

## 第五章 变量可分离型的波动方程

- 1、求三维各向异性的谐振子的波函数和能级。
- 2、对于球方位势

$$V_{(r)} = \begin{cases} V_0 & r > a_0 \\ 0 & r < a_0 \end{cases}$$

试给出有  $n$  个  $l=0$  的束缚态条件。

- 3、设氢原子处于状态

$$\varphi(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{21}(\mathbf{r}) Y_{10}(\theta, \varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2} R_{21}(\mathbf{r}) Y_{1-1}(\theta, \varphi)$$

求氢原子能量，角动量平方和角动量分量的可能值，以及这些可能值出现的几率和这些力学量的平均量。

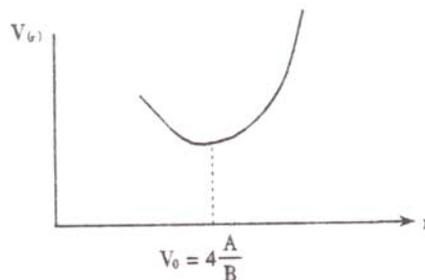
- 4、证明

$$\frac{1}{2} [\nabla^2, \mathbf{r}] = \frac{1}{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\frac{1}{2} [\nabla^2, \underline{\mathbf{r}}] = \nabla$$

- 5、设氢原子处于基态，求电子处于经典力学不允许区域 ( $\mathbf{E} - \mathbf{V} = \mathbf{T} < 0$ ) 的几率。

- 6、设  $V(\mathbf{r}) = B\mathbf{r}^2 + A/\mathbf{r}^2$ ，其中  $A, B > 0$ ，求粒子的能量本征值。



- 7、设粒子在半径为  $a$ ，高为  $h$  的圆筒中运动，在筒内位能为 0，筒壁和筒外位能为无穷大，求粒子的能量本征值和本征函数。

- 8、碱金属原子和类碱金属原子的最外层电子在原子实电场中运动，原子实电场近似地可用下面的电势表示：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{Z}'e}{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{r}^2}$$

其中， $\mathbf{Z}'e$ 表示原子实的电荷， $\mathbf{A} > 0$ ，证明，电子在原子实电场中的能量为

$$\mathbf{E}_{\mathbf{n}\mathbf{l}} = -\frac{\mu e^4 \mathbf{z}'^2}{2\eta^2} \frac{1}{(\mathbf{n} + \delta_{\mathbf{l}})^2}$$

而 $\delta_{\mathbf{l}}$ 为 $\mathbf{l}$ 的函数，讨论 $\delta_{\mathbf{l}}$ 何时较小，求出 $\delta_{\mathbf{l}}$ 小时， $\mathbf{E}_{\mathbf{n}\mathbf{l}}$ 公式，并讨论能级的简并度。

9、粒子作一维运动，其哈密顿量

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{P}_x^2}{2\mathbf{m}} + \mathbf{V}(x)$$

的能级为 $\mathbf{E}_n^{(0)}$ ，试用Feynmen – Hellmann定理，求

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \frac{\lambda \mathbf{P}_x}{\mathbf{m}}$$

的能级 $\mathbf{E}_n$ 。

10、设有两个一维势阱

$$\mathbf{V}_1(x) \leq \mathbf{V}_2(x)$$

若粒子在两势阱中都存在束缚能级，分别为 $\mathbf{E}_{1n}, \mathbf{E}_{2n} (n = 1, 2, \dots)$

(1) 证明 $\mathbf{E}_{1n} \leq \mathbf{E}_{2n}$

(提示：令 $\mathbf{V}(\lambda, x) = (1 - \lambda)\mathbf{V}_1 + \lambda\mathbf{V}_2$ )

(2) 若粒子的势场

$$\mathbf{V}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{K}x^2 & |x| < b \\ \frac{1}{2} \mathbf{K}b^2 & |x| > b \end{cases}$$

中运动，试估计其束缚能总数的上、下限

11、证明在规范变换下

$$\rho = \varphi^* \varphi$$

$$\underline{\mathbf{j}} = \frac{1}{2\mu} (\varphi^* \hat{\mathbf{P}} \varphi - \varphi \hat{\mathbf{P}} \varphi^*) - \frac{\mathbf{q}}{\mu c} \hat{\mathbf{A}} \rho$$

$$\mu\hat{v} = \left( \hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)$$

不变。

12、计算氢原子中  $3D \rightarrow 2P$  的三条塞曼线的波长。

13. 带电粒子在外磁场  $\hat{\mathbf{B}} = (0,0,\mathbf{B})$  中运动，如选

$$\hat{\mathbf{A}} = \left( -\frac{1}{2}y\mathbf{B}, \frac{1}{2}x\mathbf{B}, 0 \right) \text{ 或 } \hat{\mathbf{A}} = (0, x\mathbf{B}, 0)$$

试求其本征函数和本征值，并对结果进行讨论。

14、设带电粒子在相互垂直的均匀电场  $\mathbf{E}$  及均匀磁场  $\mathbf{B}$  中运动，求其能谱和波函数（取磁场方向为  $Z$  轴方向，电场方向为  $X$  轴方向）。