

# 第九章 原子核反应

---

原子核与原子核，或者原子核与其它粒子（例如中子、 $\gamma$ 光子等）之间的相互作用所引起的原子核的各种变化叫做核反应。

目的：认识原子核结构，应用核效应。

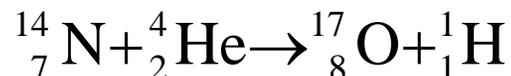
核反应与核衰变的区别：自发与外在作用的区别  
变化范围与程度相差很大

## § 9.1 核反应概述

### 1. 实现核反应的途径

必须使相互作用粒子接近到核力作用范围之内，即小于 $10^{-14}\text{m}$ 的数量级。

(1) 用放射源产生的高速粒子去轰击原子核。



$\alpha$ 粒子称为入射粒子，也叫轰击粒子； ${}^{14}_7\text{N}$ 核称为靶核； ${}^{17}_8\text{O}$ 和 ${}^1_1\text{H}$ 统称为反应产物，其中较重者称为剩余核，较轻者称为出射粒子。通常把反应式简写为



$\alpha$ 用放射源提供入射粒子来研究核反应，入射粒子种类很少，强度不大，能量不高，而且不能连续可调。目前已很少用了。

(1) 利用宇宙射线来进行核反应。

(2) 利用带电粒子加速器或反应堆来进行核反应。

人们已经可以使用种类繁多、能区宽、束流强和品质好的入射束流进行核反应实验，从而极大地扩展了核反应的研究领域。

静电加速器

串列静电加速器

直线加速器

回旋加速器

同步回旋加速器

对撞机

次级束流线与储存环

## 2. 核反应的分类

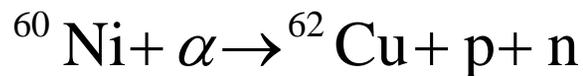
核反应的表示:



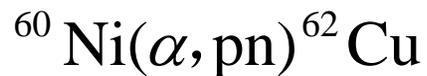
或



当入射粒子能量较高时，出射粒子可以不止一个，而有两个或两个以上。  
例如30MeV的 $\alpha$ 粒子轰击 $^{60}\text{Ni}$ ，可以产生反应：

