

第八章 核 结 构 模 型

原子核结构是原子核物理学的一个中心问题。它是物质结构的一个重要层次。人们通过对核结构问题的认识，可以从根本上加深对自然界的了解。

核结构：1) 以核子的运动为基础研究原子核的结构；
2) 以夸克-胶子的运动为基础研究强子和原子核的结构。

原子核：由强作用主导的量子多体系统。

核结构的理论仍不成熟。关键问题有两个：一是核力的性质问题；二是量子力学在有限多体系的运用问题。

半唯象的理论：在一定的实验事实的基础上，对原子核作某种模型假设，用来解释原子核的某些性质。

微观理论：对核子间的作用力做一定假设后，代入多体哈密顿量中借用某种近似方法进行求解。典型的如哈里特-福克（**Hartree-Fock**）方法及其派生的理论。

本章将只介绍核结构的两种主要模型：壳模型和集体模型。

Fermi气体模型

小报告: Heyde P.228

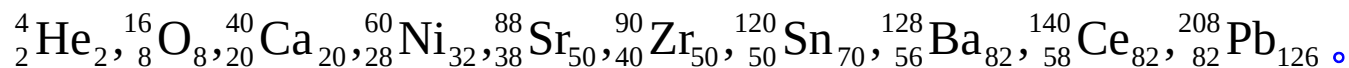
§ 8.1 幻数存在的实验根据

当组成原子核的质子数或中子数为 2, 8, 20, 28, 50, 82 和中子数为 126 时, 原子核特别稳定。这些数目叫做“幻数”。

1. 核素丰度

核素丰度是指核素在自然界中的含量。对所有核素丰度进行研究后发现:

(1) 地球、陨石以及其它星球的化学成分表明, 下面几种核素的含量比附近核素的含量显得特别多:



可以看出, 它们的质子数或中子数, 或者两者都是幻数。

(2) 在所有的稳定核素中, 中子数 N 等于 20, 28, 50 和 82 的同中子素最多。

(3) 当质子数 $Z=8, 20, 28, 50$ 和 82 时, 稳定同位素的数目同样要比邻近的元素多。

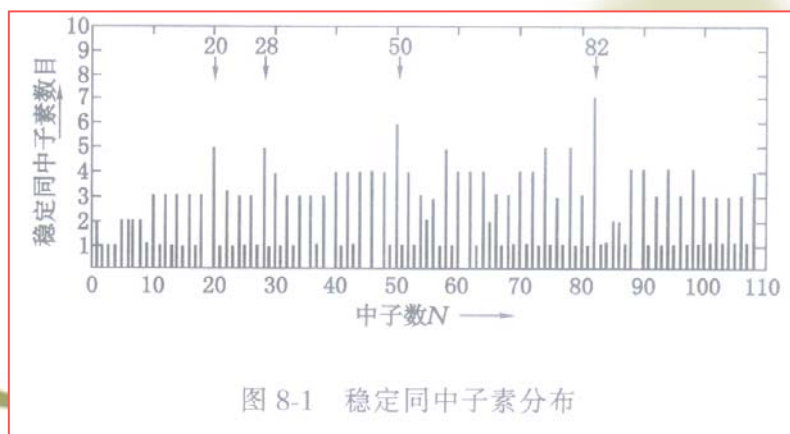
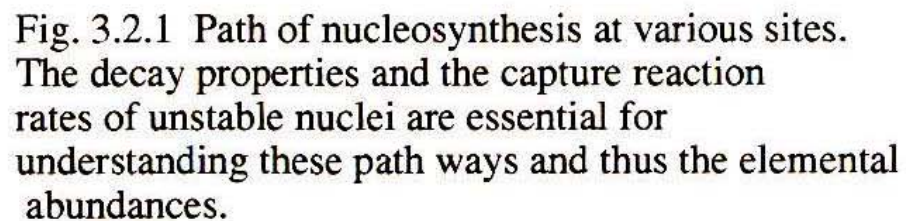


