量子力学期末试题 B 答案和评分

Ⅰ. (35 分)

A. $\hat{\mathbf{H}}=\frac{1}{2m}(\hat{p}+e\hat{A})+\frac{e}{m}\underline{\hat{S}}\cdot\underline{B}-e\varphi$　　　　（4 分）

B. 碱金属原子能级偶数分裂　　　　（1 分）

光谱线偶数条　　　　（1 分）

分裂能级间距与能级有关　　　　（1 分）

由于电子具有自旋　　　　（1 分）

C. $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1$，$\hat{H}_0\varphi_k=E_k^0\varphi_k$　　　　(2 分)

$$E_k^{(1)}=\langle\varphi_k|\hat{H}_1|\varphi_k\rangle，\quad E_k^{(2)}=\sum_{s\neq k}\frac{\left|\langle\varphi_s|\hat{H}_1|\varphi_k\rangle\right|^2}{E_k^0-E_s^0}$$　　（2 分）

D. $\sigma_+^2=(\sigma_x+i\sigma_y)(\sigma_x+i\sigma_y)=\sigma_x^2-\sigma_y^2+i(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x)=0$　　（2 分）

$\sigma_-^2=(\sigma_x-i\sigma_y)(\sigma_x-i\sigma_y)=\sigma_x^2-\sigma_y^2-i(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x)=0$　　（2 分）

E. $\rho(x,t)=|\varphi(x,t)|^2$　　　　（2 分）

$$j(x,t)=\frac{-i\eta}{2m}[\varphi^*(x,t)\frac{d}{dx}\varphi(x,t)-\varphi(x,t)\frac{d}{dx}\varphi^*(x,t)$$　　（2 分）

$$\frac{d\rho}{dt}=\rho^*(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi$$

$$=\frac{1}{i\eta}(\varphi^*\frac{p_x^2}{2m}\varphi+V\varphi^*\varphi)-\frac{1}{i\eta}(\varphi\frac{p_x^2}{2m}\varphi^*V^*\varphi^*V)$$

$$=\frac{i\eta}{2m}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi^*\frac{d}{dx}\varphi-\varphi\frac{\partial}{\partial x}\varphi^*)$$　　因 $V=V^*$

$$=-\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}$$　　（2 分）

F. a）　基态　$n_1=n_2=0$　　$\eta\omega$　　非简并　　　（1 分）

第一 $\begin{cases}n_1=0,\ n_2=1\\ n_1=1,\ n_2=0\end{cases}$　$2\eta\omega$　　二重　　　（1 分）

第二 $\begin{cases}n_1=0,\ n_2=2\\ n_1=2,\ n_1=0\\ n_1=1,\ n_2=1\end{cases}$　$3\eta\omega$　　三重　　　（2 分）

b）　基态　$n_1=n_2=0$　χ_{00}（总周旋为 **0**）　$\eta\omega$ 非简并　（1 分）

第一 $\begin{cases}n_1=0,\ n_2=1 & \chi_{00}\ \text{(二态相加)}\\ n_1=1,\ n_2=0 & \chi_{1m}\ \text{(二态相减)}\end{cases}$　$2\eta\omega$　四重　（2 分）

第二 $\begin{cases} \mathbf{n}_1=0,\ \mathbf{n}_2=2 & \chi_{00} \\ \mathbf{n}_1=2,\ \mathbf{n}_1=0 & \chi_{1\mathbf{m}} \\ \mathbf{n}_1=1,\ \mathbf{n}_2=1 & \chi_{00} \end{cases}$ **(相加)** / **(相减)**　$3\eta\omega$　五重　（2 分）

c. 基态 $\mathbf{n_1=n_2=0}$　　$\eta\omega$　非简并　（1 分）

第一 $\begin{cases} \mathbf{n}_1=0,\ \mathbf{n}_2=1 \\ \mathbf{n}_1=1,\ \mathbf{n}_2=0 \end{cases}$　**(二态相加)**　非简并　（1 分）

第二 $\begin{cases} \mathbf{n}_1=0,\ \mathbf{n}_2=2 \\ \mathbf{n}_1=2,\ \mathbf{n}_1=0 \\ \mathbf{n}_1=1,\ \mathbf{n}_2=1 \end{cases}$　**(二态相加)**　二态简并　（2 分）