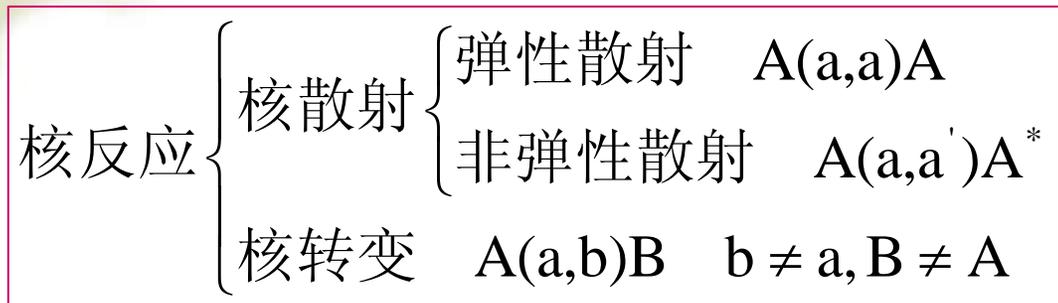


简写为

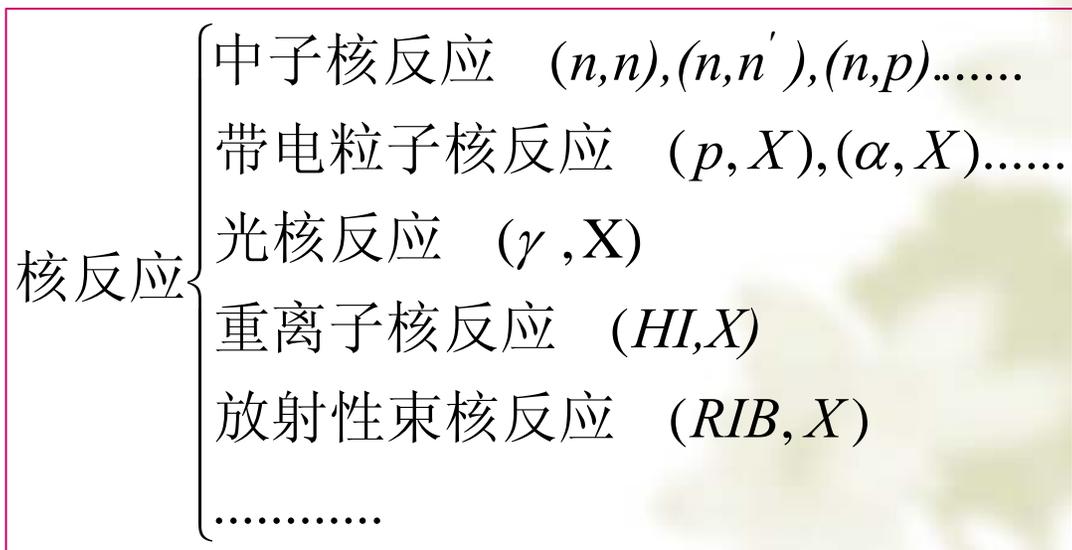


## 核反应分类

### 按出射粒子



### 按入射粒子种类



## 按入射能量

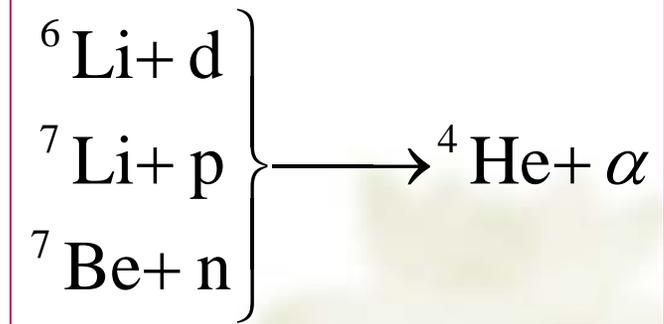
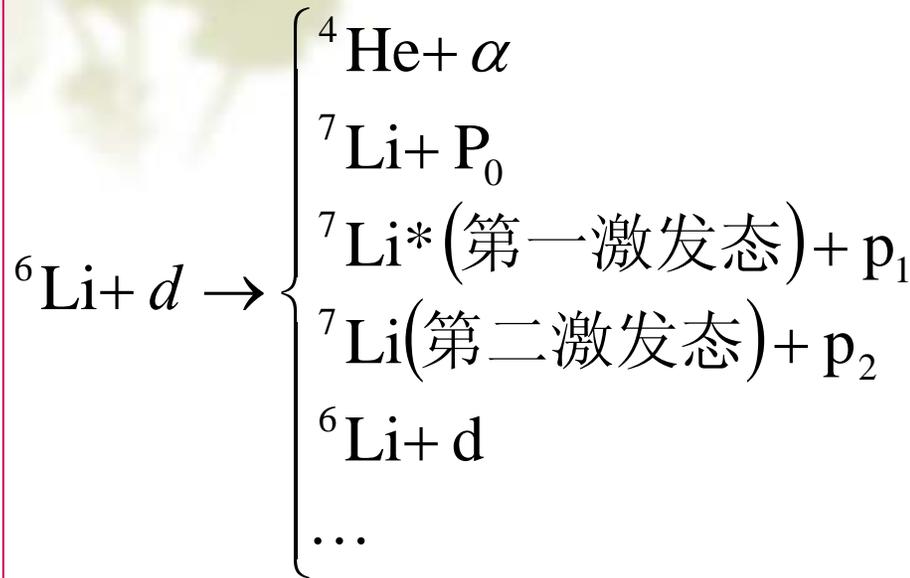
核反应	低能核反应 $E/A < 30\text{MeV}$	小于费米能
	中能核反应 $30\text{MeV} < E/A < 1000\text{MeV}$	大于费米能
	高能核反应 $1000 \text{ MeV} < E/A$	亚核子自由度

## 按物理机制

核反应	复合核反应
	熔合反应
	直接核反应
	碎裂反应
	深度非弹反应
	.....

### 3. 反应道

对一定的入射粒子和靶核，能发生的核反应过程往往不止一种。例如，能量为2.5MeV的氘核轰击 ${}^6\text{Li}$ 时，可以产生下面一些反应：



式中 $p_0$ ， $p_1$ 和 $p_2$ 分别表示相应反应中放出的质子。

每一种核反应过程，称为一个反应道。反应前的道称为入射道，反应后的道称为出射道，对于同一个入射道，可以有若干个出射道，对于同一个出射道，也可以有若干个入射道。产生各个反应道的概率是不等的，而且这种概率随入射粒子能量的变化而不同。

## 4. 观测量与守恒定律

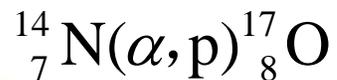
物理观测量：粒子种类（粒子鉴别）、截面、能量、角度，极化度.....

直接观测量：能量、位置、飞行时间、飞行径迹、记数率.....

核反应过程主要遵守以下几个守恒定律：

- (1) 电荷守恒。即反应前后的总电荷数不变。
- (2) 质量数守恒。即反应前后的总质量数不变。只对低能反应适用。
- (3) 能量守恒。即反应前后体系的总能量（静止能量和动能之和）不变。
- (4) 动量守恒。即反应前后体系的总动量不变。
- (5) 角动量守恒。即在反应过程中，总角动量不变。
- (6) 宇称守恒。即对每一类型的核反应，体系总的宇称不变。

例:



${}^{14}_7\text{N}$  核和  $\alpha$  粒子的角动量分别为**1**和**0**，宇称都是**+1**。若两者对心或低能碰撞，则其轨道角动量为**0**，于是反应前体系的总角动量为**1**，总宇称是**+1**。

${}^{17}_8\text{O}$  核和质子的角动量分别为**5/2**和**1/2**，宇称都是**+1**。角动量的矢量和是**2**或**3**。为了保持反应后体系的总角动量也是**1**，核与质子间的轨道角动量***l***只能取以下可能值：**1, 2, 3**或**2, 3, 4**。为了保持宇称守恒，轨道角动量只能取**2**和**4**。

## § 9.2 反 应 能

应用能量守恒定律和动量守恒定律

### 1. 反应能

核反应过程中释放出的动能，称为反应能，通常用符号 $Q$ 表示。

$Q > 0$ 的反应叫做放能反应， $Q < 0$ 的反应叫做吸能反应。

考虑反应能后，核反应的表示式为



例如反应



其 $Q$ 为正值，所以它是放能反应。

## 对于两体过程

令 $E_A$ ,  $E_a$ ,  $E_B$ ,  $E_b$ 分别表示靶核、入射粒子、剩余核、出射粒子的动能;  $m_A$ ,  $m_a$ ,  $m_B$ ,  $m_b$ 分别表示它们的静止质量, 根据反应能的定义有

$$Q = E_B + E_b - E_A - E_a$$

$$\begin{aligned} Q &= \Delta mc^2 \\ &= (m_A + m_a - m_B - m_b)c^2 \\ &= (M_A + M_a - M_B - M_b)c^2 \end{aligned}$$

## 2. $Q$ 方程

由于靶核在实验中往往是固定的, 即 $E_A = 0$ , 则

$$Q = E_B + E_b - E_a$$

用 $\mathbf{P}_a$ ,  $\mathbf{P}_B$ ,  $\mathbf{P}_b$ 分别表示粒子a, B, b的动量, 按动量守恒定律有:

$$\vec{P}_a = \vec{P}_b + \vec{P}_B$$

令 $\theta$ 表示出射粒子b的出射角, 即

出射粒子与入射粒子方向间的夹角

$$p_B^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta$$

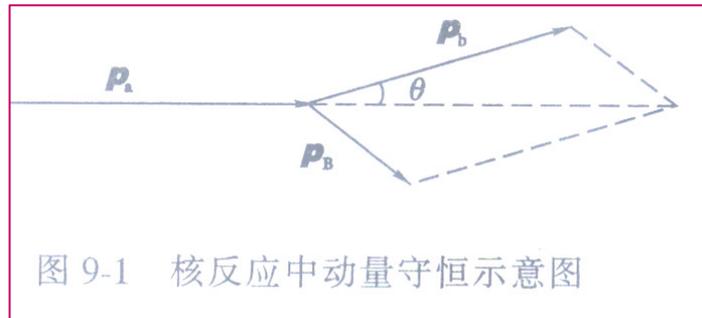


图 9-1 核反应中动量守恒示意图

因,  $p^2 = 2mE$ , 则有

$$m_B E_B = m_a E_a + m_b E_b - 2(m_a m_b E_a E_b)^{1/2} \cos \theta$$

消去 $E_B$ , 得到

$$Q = \left( \frac{m_a}{m_B} - 1 \right) E_a + \left( \frac{m_b}{m_B} + 1 \right) E_b - \frac{2(m_a m_b E_a E_b)^{1/2} \cos \theta}{m_B}$$

$$Q = \left( \frac{A_a}{A_B} - 1 \right) E_a + \left( \frac{A_b}{A_B} + 1 \right) E_b - \frac{2(A_a A_b E_a E_b)^{1/2} \cos \theta}{A_B}$$

