = \frac{1}{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\frac{1}{2} [\nabla^2, \underline{\mathbf{r}}] = \nabla$$

- 5、设氢原子处于基态，求电子处于经典力学不允许区域 ($\mathbf{E} - \mathbf{V} = \mathbf{T} < 0$) 的几率。

- 6、设 $V(\mathbf{r}) = B\mathbf{r}^2 + A/\mathbf{r}^2$ ，其中 $A, B > 0$ ，求粒子的能量本征值。



- 7、设粒子在半径为 a ，高为 h 的圆筒中运动，在筒内位能为 0，筒壁和筒外位能为无穷大，求粒子的能量本征值和本征函数。

- 8、碱金属原子和类碱金属原子的最外层电子在原子实电场中运动，原子实电场近似地可用下面的电势表示：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Z'e}{r} + \frac{A}{r^2}$$

其中， $Z'e$ 表示原子实的电荷， $A > 0$ ，证明，电子在原子实电场中的能量为

$$E_{nl} = -\frac{\mu e^4 Z'^2}{2\eta^2} \frac{1}{(n + \delta_l)^2}$$

而 δ_l 为 l 的函数，讨论 δ_l 何时较小，求出 δ_l 小时， E_{nl} 公式，并讨论能级的简并度。

9、粒子作一维运动，其哈密顿量

$$H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + V(x)$$

的能级为 $E_n^{(0)}$ ，试用Feynman - Hellmann定理，求

$$H = H_0 + \frac{\lambda P_x}{m}$$

的能级 E_n 。

10、设有两个一维势阱

$$V_1(x) \leq V_2(x)$$

若粒子在两势阱中都存在束缚能级，分别为 $E_{1n}, E_{2n} (n = 1, 2, \dots)$

(1) 证明 $E_{1n} \leq E_{2n}$

(提示：令 $V(\lambda, x) = (1 - \lambda)V_1 + \lambda V_2$)

(2) 若粒子的势场

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}Kx^2 & |x| < b \\ \frac{1}{2}Kb^2 & |x| > b \end{cases}$$

中运动，试估计其束缚能总数的上、下限

11、证明在规范变换下

$$\rho = \varphi^* \varphi$$

$$\underline{j} = \frac{1}{2\mu} (\varphi^* \hat{P} \varphi - \varphi \hat{P} \varphi^*) - \frac{q}{\mu c} \hat{A} \varphi^* \varphi$$

$$\mu\hat{v} = \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)$$

不变。

12、计算氢原子中 $3D \rightarrow 2P$ 的三条塞曼线的波长。

13. 带电粒子在外磁场 $\hat{\mathbf{B}} = (0,0,\mathbf{B})$ 中运动，如选

$$\hat{\mathbf{A}} = \left(-\frac{1}{2}y\mathbf{B}, \frac{1}{2}x\mathbf{B}, 0 \right) \text{ 或 } \hat{\mathbf{A}} = (0, x\mathbf{B}, 0)$$

试求其本征函数和本征值，并对结果进行讨论。

14、设带电粒子在相互垂直的均匀电场 \mathbf{E} 及均匀磁场 \mathbf{B} 中运动，求其能谱和波函数（取磁场方向为 Z 轴方向，电场方向为 X 轴方向）。