2006 级物理学院等力学期末考试

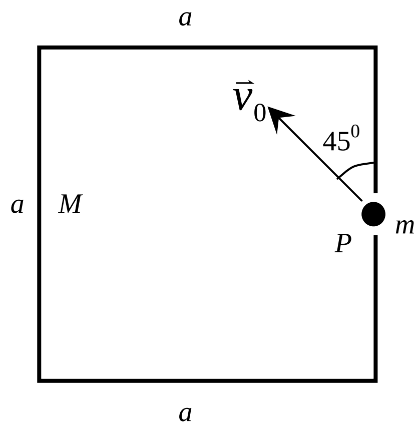
学号：__________________姓名：___________________院系：__________________

试卷总分：100 分　　　　　　　　　　答卷时间：2 小时

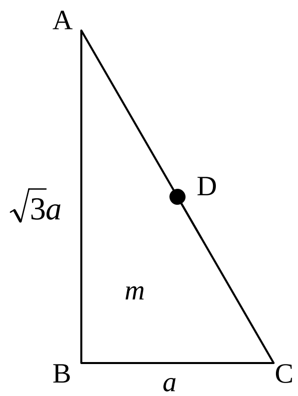
题号	一	二	三				总分
	1-10	11-14	15	16	17	18	
得分							

一、　填空（每空 2 分，共 40 分）

1、各边长为 a、质量为 M 的匀质刚性正方形细框架，开始时静止在光滑水平大桌面上，框架右侧边中央有一小孔 P，桌面上另有一个质量为 m 的小球以初速 $\vec{v}_0$ 从小孔 P 外射入。设 $\vec{v}_0$ 的方向如图所示，小球与框架碰撞无摩擦且为弹性。小球在框架内经过时间 t = $\underline{2\sqrt{2}a/v_0}$，又从小孔 P 射出，过程中{框架，小球}系统的质心 C 通过的位移量 $\vec{s}_C$ = $\underline{\dfrac{m}{m+M}\dfrac{2\sqrt{2}a}{v_0}\vec{v}_0}$（或 $t\cdot\dfrac{m}{m+M}\vec{v}_0$）。



2、质量 m、直角边长分别为 a、$\sqrt{3}a$ 的匀质直角三角板 ABC，如图所示，其中 D 为斜边 AC 的中点。分别设置过 A、B、C、D 点且与板面垂直的四个转轴，三角板相应的转动惯量分别记为 I_A、I_B、I_C、I_D，则 I_D = $\underline{\dfrac{1}{3}ma^2}$。余下的 I_A、I_B、I_C 中最小者为 $\underline{I_B}$（填 I_A、I_B 或 I_C）。

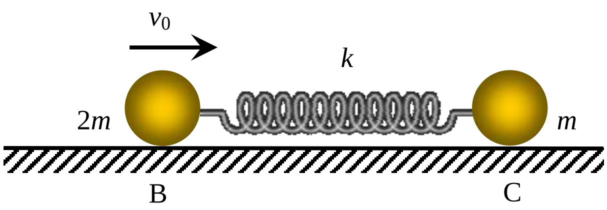


3、粘滞系数为 η，流速为 v 的流体，η 越大，其雷诺数越__小__；v 越大，

其雷诺数越 <u>大</u> 。

4、密度记为ρ的小雨珠可近似成半径为 r 的球体，在空气中下落时略去空气浮力，所受空气粘性阻力(空气粘度记为η)可按斯托克斯公式 $\underline{6\pi r\eta v}$ 计算，则雨珠下落的终极速度 $v_e=$ $\underline{2r^2\rho g/9\eta}$ 。

5、在光滑的水平地面上，质量分别为 2m 和 m 的小球 B 和 C 间用一根劲度系数为 k 的均匀轻长弹簧连接，开始时 B、C 静止，弹簧处于自由长度状态。如图所示，使 B 具有朝着 C 的初速度 v_0，在{B、C、弹簧}系统质心系中，B、C 都将相对质心作简谐振动，振动角频率ω $=\underline{\sqrt{3k/2m}}$；B 相对质心振动的振幅 A = $\underline{\dfrac{v_0}{3}\sqrt{2m/3k}}$ 。