只要测量 $\theta$ 角方向的出射粒子的动能 $E_b$ （因实验中 $E_a$ 一般已知，即可求得 $Q$ 值。当 $\theta = 90^\circ$ 时，上述两式最后一项为零。所以，在 $\theta$ 等于 $90^\circ$ 方向进行测量，计算更为简单。

上式通常称为 $Q$ 方程。

出射粒子的能量 $E_b$ 随出射角 $\theta$ 的变化关系，通常称为能量—角度的动力学关系，或能量角分布，我们用 $E_b(\theta)$ 来表示。可以通过求解 $Q$ 方程得到 $Q$ 方程的解如下：

$$E_b = \left\{ \frac{(A_a A_b E_a)^{1/2}}{A_B + A_b} \cos \theta \pm \left[ \left( \frac{A_B - A_a}{A_B + A_b} + \frac{A_a A_b}{(A_B + A_b)^2} \cos^2 \theta \right) E_a + \frac{A_B}{A_B + A_b} Q \right]^{1/2} \right\}^2$$

### 3. 实验 $Q$ 值

剩余核处于激发态时的 $Q$ 值，通常称为实验 $Q$ 值，用 $Q'$ 表示。

设剩余核的激发能为 $E^*$ ，则激发态剩余核的静止质量为

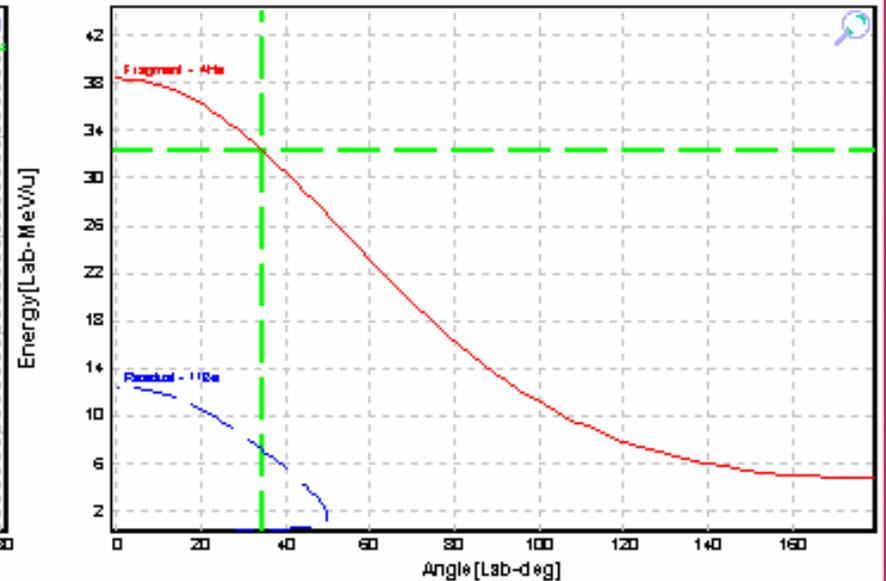
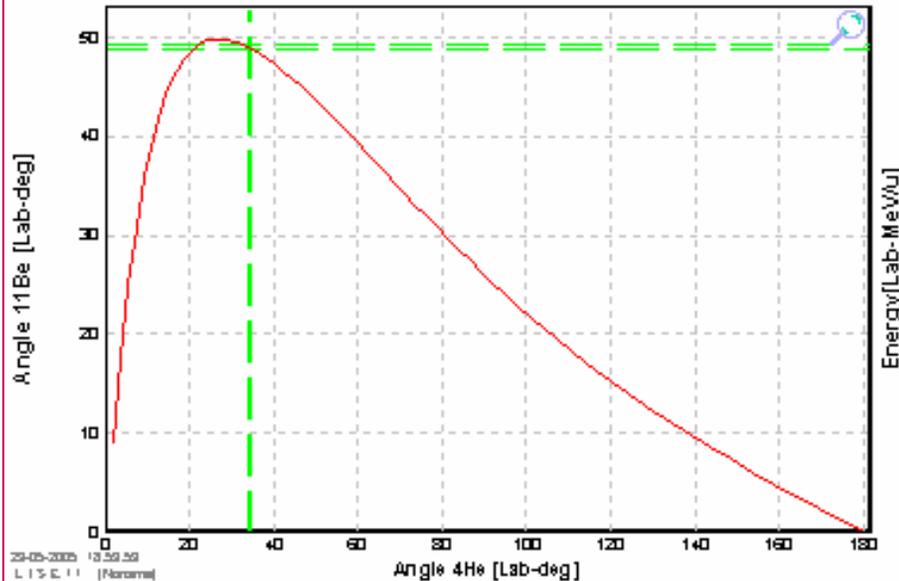
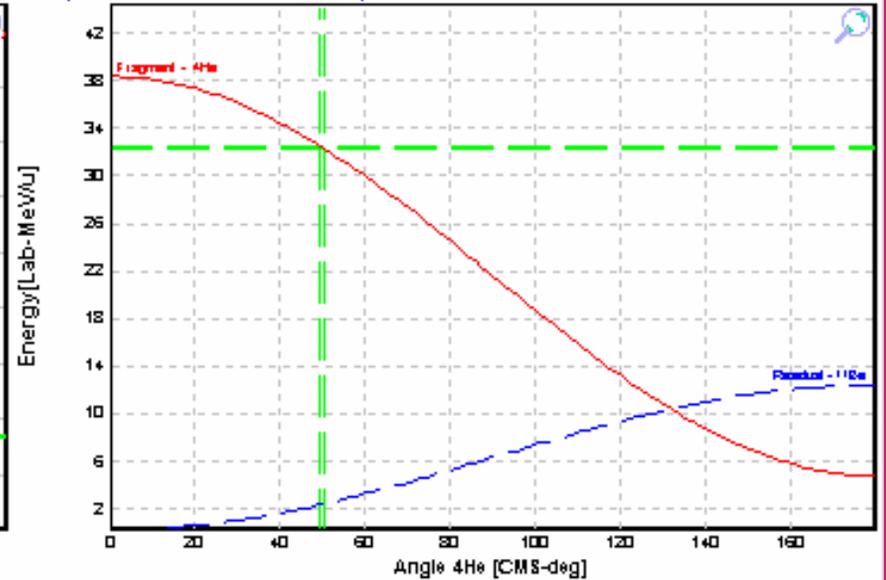
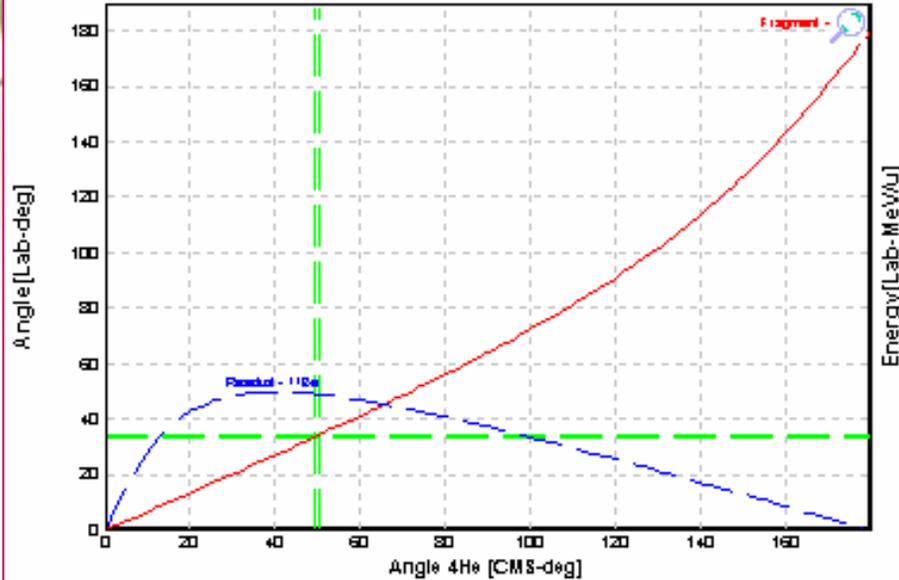
$$m_B^* = m_B + \frac{E^*}{c^2}$$