图 8-1 稳定同中子素分布



2. 结合能的变化

原子核的结合能，是原子核稳定性的一种表征。结合能的相对值越大，表示原子核结合得越紧密，稳定性就越好。

(1) 中子结合能

(2) 总结结合能

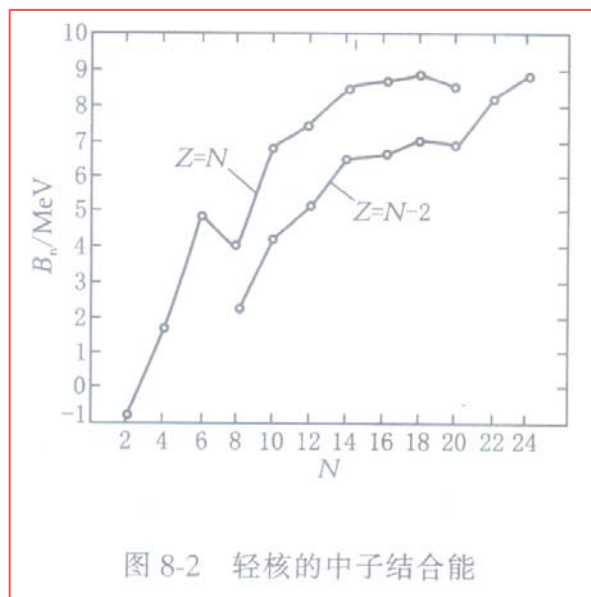


图 8-2 轻核的中子结合能

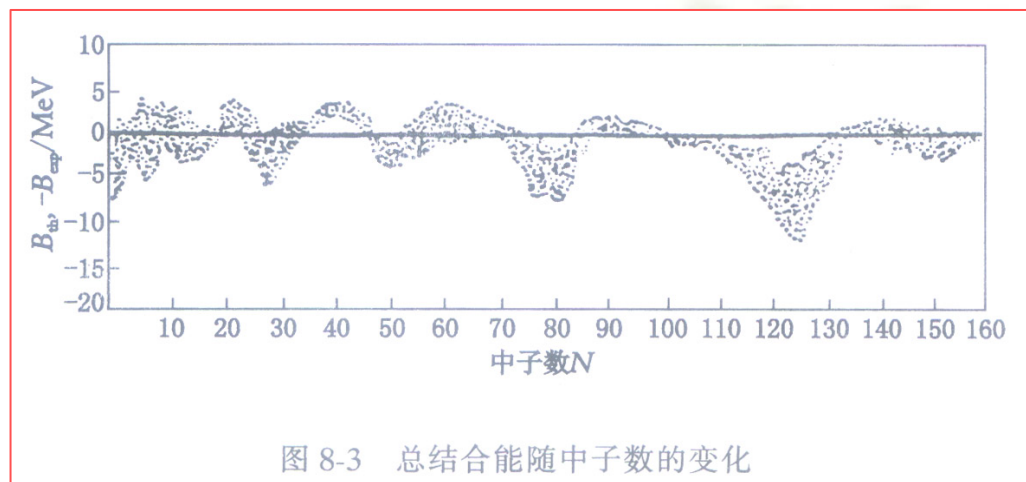


图 8-3 总结结合能随中子数的变化

N: 原有的中子数

3. α 衰变的能量

对于大多数具有 α 放射性的元素，同一元素的各种同位素的 α 衰变能可以连成一条直线，其斜率是负值。但是，在 $A=209-213$ 范围内，对于Bi、Po、At和Rn出现了反常现象，直线的斜率变成了正值。这可用中子数 $N=126$ 是幻数得到解释。

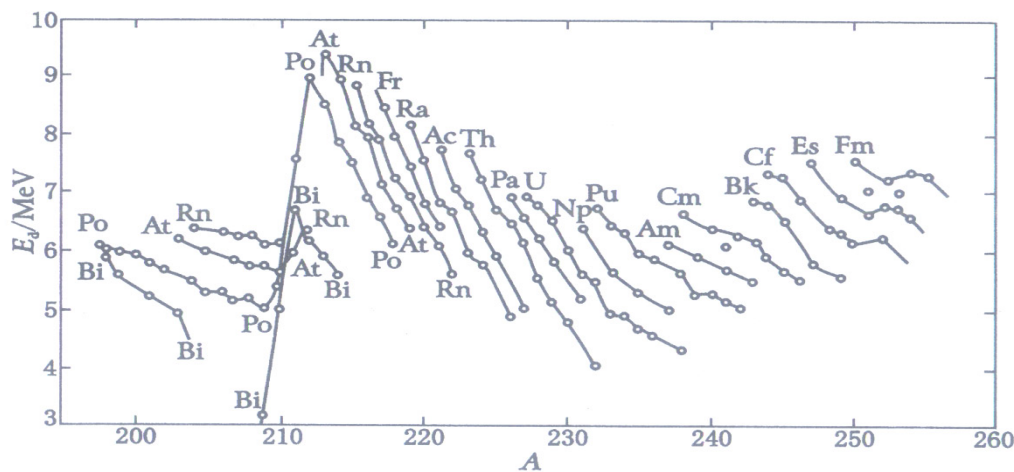


图 5-7 E_α 随同位素的变化

§ 8.2 原子核的壳模型

1. 原子中电子的壳层结构

可以近似地认为，每个电子是在核和其它电子所组成的平均场中各自独立地运动，这个平均场是一种有心场。根据量子力学，它们的运动状态由四个量子数 n ， l ， m_l ， m_s 来标志。此处 n 是主量子数， l 为轨道角动量量子数， m_l ， m_s 分别为轨道磁量子数和自旋磁量子数。 n 可取下列正整数

$$n=1, 2, 3, \dots$$

对一定的 n ，

$$l=0, 1, 2, \dots, n-1。共\ n\ 个值。$$

对一定的 l ，

$$m_l=l, l-1, l-2, \dots, -l, \text{ 共 } 2l+1 \text{ 个值。}$$

对每一个 m_l ，

$$m_s=\pm 1/2, \text{ 有两个值。}$$

在能量相同的同一个 l 能级上总共可以容纳 $2(2l+1)$ 个电子。对于 $l=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ ，分别用符号s, p, d, f, g, h, i, j...来表示。

由量子力学可以解得在给定的有心场中电子处于各能级的能量，能量随量子数 n 和 l 的增大而提高。由于内层电子对外层电子的屏蔽效应，实际的有心场与库仑场有所不同。所得的能级次序见表8-1。能量最低的能级是1s，其后的次序是2s、2p、3s、3p、4s、3d、...

表 8-1 电子的壳层结构

壳 层	能 级 次 序	各能级的电子数	满壳层电子总数
一	1s	2	2
二	2s, 2p	2, 6	10
三	3s, 3p	2, 6	18
四	4s, 3d, 4p	2, 10, 6	36
五	5s, 4d, 5p	2, 10, 6	54
六	6s, 4f, 5d, 6p	2, 14, 10, 6	86
七	7s, 5f, 6d, ...	2, 14, 10, ...	

电子处于最低能级最稳定，但由于泡利原理的限制，每一能级最多只能填充 $N=2(2l+1)$ 个电子。这样就可把电子按从低能级往高能级的次序逐个填充，从而形成所谓壳层结构。一些接近的能级组成一个壳层，各壳层之间则有较宽的能量差。最后得到原子中电子的壳层结构如表8-1所示。由表可见，满壳层时的电子总数是2，10，18，36，54，86，它们正是惰性气体氦、氖、氩、氪、氙、氡的原子序数。

2. 核内存在壳层结构的条件

(1) 在每一个能级上，容纳核子的数目应当有一定的限制；

(2) 核内存在一个平均场，对于接近于球形的原子核，这个平均场是一种有心场；

Nuclear mean field: Heyde P. 251

(3) 每个核子在核内的运动应当是各自独立的。

第一个条件分别对质子中子满足。

3. 核的壳模型的基本思想

可以把原子核中的每个核子看作是在一个平均场中运动，这个平均场是所有其它核子对一个核子作用场的总和，对于接近球形的原子核，可以认为这个平均场是一个近似的有心场。

多体问题
变成1体问
题

泡利原理不但限制了每一能级所能容纳核子的数目，也限制了原子核中核子与核子碰撞的概率，使得核子在核内有较大的平均自由程，即单个核子能被看作在核中独立运动。所以，壳模型也叫独立粒子模型。