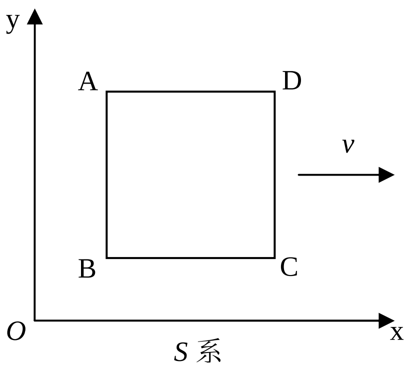
6、阻尼振动的微分方程为 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$，形成低阻尼振动的条件是 $\underline{\beta<\omega_0}$，对应的通解为 $x=\underline{Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\phi)}$，其中 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ 。

7、同频率、同振动方向、振幅同为 A、波长同为λ的两列行波，相向传播时可形成驻波。驻波波腹处振动的振幅为 <u>2A</u> ，波腹与其相邻的波节之间的距离为 $\underline{\lambda/4}$ 。

8、设波源 S 在介质中的运动速度为 v_S，波在介质中的传播速度为 u。如果 $u>v_S$，在 S 正前方一个相对介质静止的观察者接收到的波的振动频率ν与波源 S 振动频率ν_0之间的关系为ν $=\underline{\dfrac{u}{u-v_S}\nu_0}$ 。

如果 $u<v_S$，波源的运动会在介质中激起圆锥面形的冲击波，锥面半顶角

9、如图所示，各边静长为 L 的正方形面板 ABCD，在惯性系 S 的 xy 坐标面上以匀速度 v 沿 x 轴运动。运动过程中 AB 边和 BC 边各点均朝 x 轴连续发光，在 S 系中各点发光方向均与 y 轴平行。这些光在 x 轴上照亮出一条随着面板运动的轨迹线段， 它的长度



$l = \underline{\sqrt{1-\beta^2}+\beta,}\ \underline{\beta=\frac{v}{c}}$____________L。若改取 AB 边静长为 L′，BC 边静长仍为 L 的长方形面板，当 v=0.6c 时，x 轴上运动的轨迹线段长度恰好等于 L，那么必有 L′= $\underline{\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\big/\beta = 1/3}$ L。

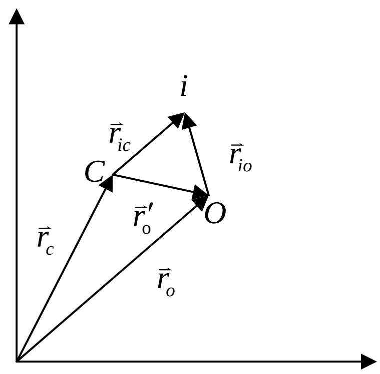
10、　　静质量为 m_0 的物体密度为常量 ρ_0，当平动加速到其动能为静能的 n 倍时，速度 v=$\underline{\sqrt{n(n+2)}\big/n+1c}$，它的密度 $\rho=\underline{(n+1)^2}\ \rho_0$。

二、　　简答（每题 5 分，共 20 分）

11、写出质点系在其质心参考系中相对任一参考点 O 的角动量定理，并简述导出过程。

$$\frac{dJ'}{dt} = M_{外c} + \vec{r}_o{}' \times \vec{F}_c - \vec{r}_o' \times \vec{F}_{外}$$

$$\begin{aligned}
J' &= \sum_i m_i \vec{r}_{io}' \times \vec{v}_{io}' \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{r}_{ic}' - \vec{r}_o'\right) \times \vec{v}_{io}' \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_{ic}' \times \vec{v}_{ic}' - \sum_i m_i \vec{r}_o' \times \vec{v}_{ic}' \\
&= J_c - \vec{r}_o' \times \sum_i m_i \vec{v}_{ic}' \\
\Rightarrow \frac{dJ'}{dt} &= \frac{dJ_c}{dt} - \vec{r}_o' \times \sum_i m_i \vec{a}_{ic}' \\
&= M_{外c} - \vec{r}_o' \times \left(\vec{F}_{外} - \vec{F}_c\right)
\end{aligned}$$