## Reaction's Kinematics

$6\text{He} + 9\text{Be} \Rightarrow 4\text{He} + 11\text{Be}$      $9\text{Be}(6\text{He}, 4\text{He})11\text{Be}$

Projectile Energy : 24.85 MeV/u

Q reaction : 6.34 MeV (Excitations 0.0+0.0 => 0.0+0.0)



$$\begin{aligned} Q' &= \Delta mc^2 = (m_A + m_a - m_B^* - m_b) c^2 \\ &= (m_A + m_a - m_B - m_b) c^2 - E^* \\ &= Q - E^* \end{aligned}$$

对于 $Q'$ ， $Q$ 方程同样适用  $m_B^* \approx m_B$

例：

## § 9.3 实验室坐标系和质心坐标系

实验室坐标系，简称L系，是指坐标原点固定在实验室中某一点的坐标系。质心坐标系，简称C系，是指坐标原点固定在系统诸粒子的质心上的坐标系。显然，

直接从实验中所取得的数据都是相对于L系。

讨论理论问题时习惯用C系，原因是C系的能量为可用能，且C系与相对运动坐标系有等价关系。

### 1. 质心运动

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{m_a x + m_A \times 0}{m_a + m_A} \\ &= \frac{m_a}{m_a + m_A} x\end{aligned}$$

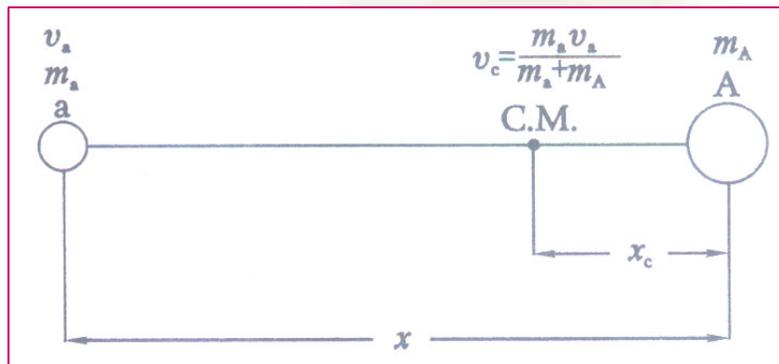


图 9-2 质心速度与入射粒子速度的关系

上式对时间 $t$ 求微商，得

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{m_a}{m_a + m_A} \frac{dx}{dt}$$

$$v_c = \frac{m_a}{m_a + m_A} v_a$$

相对于质心

$$v'_a = v_a - v_c = v_a - \frac{m_a}{m_a + m_A} v_a = \frac{m_A}{m_a + m_A} v_a$$

$$v'_A = v_c = \frac{m_a}{m_a + m_A} v_a$$

约化质量

$$E' = \frac{1}{2} m_a v_a'^2 + \frac{1}{2} m_A v_A'^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_a m_A}{m_a + m_A} v_a^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu v_a^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_A}{m_a} (m_a + m_A) v_c^2$$

$$\mu = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A}$$

$$E' = \frac{m_A}{m_a + m_A} E_a$$

## 2. 吸能反应的阈能 ( $Q < 0$ )

由于在L系中，反应前体系具有动量，则根据动量守恒定律，反应后必有相等的动量。因此，不可能在L系中反应产物没有动能。

在C系中，反应前后体系的动量均等于零，所以C系中反应产物不一定要有动能。最少：

$$E' = |Q|$$

所以

$$E_{\text{th}} = \frac{m_a + m_A}{m_A} |Q|$$

例： $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$

$$E_{\text{th}} = \frac{14 + 4}{14} \times 1.193 = 1.53(\text{MeV})$$

注：能量动量守恒只是反应发生的必要条件，并不充分。

### 3. 出射角在L系与在C系的转换关系

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}'_b + \mathbf{v}_c \quad \frac{v'_b}{\sin \theta_L} = \frac{v_c}{\sin(\theta_c - \theta_L)}$$