Ⅱ.（14 分）

归一化 $\mathbf{A}^2(\int_{-\infty}^{0}\mathbf{e}^{2\mathbf{x}/\mathbf{a}}\mathbf{dx}+\int_{0}^{\infty}\mathbf{e}^{-2\mathbf{x}/\mathbf{a}}\mathbf{dx})=\mathbf{A}^2\mathbf{a}=1$，$\mathbf{A}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}}}$　（2 分）

$$\mathbf{E_{(a)}}=\frac{-\eta^2}{2\mathbf{am}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}[(-\frac{1}{\mathbf{a}})\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}}\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}]\mathbf{dx}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\mathbf{m}\omega^2\mathbf{x}^2\mathbf{e}^{-\frac{2|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}\mathbf{dx}$$

$$=\frac{-\eta^2}{2\mathbf{am}}(-\frac{1}{\mathbf{a}})\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}(2\delta_{(\mathbf{x})}\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}-\frac{1}{\mathbf{a}}\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}})\mathbf{dx}+\frac{1}{2}\mathbf{m}\omega^2\frac{1}{2}\mathbf{a}^2$$

$$=\frac{\eta^2}{2\mathbf{a}^2\mathbf{m}}(2-\frac{1}{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a})+\frac{1}{2}\mathbf{m}\omega^2\frac{1}{2}\mathbf{a}^2$$

$$=\frac{\eta^2}{2\mathbf{a}^2\mathbf{m}}+\frac{1}{4}\mathbf{m}\omega^2\mathbf{a}^2$$　（6 分）（动能计算错扣 3 分）

另一种求法 $\mathbf{E_{(a)}}=\frac{1}{2\mathbf{am}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{x}}^2\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}\mathbf{dx}+\frac{1}{4}\mathbf{m}\omega^2\mathbf{a}^2$

$$=\frac{1}{2\mathbf{am}}\int_{-\infty}^{\infty}(-\mathbf{i}\eta\frac{-1}{\mathbf{a}}\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}}\mathbf{e}^{\frac{2|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}})^*(-\mathbf{i}\eta\frac{-1}{\mathbf{a}}\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}}\mathbf{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}})\mathbf{dx}+\frac{1}{4}\mathbf{m}\omega^2\mathbf{a}^2$$

$$=\frac{\eta^2}{2\mathbf{a}^3\mathbf{m}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{e}^{-\frac{2|\mathbf{x}|}{\mathbf{a}}}\mathbf{dx}+\frac{1}{4}\mathbf{m}\omega^2\mathbf{a}^2$$

$$=\frac{\eta^2}{2\mathbf{a}^2\mathbf{m}}+\frac{1}{4}\mathbf{m}\omega^2\mathbf{a}^2$$

$\mathbf{E}'_{(\mathbf{a})}=\frac{-\eta^2}{\mathbf{a}^3\mathbf{m}}+\frac{1}{2}\mathbf{m}\omega^2\mathbf{a}=0$，$\mathbf{a}^4=\frac{2\eta^2}{\mathbf{m}^2\omega^2}$　（3 分）

$\mathbf{E_{min}}=\frac{\eta}{2\mathbf{m}}\sqrt{\frac{\mathbf{m}^2\omega^2}{2\eta^2}}+\frac{1}{4}\mathbf{m}\omega^2\sqrt{\frac{2\eta^2}{\mathbf{m}^2\omega^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\eta\omega$　（3 分）

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{|x|}{a}},\ a^2 = \sqrt{2}\frac{\eta}{m\omega}$$ （结果错扣 3 分）

III. （16 分）

A. $\begin{vmatrix} E_0 & \Delta E \\ \Delta E & E_0 - E \end{vmatrix} = 0$， $\therefore\ E_\pm = E_0 \pm \Delta E$

$$E_+ = E_0 + \Delta E，\quad u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$ （2 分）

$$E_- = E_0 - \Delta E，\quad u_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$ （2 分）

B. $\psi_{(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a_+u_+ + a_-u_- = \frac{1}{\sqrt{2}}u_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}u_-$ （4 分）

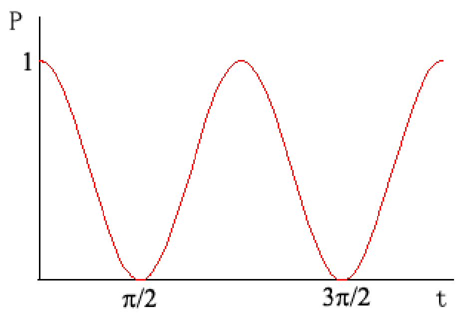
$$\psi_{(t)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-i(E_0+\Delta E)t/\eta} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-i(E_0+\Delta E)t/\eta}$$

$$= e^{-iE_0t/\eta}\begin{pmatrix}\cos\Delta Et/\eta \\ -i\sin\Delta Et/\eta\end{pmatrix}$$ （4 分）