12、写出复摆能量守恒方程，导出复摆摆动的动力学微分方程，给出小角度复摆的摆动周期公式。

$$mgr_c\left(1-\cos\theta\right) + \frac{1}{2} I\omega^2 = \mathrm{co}\,nst$$

两边求导：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mgr_c}\,\omega\sin\theta + I\omega\frac{d\omega}{dt} = 0 \\
&\Rightarrow I\frac{d^2\omega}{dt^2} + mgr_c\cos\theta\omega = 0 \\
&\Rightarrow \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{mgr_c}{I}\omega = 0 \\
&\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_c}}
\end{aligned}$$

13、弹性介质中纵波的运动方程设为

$\xi = A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]$， $u=\sqrt{E/\rho}$，E：介质杨氏模量，ρ：介质密度

据此导出波的能量密度表达式。

解：考虑微元：截面积 dS，长度 dx，

动能为： $dE_K = \frac{1}{2}\rho(dS\cdot dx)\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]dS\cdot dx$

势能为

$$\begin{aligned} dE_P &= \frac{1}{2}k_{dx}\left[\xi(x+dx,t)-\xi(x,t)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{EdS}{dx}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot dx\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}E\frac{\omega^2}{u^2}A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]dS\cdot dx \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]dS\cdot dx \end{aligned}$$

能量密度

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (dE_P + dE_K)/dV \\ &= \rho\omega^2 A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right] \end{aligned}$$

14、由 $dW=\vec{F}\cdot d\vec{l}$， $\vec{F}=d(m\vec{u})/dt$ 和 $m=m_0\Big/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$，导出质点的相对论动能定理，其中 $dW=dE_k$， $E_k = mc^2 - m_0c^2$

$$dm=\frac{mvdv}{c^2-v^2}\Rightarrow dE_k = c^2dm = \frac{c^2mvdv}{c^2-v^2} = mvdv + \frac{mvv^2}{c^2-v^2}dv$$

$$\begin{aligned} &= mvdv + v^2dm \\ &= m\vec{v}\cdot d\vec{v} + v^2dm \\ &= \left(md\vec{v}+\vec{v}dm\right)\cdot\vec{v} \\ &= \vec{v}\cdot d\left(m\vec{v}\right) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\left(m\vec{v}\right) = d\vec{r}\cdot\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \vec{F}\cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

三、　　计算(每题 10 分，共 40 分)

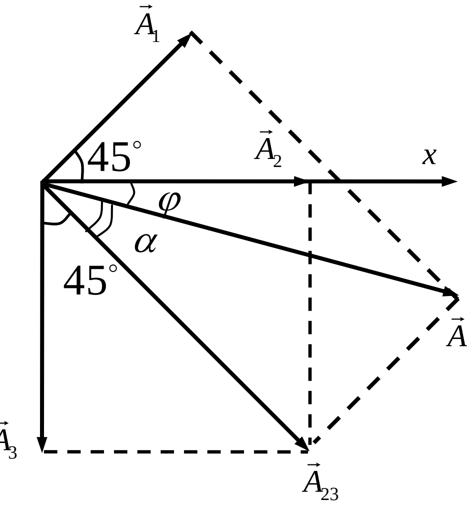
15、质点同时参与的三个同方向、同频率简谐振动分别为

$$x_1 = A_0\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}), x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}A_0\cos\omega t, x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}A_0\sin\omega t$$