定义  $\frac{v_c}{v'_b} \equiv \gamma$

$$\sin(\theta_c - \theta_L) = \gamma \sin \theta_L$$

$$\theta_c = \theta_L + \sin^{-1}(\gamma \sin \theta_L)$$

另一方面

$$v_b \cos \theta_L = v_c + v'_b \cos \theta_c \quad v_b = \left[ v_c^2 + v_b'^2 - 2v_c v_b' \cos(\pi - \theta_c) \right]^{1/2}$$
$$= \left[ v_c^2 + v_b'^2 + 2v_c v_b' \cos \theta_c \right]^{1/2}$$

所以  $\cos \theta_L = \frac{\gamma + \cos \theta_c}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{1/2}}$

$\gamma$  很小或很大?

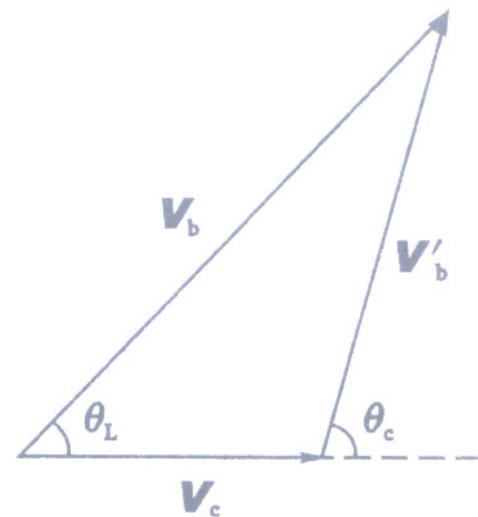


图 9-3  $\theta_L$  与  $\theta_c$  的关系

求 $\gamma$ 的表达式

$$Q = \frac{1}{2}m_b v_b'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2 - E'$$

按动量守恒  $m_b v_b' = m_B v_B'$

$$v_b'^2 = \frac{2m_B}{m_b(m_b + m_B)}(E' + Q)$$

$v_b'$  与在质心系中的角度无关。

$V_c$ 也是 $E'$ 的函数，所以

$$\gamma^2 = \frac{m_a m_b}{m_A m_B} \left( \frac{m_b + m_B}{m_a + m_A} \right) \frac{E'}{E' + Q}$$

用质量数 $A$ 来表示时，注意到反应前后质量数相等，得

$$\gamma = \left( \frac{A_a A_b}{A_A A_B} \cdot \frac{E'}{E' + Q} \right)^{1/2}$$

对于弹性散射， $\gamma$ 与能量无关，因为此时 $Q=0$ ， $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ ， $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ ：

$$\gamma = \frac{A_a}{A_A}$$

两种极端情形：

(1)  $A_A \gg A_a$ 时， $\gamma \approx 0$ 。则由(9.3-14)式得

$$\theta_c = \theta_L$$

(2)  $A_A = A_a$ 时， $\gamma = 1$ 。则由(9.3-14)式得

$$\theta_c = 2\theta_L$$

## 讨论L系和C系的相互转换与 $\gamma$ 的关系

(1)  $\gamma < 1, \quad v_c < v_b'$

(2)  $\gamma > 1,$

$$\sin \theta_{L,m} = \frac{v_b'}{v_c} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\theta_{L,m} = \sin^{-1} \left( \frac{1}{\gamma} \right)$$

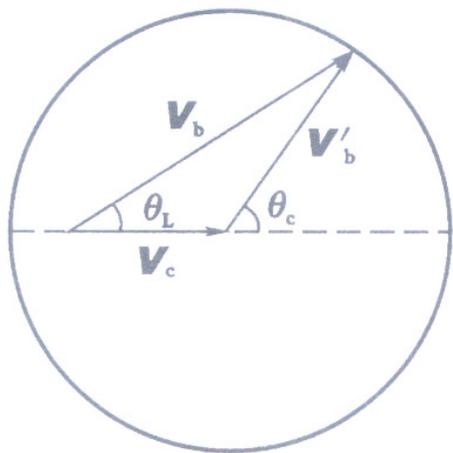


图 9-4  $\gamma < 1$  时  $v_b$ ,  
 $v_c, v'_b$  三者之间的关系

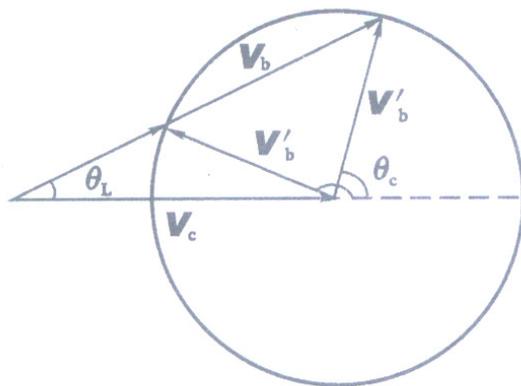


图 9-5  $\gamma > 1$  时  $v_b$ ,  
 $v_c, v'_b$  三者之间的关系

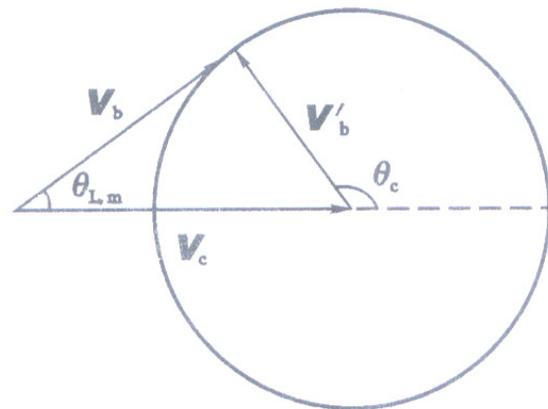


图 9-6  $\gamma > 1$  时  $\theta_L = \theta_{L,m}$  情形

当 $\theta_L > \theta_{L,m}$ 时，不可能出现出射粒子，这种出射粒子只限于半张角为 $\theta_{L,m}$ 的圆锥内的现象，称为圆锥效应。圆锥效应出现的条件是 $\gamma > 1$ 。对于通常的放能反应，只有入射粒子比靶核重的情况下才会出现 $\gamma > 1$ 。对于吸能反应，入射粒子能量在接近阈能时，原则上可以出现圆锥效应，只是发生核反应的概率一般较小。