C. 几率

$$p_{\varphi_1} = \cos^2\frac{\Delta E}{\eta}t = \frac{1}{2}(1+\cos\frac{2\Delta E}{\eta}t)$$ （2 分）

（2 分）



IV.（15 分）

$$p_{100-211} = \frac{1}{\eta}\left|\int_0^\infty [\int \psi_{211}^*(exE_0e^{-t/\tau})\psi_{100}d\underline{r}]e^{-\omega_{21}t}dt\right|^2$$ （6 分）

$$= \frac{e^2E_0^2}{\eta^2}|\langle R_{21}|r|R_{10}\rangle|^2\left|\int_0^\infty e^{-t(\frac{1}{\tau}-i\frac{3e'^2}{8a_0\eta})}dt\right|^2 \cdot \left|\int\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{11}^*(Y_{1-1}-Y_{11})\frac{1}{\sqrt{4\pi}}d\Omega\right|^2$$

（6 分）

$$= \frac{e^2 E_0^2}{6\eta^2} \left| \langle R_{21} | r | R_{10} \rangle \right|^2 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{\tau})^2 + \frac{9e^4}{64 a_0^2 \eta^2}}$$ （结果正确 3 分）

Ⅴ.（10 分）

第一种做法：取 $\underline{a}$ 为 z 轴，$\underline{b}$ 在 (x, z) 平面与 $\underline{a}$ 夹角为 θ

$$\overline{(\underline{a}\cdot\underline{\sigma}_1)(\underline{b}\cdot\underline{\sigma}_2)} = \overline{\sigma_{1z}(\sin\theta\sigma_{2x} + \cos\theta\sigma_{2z})}$$ （3 分）

由于 $\sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$（在 σ_{2z} 表象）

$\sigma_{1z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$（在 σ_{2z} 表象） （2 分）

则 $\sigma_{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2$，$\sigma_{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2$ （2 分）

$\overline{\sigma_{1z}\sigma_{2x}} = 0$, 而 $\overline{\sigma_{1z}\sigma_{2z}} = -1$ （2 分）

$\therefore \quad \overline{(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}_1)(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}_2)} = -\cos\theta = -\underline{a}\cdot\underline{b}$ （1 分）

第二种做法：直接求

$$\overline{(\underline{a}\cdot\underline{\sigma}_1)(\underline{b}\cdot\underline{\sigma}_2)} = \overline{(a_x\sigma_{1x} + a_y\sigma_{1y} + a_{1z}\sigma_{1z})(b_x\sigma_{2x} + b_y\sigma_{2y} + b_{2z}\sigma_{2z})}$$

$$= \overline{a_x b_x + \sigma_{1x}\sigma_{2x} + a_x b_y \sigma_{1x}\sigma_{2y} + a_x b_z \sigma_{1x}\sigma_{2z})}$$

$$+ \overline{a_y b_x \sigma_{1y}\sigma_{2x} + a_y b_y \sigma_{1y}\sigma_{2y} + a_y b_z \sigma_{1y}\sigma_{2z})}$$

$$+ \overline{a_z b_x \sigma_{1z}\sigma_{2x} + a_z b_y \sigma_{1z}\sigma_{2y} + a_z b_z \sigma_{1z}\sigma_{2z})}$$

$$= -a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = -\underline{a}\cdot\underline{b} = -\cos\theta$$

第三种做法：$\overline{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{a})(\underline{\sigma}_2\cdot\underline{b})} = \overline{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{a})[(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2 - \underline{\sigma}_1)\cdot\underline{b}}$

$$= -\overline{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{a})(\underline{b}\cdot\underline{\sigma}_1)} + \overline{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{a})(\underline{\sigma}\cdot\underline{b})}$$

$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2$

而 $\overline{\underline{\sigma}} = 0$，$\therefore \overline{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{a})(\underline{\sigma}_2\cdot\underline{b})} = -\overline{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{a})(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{b})}$

$$= -\overline{[\underline{a}\cdot\underline{b} + i\underline{\sigma}_1\cdot(\underline{a}\times\underline{b})]}$$

但 $\overline{\underline{\sigma}}_1 = 0$，$\therefore \overline{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{a})(\underline{\sigma}_2\cdot\underline{b})} = -\underline{a}\cdot\underline{b}$