4. 单粒子能级

直角势阱:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (8.2-1)$$

谐振子势阱:

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (8.2-2)$$

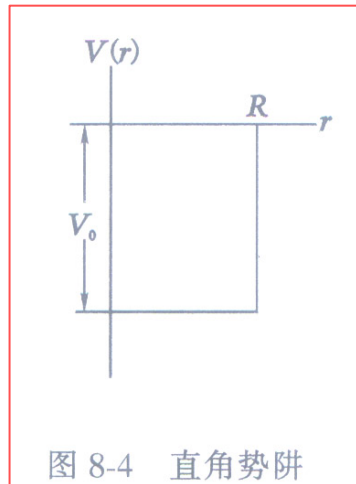


图 8-4 直角势阱

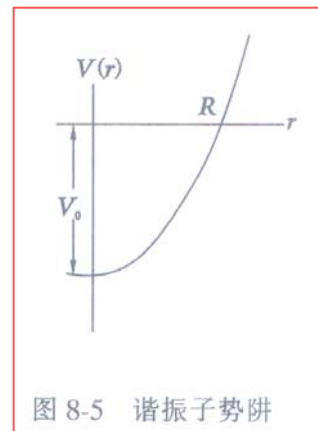


图 8-5 谐振子势阱

比较合理的核场是伍兹—萨克森（Woods — Saxon）势阱:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (8.2-3)$$

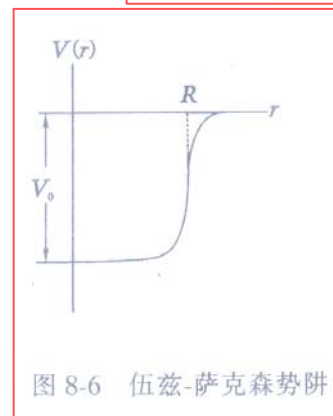


图 8-6 伍兹-萨克森势阱

式中 V_0 、 R 、 a 是参量。

我们先从直角势阱和谐振子势阱出发，尔后用内插法求得所需的能级。为了计算方便，假设直角势阱的壁是无限高的，可以证明，这不会改变所推得的能级次序。

核子在谐振子势阱中运动时的能量

$$E_{\nu l} = (2(\nu-1) + l) \hbar\omega + (3/2) \hbar\omega = n_o \hbar\omega + (3/2) \hbar\omega \quad (8.2-4)$$

$$n_o = 2(\nu-1) + l$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

Heyde, P. 244

式中， n_0 是谐振子量子数， ν 是径向量子数， l 是轨道量子数。最后一项 $(3/2)\hbar\omega$ 为零级振动的能量。因它是常数，所以在讨论能级结构时可以略去。

核子在谐振子势阱中运动时，其能级的能量决定于 n_0 ， n_0 又决定于 ν 和 l 。一般讲，同一 n_0 可以有若干组 ν 和 l 的值。

谐振子势阱只给出前面三个幻数：2，8，20，其它幻数没有出现。

$$n_0 = 2(\nu - 1) + l$$

表 8-2 谐振子势阱能级核子数

能级能量 $E_\nu(\hbar\omega)$	谐振子量子数 n_0	能级包含的状态	能级的同类核子数	前面各能级的 同类核子总数
0	0	1s	2	2
1	1	1p	6	8
2	2	2s, 1d	12	20
3	3	2p, 1f	20	40
4	4	3s, 2d, 1g	30	70
5	5	3p, 2f, 1h	42	112
6	6	4s, 3d, 2g, 1i	56	168

同 n_0 的字
称相同

利用量子力学，也可以求出核子在直角势阱中运动时的能量

$$E_{\nu l} = \hbar^2 X_{\nu l}^2 / (2mR^2) \quad (8.2-5)$$

Heyde, P. 242

式中 $X_{\nu l}$ 是贝塞尔函数 $j_{l+1/2}(kR) = 0$ 的根，这里 k 是核子的波数。在直角势阱中能级的简并得到部分消除，不同状态（ νl ）具有不同的能量，而且能级的次序也与谐振子情形不同。但它也只能给出三个幻数：2，8，20，其它幻数同样不能出现。

表 8-3 直角势阱能级核子数

$X_{\nu l}$	能级 (νl)	$2(2l+1)$	同类核子总数
3.142	1s	2	2
4.493	1p	6	8
5.763	1d	10	18
6.283	2s	2	20
6.988	1f	14	34
7.725	2p	6	40
8.183	1g	18	58
9.095	2d	10	68
9.356	1h	22	90
9.425	3s	2	92
10.417	2f	14	106