#### 4. 质心系与相对运动坐标系的关系

实验：转化到质心坐标系

理论：相对运动坐标系

二者等价

## § 9.4 核反应截面与产额

### 1. 反应截面

薄靶：入射粒子垂直通过靶子时能量可以认为不变。

靶厚：单位面积靶上的靶核数为 $N_s = N_v x$ 。

束流强度，即单位时间的入射粒子数为 $I$ 。

单位时间内入射粒子与靶核发生的反应数 $N'$ 应与 $I$ 和 $N_s$ 成正比，

令其比例系数为 $\sigma$ ，则

$$N' = \sigma I N_s$$

$$\sigma = \frac{N'}{I N_s}$$

$$= \frac{\text{单位时间发生的反应数}}{\text{单位时间的入射粒子数} \times \text{单位面积的靶核数}}$$

$\sigma$ 称为反应截面或有效截面。

物理意义：在入射粒子看来，每个靶核所贡献的有效相互作用面积。

$IN_S$ 为单位面积上单位时间内粒子穿越的次数。

理论定义：

$$\sigma = \frac{\int j_{out} r^2 d\Omega}{j_{inc}}$$

与实验定义等价。

$\sigma$  是一个很小的量，大多数情形它要小于或等于原子核的横截面  $\pi R^2$ ，即  $\approx 10^{-24} \text{cm}^2$  的数量级。因此，反应截面  $\sigma$  的单位通常采用  $10^{-24} \text{cm}^2$ ，称为“靶恩”，简称“靶”，记作 **barn** 或 **b**。它是非法定计量单位。按国家标准规定，截面的法定计量单位是  $\text{m}^2$ 。但国际上仍广泛使用 **b**。

$$1 \text{ 靶}(\text{b}) = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ 毫靶}(\text{mb}) = 10^{-27} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ 微靶}(\mu\text{b}) = 10^{-30} \text{ cm}^2$$

对于一定的入射粒子和靶核，往往有若干个反应道。如果 $N'$ 是通过各个反应道的总反应率，则相应的 $\sigma$ 称为核反应的总截面。如果 $N'$ 只是通过某一反应道的反应率，则相应的 $\sigma$ 称为分截面。显然，总截面应该等于所有分截面之和。

截面随入射粒子能量的变化关系称为激发函数。用此函数画成的曲线称为激发曲线。

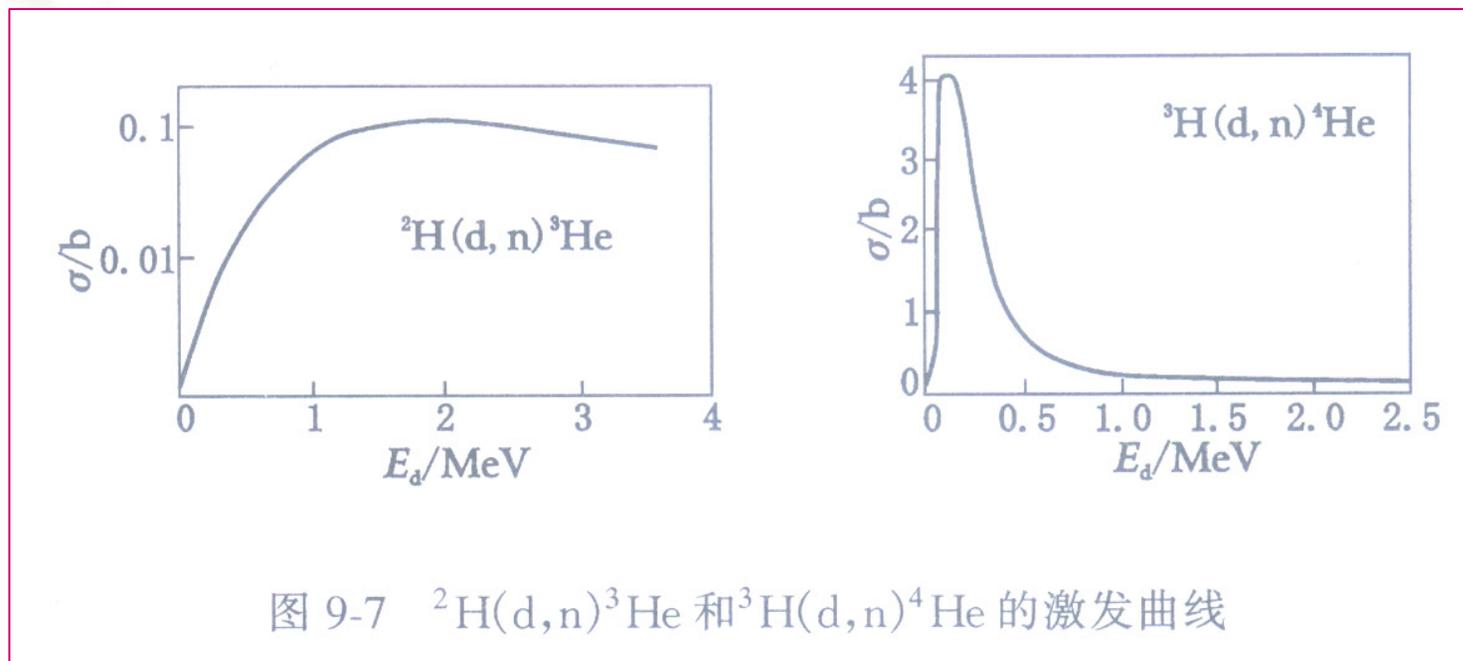


图 9-7  ${}^2\text{H}(d, n){}^3\text{He}$  和  ${}^3\text{H}(d, n){}^4\text{He}$  的激发曲线