试用简谐振动的矢量图示方法，确定质点的合振动。

解：x_1，x_2，x_3 各自对应矢量 $\vec{A}_1$，$\vec{A}_2$，$\vec{A}_3$。合振动：

$x_{23} = x_2 + x_3$ 对应矢量 $\vec{A}_{23} = \vec{A}_2 + \vec{A}_3$ 的方位如图示：



模量为：

$A_{23} = \sqrt{A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{3}A_0$

质点合振动　$x = x_1 + x_2 + x_3$

对应矢量：$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$

其模量以及与 x 轴的夹角分别为：

$A = \sqrt{A_1^2 + A_{23}^2} = 2A_0$ ，

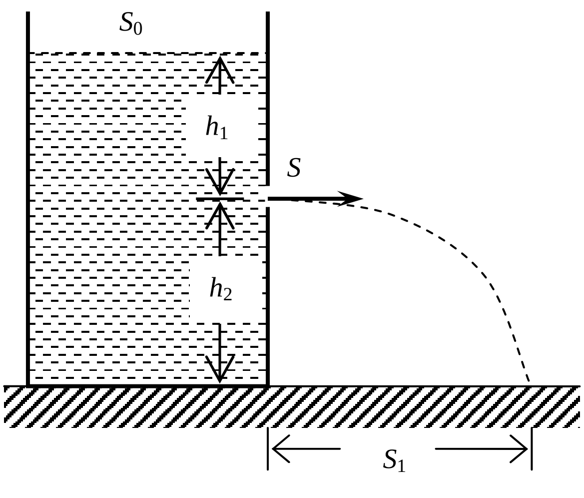
$\phi = 45^0 - \alpha = 45^0 - \arctan(A_1/A_{23}) = 15^0 = \pi/12$

得：　　$x = A\cos(\omega t - \phi) = 2A_0\cos(\omega t - \pi/12)$

16、水平地面上一个截面积为 S_0 的敞口桶内盛有高 h_1+h_2 的水，桶的侧面有一个截面积 $S = 0.01S_0$ 的小孔，孔与水面相距 h_1，如图所示。

（1）试求从小孔开始出水到小孔停止出水所经时间 t；

（2）小孔刚射出的水，落地时的水平射程记为 S_1，如果将小孔改取在原水面下方 h_2 处，对应的初始水平射程记为 S_2，试求　$\Delta S = S_2 - S_1$。



解：（1）t 时刻水面与小孔距离记为 h，小孔流速

$$v = \sqrt{2gh}$$

dt 时间出水量

$$dv = vSdt = \sqrt{2gh}Sdt$$

dt 时间 h 的减少量

$$-dh = dv/S_0 = \frac{S}{S_0}\sqrt{2gh}dt$$

积分 $$\int_0^t dt = -\frac{S_0}{\sqrt{2gh}}\int_{h_1}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

得 $$t = \frac{S_0}{\sqrt{2g}S}2\sqrt{h_1} = 200\sqrt{\frac{h_1}{2g}} = 100\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

（2） $$S_1 = v_1\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 2\sqrt{h_1h_2}, S_2 = v_2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{h_2h_1}$$

$$\Rightarrow \Delta S = S_1 - S_2 = 0$$

17、系统的俯视图与侧视图如图 1、图 2 所示，若能处于图 2 所示稳定的匀加速纯滚动状态，在 $M = 2m$ 的条件下，试求缠绕在圆柱体上的轻绳与水平导轨间的夹角θ。

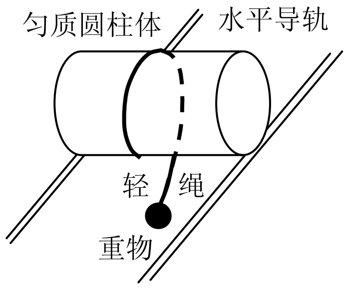


图 1

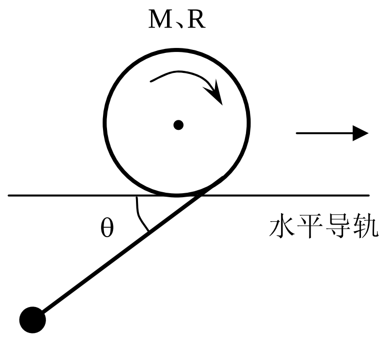


图 2

解：

$$m:\begin{cases} mg\cot\theta = ma \\ \dfrac{mg}{\sin\theta} - T = m\beta R = ma \end{cases}$$

$$M:\begin{cases} f - T\cos\theta = Ma = 2ma \\ \left(T - f\right)R = I\beta = \dfrac{1}{2}MR^2\beta = mRR\beta = mRa \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a = g\cot\theta & (1) \\ \dfrac{mg}{\sin\theta} - T = ma & (2) \\ f - T\cos\theta = 2ma & (3) \\ T = f = ma & (4) \end{cases}$$