内插不能给出新的幻数。

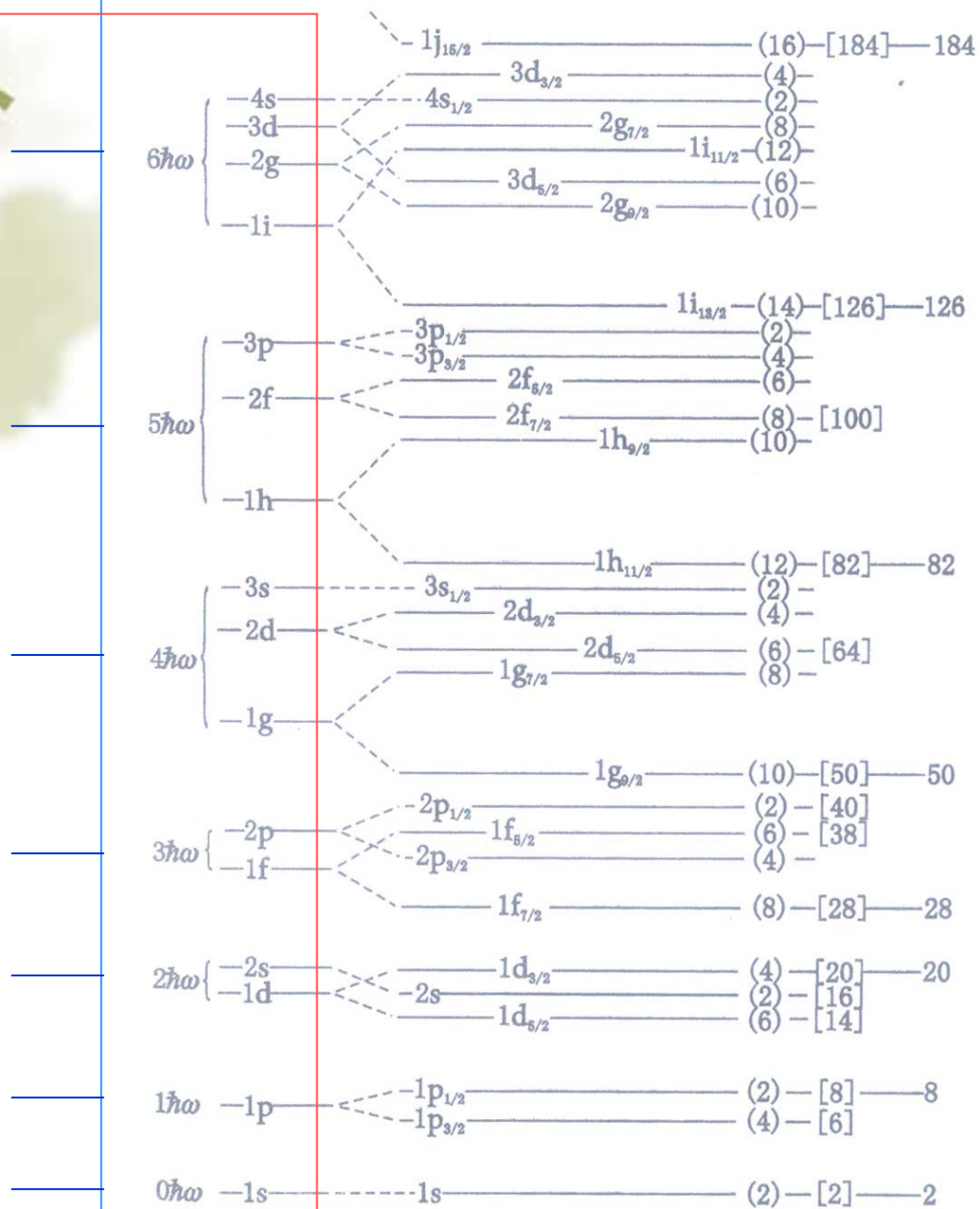


图 8-7 考虑自旋-轨道耦合后的核子能级(参见[13]58 页)

5. 自旋—轨道耦合 自旋的作用？

$$V(\vec{r}) = V_C(\vec{r}) + V_{LS}(\vec{r})\vec{L} \cdot \vec{S}$$

实验表明，核子的自旋—轨道耦合不但存在，而且这种耦合作用是很强的。

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}, \quad j = l - 1/2, \text{ 或 } l + 1/2$$

$$j^2 = l^2 + s^2 + 2\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{对 } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) & \text{对 } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

自旋轨道作用势表达为 $V_{ls}(r)\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ ， $V_{ls}(r)$ 为负作用势。

因此，考虑自旋轨道耦合后，同一条 l 能级将劈裂成两条。由自旋轨道耦合引起的能级劈裂在讨论原子中电子能级的精细结构时已经遇到过。但是，在原子中，由于电子的自旋轨道耦合较弱， $j=l \pm 1/2$ 的两个能级的间隔与 l 不同的两相邻能级的距离相比是较小的，一般不会改变原来的能级次序。可是，原子核情况不同。核子的自旋轨道耦合是很强的，所劈裂的两个能级 $j=l \pm 1/2$ 的间隔可以很大，而且与 $(2l+1)$ 成正比，随 l 的增加而增大，以致改变原来的能级次序。另外， $j=l+1/2$ 的能级低于 $j=l-1/2$ 的能级。这一点与原子的情形也不同。

对于新的能级，应以 (ν, l, j) 三个量子数来表征，这些新能级是 $2j+1$ 度退化的。

考虑自旋—轨道耦合后的能级如图8—7所示。它们给出了全部幻数。

两个幻数间的各能级，形成一个主壳层。主壳层内的每一能级，叫做支壳层。主壳层之间能量间隔较大，支壳层之间的能量间隔较小。新的主壳层的形成，是由于有些能级劈裂得特别大。因此，同一个主壳层内可以有宇称不同的能级，当 l 为偶数时宇称为正， l 为奇数时宇称为负，而且相邻能级的 j 值可以相差很大。

质子和中子各有一套能级。由于质子间具有库仑斥力，质子的能级比相应中子的能级要高一些，能级间距要大一些，能级的排列次序也有些不同，特别是当核子数较多时更是这样，但主壳层的相对位置不变，即给出相同的幻数。

壳结构理论预言，82以后的质子幻数可能是114；126以后的中子幻数是184。因此，根据理论预言，质子数为114和中子数为184的原子核是双幻核。该核及其附近的一些核可能具有相当大的稳定性，称为超重核。实验发现和研究超重核，对核结构理论的发展和应用将起重大作用。

超重合成、分离、鉴别、性质研究再次成为热点

美国Berkeley和俄罗斯Dubna 1969至1974: “热熔合”, 104、105、106三种元素的几个同位素。中子跑走太多, 融合截面小。

德国GSI1981-1996年: 利用强流 ^{54}Cr , ^{58}Fe , ^{62}Ni , ^{64}Ni 和 ^{70}Zn 束流轰击 ^{208}Pb 和 ^{209}Bi 靶 (“冷熔合”), 先后合成了 $Z=107-112$ 的6种新元素的一系列同位素。生成截面随其原子序数的增加而呈指数下降, 合成 $Z=112$ 的元素已经达到目前GSI技术条件的极限。