## 2. 微分截面和角分布

单位时间出射至  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  和  $\phi \rightarrow \phi + d\phi$  间的立体角  $d\Omega$  内的粒子数为  $dN'$  (见图9-8), 则

$$dN' \propto IN_s d\Omega$$

$$dN' = \sigma(\theta, \phi) IN_s d\Omega$$

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{dN'}{IN_s d\Omega}$$

$$= \frac{\text{单位时间出射至}(\theta, \phi)\text{方向单位立体角内的粒子数}}{\text{单位时间的入射粒子数} \times \text{单位面积的靶核数}}$$

$\sigma(\theta, \phi)$  称为微分截面, 通常也用符号  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  来标记。 $d\Omega$  的单位是球面度, 记作sr, 所以微分截面的单位是靶恩 / 球面度 ( $\text{b}\cdot\text{sr}^{-1}$ ) 或毫靶 / 球面度 ( $\text{mb}\cdot\text{sr}^{-1}$ ) 等。

从实验求得某种反应道的分截面，往往需要通过微分截面的测量，将测量结果对立体角积分而得该反应道的分截面。通常这种分截面也叫积分截面。

$$\begin{aligned} N' &= IN_s \int_{\Omega} \sigma(\theta, \phi) d\Omega \\ &= IN_s \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

对于一般的入射粒子和靶，微分截面对 $\phi$ 角是各向同性的，因而 $\sigma(\theta, \phi)$ 实际上只是 $\theta$ 的函数。于是，

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N'}{IN_s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

微分截面 $\sigma(\theta)$ 随 $\theta$ 的变化曲线称为角分布。

微分截面 $\sigma(\theta)$ 可由实验直接测定。

例1, 例2

### 3. L系和C系微分截面的关系

$$dN'_L = IN_s \sigma_L(\theta_L) d\Omega_L \quad dN'_c = IN_s \sigma_c(\theta_c) d\Omega_c$$

由  $dN'_L = dN'_c$  得  $\sigma_L(\theta_L) d\Omega_L = \sigma_c(\theta_c) d\Omega_c$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \quad \sigma_L(\theta_L) \sin \theta_L d\theta_L = \sigma_c(\theta_c) \sin \theta_c d\theta_c$$

由 
$$\cos \theta_L = \frac{\gamma + \cos \theta_c}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{1/2}}$$

得 
$$\sin \theta_L d\theta_L = \frac{1 + \gamma \cos \theta_c}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{3/2}} \sin \theta_c d\theta_c$$

所以 
$$\sigma_L(\theta_L) = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_c)^{3/2}}{1 + \gamma \cos \theta_c} \sigma_c(\theta_c)$$

例:

## 4. 核反应产额

入射粒子在靶中引起的反应数与入射粒子数之比，称为核反应的产额。它是一个入射粒子在靶中引起反应的概率，与靶厚有关。

### (1) 中子反应的产额

$$dI = IN_v \sigma dx \quad I = I_0 e^{-N_v \sigma x}$$

$$I_D = I_0 e^{-N_v \sigma D}$$

$$N' = I_0 - I_D = I_0 (1 - e^{-N_v \sigma D})$$

$$Y = \frac{N'}{I_0} = 1 - e^{-N_v \sigma D}$$

薄靶， $D \ll \frac{1}{N_v \sigma}$

$$Y = N_v \sigma D = N_s \sigma$$

透射率

$$T = \frac{I_D}{I_0} = e^{-N_v \sigma D}$$

(2) 带电粒子反应的产额

$$dN' = IN_v \sigma(E) dx \quad N' = \int_0^D dN' = \int_0^D IN_v \sigma(E) dx$$

$$Y = \frac{N'}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_0^D IN_v \sigma(E) dx$$

(i) 薄靶,  $\sigma(E) = \sigma(E_0)$ ,  $I \approx I_0$

$$Y = N_v \sigma(E_0) \int_0^D dx = N_v \sigma(E_0) D = N_s \sigma(E_0)$$

(ii) 厚靶 靶厚 $D$ 大于粒子在靶中的射程 $R(E_0)$

$$\begin{aligned} Y &= N_v \int_0^D \sigma(E) dx = N_v \int_0^{R(E_0)} \sigma(E) dx \\ &= N_v \int_{E_0}^0 \sigma(E) \frac{dE}{(dE/dx)} \end{aligned}$$

$$Y(E_0) = N_v \int_0^{E_0} \left[ \sigma(E) / - \left( \frac{dE}{dx} \right) \right] dE$$

$-\left(\frac{dE}{dx}\right)$  为靶物质对入射带电粒子的阻止本领。

平均截面

$$\overline{\sigma(E)} \equiv \frac{\int_0^R \sigma(E) dx}{R}$$

$$Y = N_v R \frac{\int_0^R \sigma(E) dx}{R} = N_v R \overline{\sigma(E)}$$

$$N' = Y I_0 = I_0 N_v R \overline{\sigma(E)}$$

### (3) 核反应中放射性核素的生成

入射粒子强度 $I$ 为常数时

$$\frac{dN(t)}{dt} = N' - \lambda N(t) \quad N' = YI = N_S \bar{\sigma} I$$

$$A = \lambda N(t) = N_S \bar{\sigma} I (1 - e^{-\lambda t}) \quad \lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$$

$$t \gg T_{1/2} \text{ 时, } A \approx N_S \bar{\sigma} I$$

$$t \ll T_{1/2} \text{ 时, } A \approx N_S \bar{\sigma} I \lambda t$$

入射粒子流强随时间变化时，需要对 $I(t)$ 积分。

## § 9.5 核反应截面的一般特征和细致平衡原理

### 1. 核反应截面的一般特征

对于核反应  $A(a, b)B$ ，为了方便，把入射粒子  $a$  和靶核  $A$  组成的状态用  $\alpha$  表示，出射粒子  $b$  和剩余核  $B$  组成的状态用  $\beta$  表示。反应  $A(a, b)B$  可以看作是由状态  $\alpha$  到状态  $\beta$  的跃迁，或者说，由  $\alpha$  道跃迁到  $\beta$  道。假定末态  $\beta$  的数目很多以致可以看成是连续的，根据量子力学的微扰论，单位时间发生跃迁的概率是

$$W_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{\alpha\beta}|^2 \frac{dn}{dE_\beta}$$
$$dn = \frac{4\pi p_b^2 dp_b}{(2\pi\hbar)^3} V g_\beta \quad g_\beta = (2I_b + 1)(2I_B + 1)$$
$$E'_\beta = \frac{1}{2} \mu_\beta v_b^2 \quad dE'_\beta = \mu_\beta v_b dv_b = v_b dp_b$$
$$\frac{dn}{dE'_\beta} = \frac{4\pi p_b^2}{(2\pi\hbar)^3 v_b} V (2I_b + 1)(2I_B + 1)$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi\hbar^4} \frac{p_b^2}{\nu_b} V |H_{\alpha\beta}|^2 (2I_b + 1)(2I_B + 1)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{W_{\alpha\beta}}{n_a \nu_a} \quad n_a = \frac{1}{V}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi\hbar^4} \frac{p_b^2}{\nu_a \nu_b} V^2 |H_{\alpha\beta}|^2 (2I_b + 1)(2I_B + 1)$$