将（4）带入（2）（3）式得：

$$\frac{mg}{\sin\theta} - f = 2ma\text{，}\quad f(1-\cos\theta) = ma(2+\cos\theta)$$

两式联立，消去$\dfrac{1}{2}f$，得

$$\left(\frac{mg}{\sin\theta} - 2ma\right)\left(1-\cos\theta\right) = ma\left(2+\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow g\left(1-\cos\theta\right) = a\left(4-\cos\theta\right)\sin\theta$$

再将（1）式带入解得

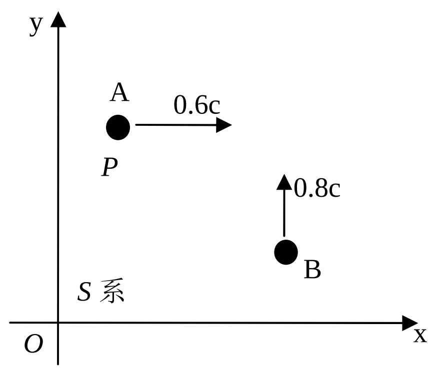
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{25-4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right) \\ \theta = 77.95^\circ = 78^\circ \end{cases}$$

18 惯性系 S 中有两个静质量同为 m_0 的质点 A、B，它们的速度分别沿 x、y 方向，速度大小分别为 0.6c、0.8c。某时刻质点 A 位于 xy 平面上的 P 处，质点 B 也在 xy 平面上，如图所示。

（1） S 系认定再过 $\Delta t = 5s$，A 和 B 会相碰，试问 A 认为还需经多长时间 Δt_A 与 B 相碰？

（2） A 认为自己位于 S 系 P 处时，质点 B 与其相距 l，试求 l；

（3） 设 A、B 相碰后粘连，且无任何形式能量耗散，试在 S 系中计算粘连体的静质量 M_0。



解：（1）S 系用两个静止的时钟测得$\Delta t = 5s$，S 系认为 A 系是用一个相对 S 系运动的时钟测得Δt_A，故有

$$\Delta t_A = \sqrt{1 - \frac{{v_A}^2}{c^2}} \qquad \Delta t = 4s$$

（2）B 的速度

S 系：$u_x = 0, u_y = 0.8c$

A 系：$u'_x = \dfrac{u_x - v_A}{1 - \dfrac{v_A}{c^2} u_x} = -0.6c, u'_y = \sqrt{1 - \dfrac{{v_A}^2}{c^2}} u_y \Big/ 1 - \dfrac{v_A}{c^2} u_x = \dfrac{3.2}{5} c$

A 系中速度大小为：

$$u'_B = \sqrt{{u'_x}^2 + {u'_y}^2} = 0.877c$$

故

$$l = u'_B \Delta t_A = 3.51 c \cdot s$$

（3）

碰前：$m_A = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \dfrac{{v_A}^2}{c^2}} = \dfrac{5}{4} m_0, m_B = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \dfrac{{v_B}^2}{c^2}} = \dfrac{5}{3} m_0$

碰后：M, u_x, u_y，则有

$$M = m_A + m_B = \frac{35}{12} m_0$$

$$Mu_x = m_A \cdot 0.6c = \frac{3}{4} m_0 c \Rightarrow u_x = \frac{35}{9} c$$

$$Mu_y = m_B \cdot 0.8c = \frac{4}{3} m_0 c \Rightarrow u_y = \frac{16}{35} c$$

$$\Rightarrow u^2 = {u_x}^2 + {u_y}^2 = \frac{337}{35^2} c^2$$

$$\Rightarrow M_0 = M \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{35}{12} m_0 \sqrt{1 - \frac{337}{35^2}} = \frac{\sqrt{888}}{12} m_0$$

$$M_0 = \frac{\sqrt{888}}{12} m_0 = 2.5 m_0$$