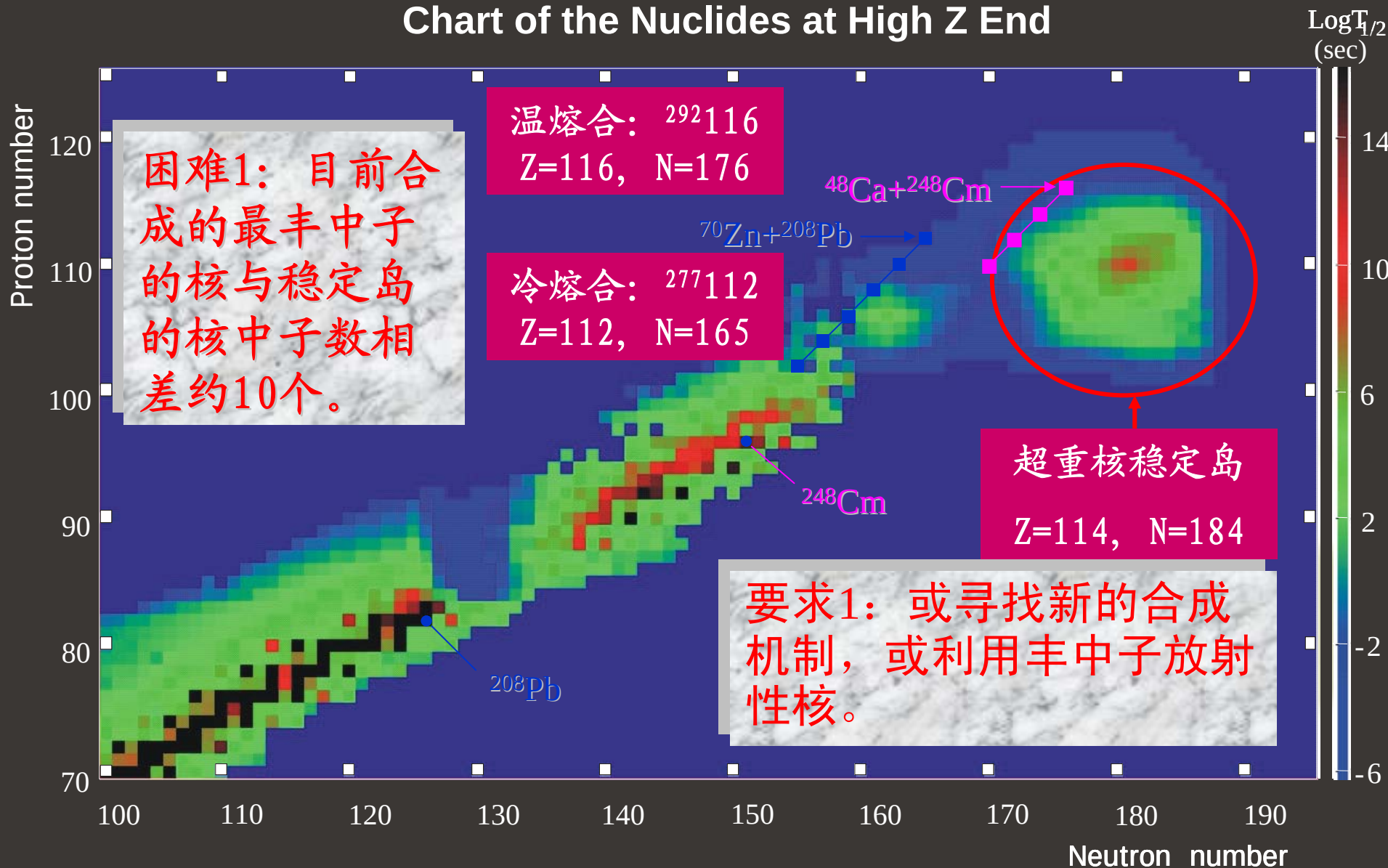
日本的RIKEN 2004年: 利用极强的 ^{70}Zn 束流轰击 ^{209}Bi 靶合成了113号元素。

俄罗斯Dubna近几年: 选择了双幻核 ^{48}Ca 轰击丰中子锕系靶, 通过 “温熔合” 来产生接近理论预言的球形超重稳定岛的长寿命核。基于单个原子的 α 衰变关联测量技术, 先后获得了1个 $^{289}114$ 、2个 $^{288}114$ 、2个 $^{287}114$ 、2个 $^{292}116$ 、3个 $^{288}115$ 、1个 $^{287}115$ 和2个 $^{294}118$ 衰变事件。

尽管目前报道的实验结果已经合成到了118号元素 (117号未见报道), 但被确认的结果只到112号元素, 113—116和118号元素的确认需待进一步的验证实验。

超重核研究现状和发展趋势

Chart of the Nuclides at High Z End



6. 对关联（不讲）

许多实验现象表明，两个同类核子间可以存在重要的相互关联，这叫对关联。

若用 k 表示状态的四个量子数， $-k$ 表示另一状态的四个量子数，而其中三个量子数均与 k 状态的相同，只是磁量子数 m 有相反的符号。对关联主要发生在状态 k 和 $-k$ 的粒子之间。通常称状态的核子数为占有数。根据泡利不相容原理，占有数等于 1 或 0，用 v_k^2 表示状态 k 的平均占有数，显然它在 0 与 1 之间变化。

忽略对关联时，在某一能量以下的每一状态都被粒子占有，在此能量以上的状态没有核子占据。这种区分占有能级和空缺（未占有）能级的能量，称为费米能量，并用 λ 表示。当考虑对关联时，理论给出，平均占有数是单粒子

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_k - \lambda}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2]^{1/2}} \right\} \quad (8.2-6)$$

状态能量 ε_k 的函数，其中， Δ 称为能隙，它与相互作用有关。

由 (8.2-6) 式可见，对于 $\lambda - \varepsilon_k \gg \Delta$ ， $v_k^2 = 1$ ；对于 $\varepsilon_k - \lambda \gg \Delta$ ， $v_k^2 = 0$ ；对于 $\lambda = \varepsilon_k$ ， $v_k^2 = 1/2$ 。可见，由于对关联，平均占有数在费米能处并不产生突变，而主要在 2Δ 的能量间隔内连续改变。这表示原子核的基态并不决定于单一的组态，而决定于许多组态的线性组合。