## 2. 细致平衡原理

对于可逆反应  $\mathbf{A} + \mathbf{a} \rightleftharpoons \mathbf{B} + \mathbf{b}$ ，令正过程的截面为  $\sigma_{\alpha\beta}$ ，逆过程的截面为  $\sigma_{\beta\alpha}$ 。由于微扰哈密顿是厄密算符，

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}^* &= \left( \int \psi_{\beta}^* \hat{H} \psi_{\alpha} \, d\tau \right)^* = \left[ \int (\hat{H} \psi_{\beta})^* \psi_{\alpha} \, d\tau \right]^* \\ &= \int \psi_{\alpha}^* \hat{H} \psi_{\beta} \, d\tau = H_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

$$|H_{\alpha\beta}|^2 = |H_{\beta\alpha}|^2$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_{\beta\alpha}} = \frac{p_b^2 (2I_b + 1)(2I_B + 1)}{p_a^2 (2I_a + 1)(2I_A + 1)}$$

## § 9.6 反应截面的分波分析

### 1. 半经典分波法

依据角动量守恒，可将截面分解为各种角动量所对应的截面之和：

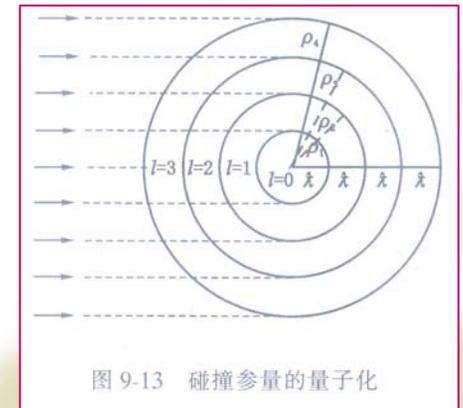
$$k = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{\mu v}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu E'}}{\hbar}$$

$$L = \rho \mu v \quad \rho = \frac{L}{\hbar} \hat{\lambda}$$

$$L = l\hbar \quad \rho = l\hat{\lambda}$$

$$S_l = \pi\rho_{l+1}^2 - \pi\rho_l^2 = \pi\hat{\lambda}^2(2l+1)$$

$$\sigma_{r,l} \leq \pi\hat{\lambda}^2(2l+1)$$



## 2. 散射截面和反应截面的量子力学分波法表示

### 入射平面波

$$\exp(ikz) = \frac{\sqrt{\pi}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} \left\{ \exp\left[-i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right] - \exp\left[+i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right] \right\} Y_{l,0}(\theta)$$

入 出

如果在坐标原点有一原子核，则出射球面波的振幅和位相一般要发生变化。这时，远离靶核处的新的波函数是

$$\psi(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} \left\{ \exp\left[-i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right] - \eta_l \exp\left[+i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right] \right\} Y_{l,0}(\theta)$$

$$= \Psi_{in} + \Psi_{out}$$

$\eta_l = \exp(-2i\delta_l)$  是复数，绝对值小于1

$$\psi_{sc} = \psi(r) - \exp(ikz) = \frac{\sqrt{\pi}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^{l+1} (1 - \eta_l) \exp\left[i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right] Y_{l,0}(\theta)$$

$$N_{sc} = \int j_{sc} r^2 d\Omega = \frac{\hbar}{2i\mu} \int \left( \frac{\partial \psi_{sc}}{\partial r} \psi_{sc}^* - \frac{\partial \psi_{sc}^*}{\partial r} \psi_{sc} \right) r_0^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{v\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2 \quad v = \frac{\hbar k}{\mu}$$

在平面波  $\exp(ikz)$  中通量密度  $j_{in}$  的数值就等于粒子的速度  $v$

$$j_{in} = \frac{\hbar k}{\mu} = v$$

$$\sigma_{sc} = \frac{N_{sc}}{j_{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} \pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

$$\sigma_{sc,l} = \pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

$$\sigma_r = \frac{\int (j'_{in} - j'_{out}) r^2 d\Omega}{j_{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} \pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) (1 - |\eta_l|^2) \quad \sigma_{r,l} = \pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

$$\sigma_{r,l} \leq \pi \hat{\lambda}^2 (2l+1)$$

$$\sigma_t = \sigma_{sc} + \sigma_r = \sum_{l=0}^{\infty} 2\pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) (1 - \text{Re} \eta_l)$$

$$\sigma_{t,l} = 2\pi \hat{\lambda}^2 (2l+1) (1 - \text{Re} \eta_l)$$

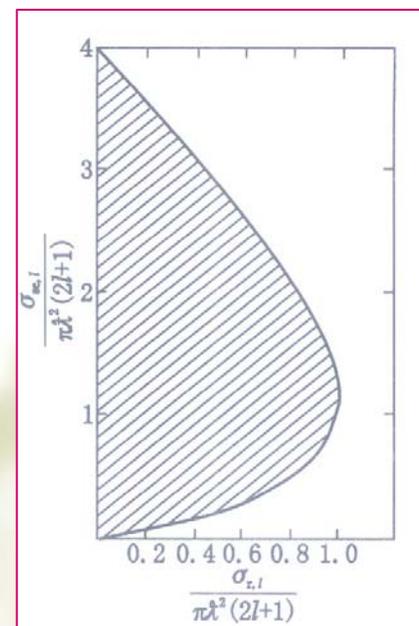


图 9-14 弹性散射截面  
与反应截面的关系