第四章　量子力学中的力学量

1、　若 $\mathbf{H}=\frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+\mathbf{p}_z^2\right)+\mathbf{V}_{(x,y,z)}$

证明：$[\mathbf{H},\mathbf{P}_x]=\mathbf{i}\eta\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}},$

$$[\mathbf{H},\mathbf{x}]=-\mathbf{i}\eta\frac{\mathbf{p}_x}{\mu},$$

2、设 $[\mathbf{q},\mathbf{p}]=\mathbf{i}\eta,\mathbf{f}(\mathbf{q})$ 是 $\mathbf{q}$ 的可微函数，证明

（1）$[\mathbf{q},\mathbf{p}^2\mathbf{f}(\mathbf{q})]=2\mathbf{ihpf},$

（2）$[\mathbf{p},\mathbf{p}^2\mathbf{f}(\mathbf{q})]=\frac{\eta}{\mathbf{i}}\mathbf{p}^2\mathbf{f}';$

3、证明

$$[\hat{\mathbf{A}},[\hat{\mathbf{B}},\hat{\mathbf{C}}]]+[\hat{\mathbf{B}},[\hat{\mathbf{C}},\hat{\mathbf{A}}]]+[\hat{\mathbf{C}},[\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}]]\equiv 0$$

4、如果，$\hat{A},\hat{B}$ 是厄密算符

（1）证明 $\left(\hat{\mathbf{A}}+\hat{\mathbf{B}}\right)^{\mathbf{n}},\mathbf{i}\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}\right]$ 是厄密算符；

（2）求出 $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ 是厄密算符的条件。

5、证明：

$$\mathbf{e}^{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}^{-\hat{\mathbf{L}}}=\mathbf{A}+\left[\hat{\mathbf{L}},\hat{\mathbf{A}}\right]+\frac{1}{2!}\left[\hat{\mathbf{L}},\left[\hat{\mathbf{L}},\hat{\mathbf{A}},\right]\right]+\frac{1}{3!}\left[\hat{\mathbf{L}},\left[\hat{\mathbf{L}},\left[\hat{\mathbf{L}},\hat{\mathbf{A}}\right]\ \right]\right]+\Lambda$$

6、如果 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 与它们的对易子 $\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}\right]$ 都对易，证明

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{e}^{\hat{\mathbf{B}}}=\mathbf{e}^{\hat{\mathbf{A}}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}\right]}$$

（提示，考虑 $\mathbf{f}(\lambda)=\mathbf{e}^{\lambda\hat{\mathbf{A}}}\cdot\mathbf{e}^{\lambda\hat{\mathbf{B}}}\cdot\mathbf{e}^{-\lambda\left(\hat{\mathbf{A}}+\hat{\mathbf{B}}\right)},$ 证明 $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{d}\lambda}=\lambda\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]\mathbf{f}$ 然后积分）

7、设 λ 是一小量，算符 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ 存在，求证

$$(\hat{\mathbf{A}}-\lambda\hat{\mathbf{B}})^{-1}=\hat{\mathbf{A}}^{-1}+\lambda\hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^{-1}+\lambda^2\hat{\mathbf{A}}^{-1}+\lambda^2\hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^{-1}+\Lambda$$

8、如 $\mathbf{u}_{\mathbf{ni}}$ 是能量 $\mathbf{E}_{\mathbf{n}}$ 的本征函数（i 为简并指标），证明

$$\int u_{ni}^{*}\left(xp_x + p_x x\right)u_{nj}dx = 0$$

从而证明：$i\int u_{ni}p_x x u_{nj}d\tau = \frac{\eta}{2}\delta_{ij}$

9、一维谐振子处在基态

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi^{1/2}}}e^{-a^2x^2/2}$$

求：（1）势能的平均值$\overline{A} = \frac{1}{2}m\omega^2\overline{X^2};$

（2）动能的平均值$T = \overline{P_x^2}/2m;$

（3）动量的几率分布函数

其中$a = \sqrt{\frac{m\omega}{\eta}}$

10、若$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$, 证明

(1) $[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] = \pm\eta\hat{L}_{\pm}$

$[\hat{L}^2, \hat{L}_{+}] = [\hat{L}^2, \hat{L}_{-}] = 0$

(2) $\hat{L}_{+}Y_{lm} = C_1 Y_{lm+1}$

$\hat{L}_{-}Y_{lm} = C_2 Y_{lm-1}$

(3) $\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_{+}\hat{L}_{+} + \hat{L}_{-}\hat{L}_{-}\right)$

11、设粒子处于$Y_{lm}(\theta,\varphi)$状态，利用上题结果求$\overline{\Delta l_x^2}, \overline{\Delta l_y^2}$

12、利用力学量的平均值随时间的变化，求证一维自由运动的ΔX^2随时间的变化为：

$$\left(\overline{\Delta X^2}\right)_t = \left(\overline{\Delta X^2}\right)_0 + \frac{2}{\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\overline{XP_X + p_X X}\right)_0 - \left(\overline{x}\right)_0\left(\overline{p_x}\right)_0\right]_t + \frac{1}{\mu_2}\left(\overline{\Delta P_x^2}\right)t^2$$

（注：自由粒子P_x, P_x^2与时间无关）。