§ 8.3 壳模型的应用

1. 原子核基态的角动量和宇称

双幻核基态的自旋为零，宇称为正。已为实验所证实。

偶偶核基态的自旋为零，宇称为正。已被实验很好证实。

对于奇 A 核，原子核的自旋应与最后一个奇核子的角动量 j 相同。宇称应由那个奇核子的轨道量子数 l 来决定。

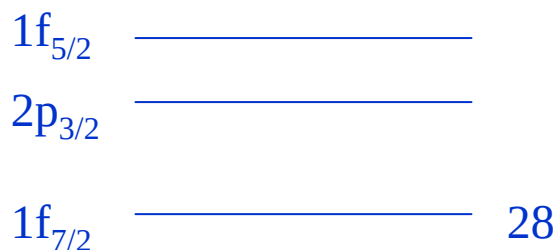
奇 A 核的状态，由单个非成对的核子的状态所决定。这种模型也叫单粒子模型。例如， ${}_{13}^{27}\text{Al}$ 自旋和宇称应由第 13 个质子的状态来决定。该质子的状态是 $1d_{5/2}$ ，所以 ${}_{13}^{27}\text{Al}$ 的自旋为 $5/2$ ，宇称为正。再如 ${}_{30}^{67}\text{Zn}$ 的自旋和宇称应由第 37 个中子的状态 $1f_{5/2}$ 来决定。所以， ${}_{30}^{67}\text{Zn}$ 的自旋为 $5/2$ ，宇称为负。更多的例子列于表 8—4 中，并与实验值作了比较。

表 8-4 一些奇 A 核的基态自旋和宇称

核	奇核子状态	I^π		核	奇核子状态	I^π	
		理论值	实验值			理论值	实验值
$^{11}_5\text{B}_6$	$1p_{3/2}$	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{3}{2}^-$	$^{35}_{17}\text{Cl}_{18}$	$1d_{3/2}$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$
$^{13}_6\text{C}_7$	$1p_{1/2}$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-$	$^{37}_{18}\text{Ar}_{19}$	$1d_{3/2}$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$
$^{15}_7\text{N}_8$	$1p_{1/2}$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-$	$^{39}_{19}\text{K}_{20}$	$1d_{3/2}$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$
$^{17}_8\text{O}_9$	$1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	$^{55}_{25}\text{Mn}_{30}$	$1f_{7/2}$	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-$
$^{19}_9\text{F}_{10}$	$1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$^{67}_{30}\text{Zn}_{37}$	$1f_{5/2}$	$\frac{5}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-$
$^{19}_{10}\text{Ne}_9$	$1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$^{87}_{38}\text{Sr}_{49}$	$1g_{9/2}$	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{9}{2}^+$
$^{23}_{11}\text{Na}_{12}$	$1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$^{95}_{42}\text{Mo}_{53}$	$2d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$
$^{25}_{12}\text{Mg}_{13}$	$1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	$^{137}_{56}\text{Ba}_{81}$	$2d_{3/2}$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$
$^{27}_{13}\text{Al}_{14}$	$1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	$^{201}_{80}\text{Hg}_{121}$	$2f_{5/2}$	$\frac{5}{2}^-$	$\frac{3}{2}^-$
$^{29}_{14}\text{Si}_{15}$	$2s_{1/2}$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$^{207}_{82}\text{Pb}_{125}$	$3p_{1/2}$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-$
$^{81}_{15}\text{P}_{16}$	$2s_{1/2}$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$^{209}_{82}\text{Pb}_{127}$	$2g_{9/2}$	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{9}{2}^+$
$^{33}_{16}\text{S}_{17}$	$1d_{3/2}$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$^{209}_{83}\text{Bi}_{126}$	$1h_{9/2}$	$\frac{9}{2}^-$	$\frac{9}{2}^-$

根据单粒子模型来讨论奇 A 核的状态时，必须考虑对能效应对核子能级填充次序的影响。核子成对地填充能级时，要放出对能 δ 。理论和实验表明：对能 δ 的大小与能级的角动量 j 有关， j 越大， δ 也越大，因此，当相邻两能级1和2（假定能级1高于能级2）的对能之差（ $\delta_1 - \delta_2$ ）大于其能级间距 ΔE 时，核子填充能级的次序就会改变，即未考虑对能效应时的较低能级尚未填满，就去填入较高能级。显然，只有能级1的角动量 j_1 大于能级2的角动量 j_2 时，对能效应才有可能起作用。对能效应起作用时，最后一个奇核子不是处于角动量较大的能级，而是处于角动量较小的能级。

例如 $^{75}_{33}\text{As}$ ， $^{79}_{35}\text{Br}$ 和 $^{87}_{37}\text{Rb}$ 都是奇质子核，按图8—7的能级次序，它们的最后一个奇质子均应填在 $1f_{5/2}$ 能级，所以自旋都是5/2，但实验值都是3/2。这可以由对能效应来解释。



对能使成对的核子倾向于处在
 J 较大的态上。

如果此时 $2p_{3/2}$ 和 $1f_{5/2}$ 俩相邻能级满足以下条件

$$2\Delta E > \delta_1 - \delta_2 > \Delta E \quad (8.3 - 1)$$

则以上三个核的质子组态分别是 $(2p_{3/2})^3 (1f_{5/2})^2$ 、 $(2p_{3/2})^3 (1f_{5/2})^4$ 和 $(2p_{3/2})^3 (1f_{5/2})^6$ ，即最后一个单质子不是处在 $1f_{5/2}$ 能级，而是处在 $2p_{3/2}$ 能级，所以它们的自旋都应该是 $3/2$ ，这与实验相符。当两相邻能级的对能之差

$$\delta_1 - \delta_2 > 2\Delta E \quad (8.3 - 2)$$

时，对能效应的作用对奇核子状态产生的结果与满足 (8.3-1) 式的情况相同，只是成对核子所处的状态有所不同罢了。

在轻核范围内， ${}^{19}_9\text{F}_{10}$ ， ${}^{19}_{10}\text{Ne}_9$ 和 ${}^{23}_{11}\text{Na}_{12}$ 的理论值与实验值不符，这是因为这几个核有较大的形变，而基于球形对称场的壳模型对形变核的描写会遇到困难。其它一些情形的例外，一般都是自旋的实验值比理论值少 1。

应该指出，奇 A 核的自旋总是半整数，这是因为每个核子的角动量均为半整数，奇数个半整数不论怎样耦合总是给出半整数。

奇奇核的自旋和宇称由最后两个奇核子决定。关于这两个奇核子的角动量如何耦合成核的自旋，有以下两个规则：

(i) 若最后两个奇核子的自旋与轨道角动量都是平行的，即

$$j_n = l_n + 1/2, j_p = l_p + 1/2$$

或者都是反平行，即

$$j_n = l_n - 1/2, j_p = l_p - 1/2$$

其中，角标n表示中子，p表示质子，则核的自旋I在多数情况下是

$$I = j_n + j_p \quad (8.3-3)$$

但有不少例外，如 $^{34}_{17}\text{Cl}$ 的自旋不是3而是零； $^{58}_{27}\text{Co}$ 自旋不是5而是2。

(ii) 若最后两个奇核子中的一个核子的自旋与轨道角动量是平行的，另一个核子的自旋与轨道角动量是反平行的，即

$$j_n = l_n + 1/2, j_p = l_p - 1/2$$

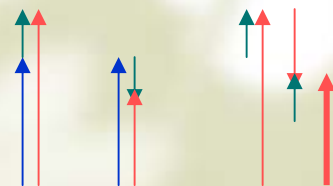
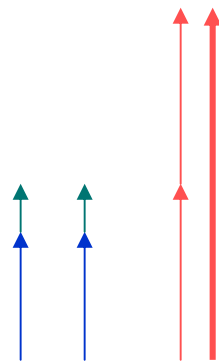
或者

$$j_n = l_n - 1/2, j_p = l_p + 1/2$$

则核的自旋

$$I = |j_n - j_p| \quad (8.3-4)$$

此规则也有例外，如 ^{40}K 的自旋不是2而是4。



以上两个规则说明奇质子和奇中子间存在较强的自旋耦合。使这两个核子的自旋有平行的倾向。

奇奇核的字称等于最后两个奇核子所处状态的字称之积，即核的字称：

$$\pi = (-1)^{l_n + l_p} \quad (8.3 - 5)$$

质子和中子各自形成自己的壳层。但实验表明，两者之间并非完全没有相互干扰，不少奇 Z 元素的各个奇 A 同位素的原子核，其自旋值不是完全相同。例： ^{123}I ， ^{125}I ， ^{127}I ， ^{129}I ， ^{131}I ，和 ^{133}I ，虽然它们的质子数都是 53，然而最后一个质子所处的状态却有差别，前三者的自旋为 $5/2$ ，后三者的自旋为 $7/2$ 。

综上所述；壳模型能正确地预言绝大多数核的基态自旋和宇称。这是它的最大成功之处。

2. 同核异能素岛的解释

长寿命同核异能态的分布随核子数的变化具有一定的规律性，它们几乎都集中在紧靠 Z 或 N 等于 50, 82, 126 等幻数前面的区域，形成所谓同核异能素岛（见图 7—7）。

3. β 衰变与壳模型的关系

实验指出，奇 A 核的 β 衰变的 $\log fT_{1/2}$ 值与壳模型预言的跃迁级次相当符合。

4. 核的磁矩

按照壳模型，偶偶核的自旋为零，因此偶偶核的磁矩也为零。这与实验完全符合。

对于奇 A 核，自旋一般等于最后一个非成对核子的角动量，因此可以推测，奇 A 核的磁矩也应该等于最后一个核子的磁矩。

核内单个核子的磁矩 μ_j 一般为核子轨道运动的磁矩 μ_l 和核子自旋磁矩 μ_s 组成，即

$$\mu_j = \mu_l + \mu_s = g_l l + g_s s = g_j j \quad (8.3 - 6)$$

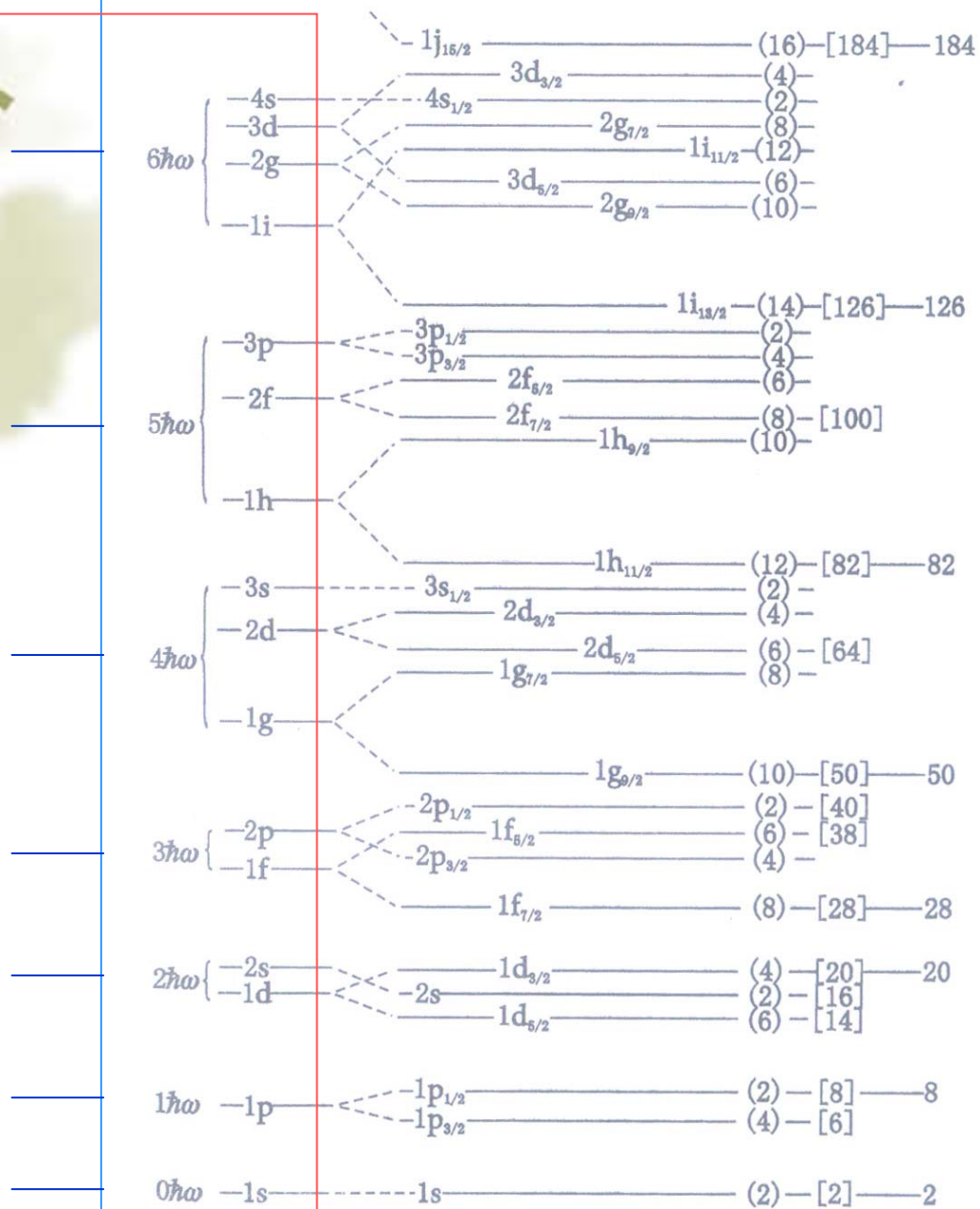


图 8-7 考虑自旋-轨道耦合后的核子能级(参见[13]58 页)

l, s 和 j 分别为核子轨道运动角动量、自旋和总角动量, g_l, g_s , 和 g_j 分别为相应的 g 因数; 磁矩以核磁子 μ_N 为单位, 角动量以 $\hbar$ 为单位。

用 j 点乘 (8.3-6) 式, 得

$$g_j j \cdot j = g_l l \cdot j + g_s s \cdot j \quad (8.3-7)$$

由于

$$\begin{aligned} j \cdot j &= j(j+1) \\ l \cdot j &= (j^2 + l^2 - s^2) / 2 \\ &= [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)] / 2 \\ s \cdot j &= (j^2 + s^2 - l^2) / 2 \\ &= [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] / 2 \end{aligned}$$

代入 (8.3-7) 式并用 $(j+1)$ 除等式两端, 得

$$g_j j = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2(j+1)} \quad (8.3-8)$$

注意, 此式左边 $g_j j$ 是角动量为 j 的一个核子的磁矩 μ_j , 所以奇 A 核的磁矩 μ_I 可用

$$\mu_I = \begin{cases} g_l(I - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} g_s, & \text{当 } I = j = l + \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \frac{I}{I+1} [g_l(I + \frac{3}{2}) - \frac{1}{2} g_s], & \text{当 } I = j = l - \frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases} \quad (8.3-9)$$

(8.3-8) 式右边计算, 得以下表达式:

所以对于奇 N 偶 Z 核, 因中子的 $g_l = 0, g_s = -3.82$, 则

$$\mu_I = \begin{cases} -1.91, & \text{当 } j = l + \frac{1}{2} \text{ 时} \\ 1.91 \frac{I}{I+1}, & \text{当 } j = l - \frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases} \quad (8.3-10)$$

对于奇 Z 偶 N 核，因质子的 $g_l = 1$, $g_s = 5.58$, 则

$$\mu_I = \begin{cases} I + 2.29 & \text{当 } j = l + \frac{1}{2} \text{ 时} \\ I - 2.29 \frac{I}{I+1} & \text{当 } j = l - \frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases} \quad (8.3-11)$$

施密特 (Schmidt) 线,

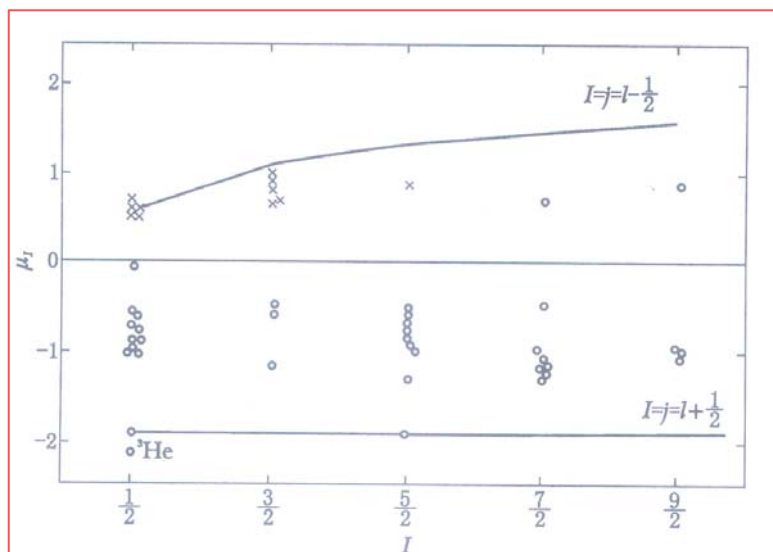


图 8-8 奇 N 核的磁矩随自旋的变化

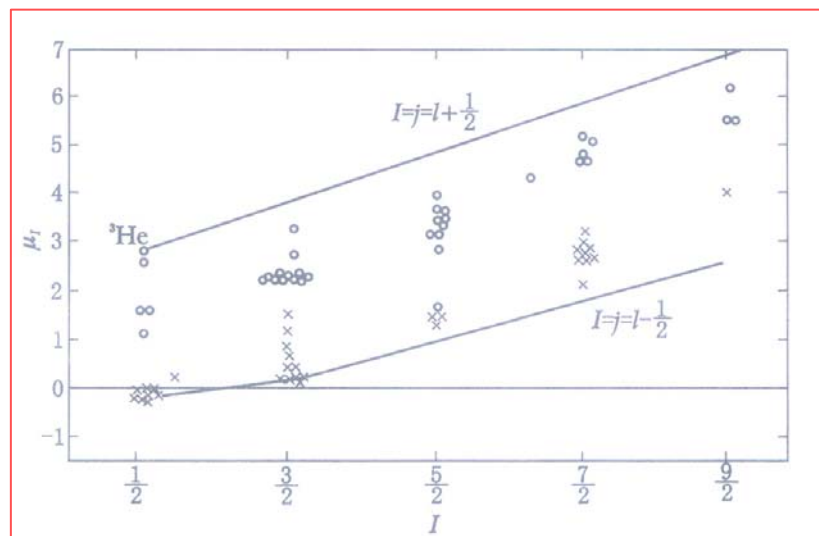


图 8-9 奇 Z 核的磁矩随自旋的变化

5. 核的电四极矩

根据壳模型，电四极矩是由未填满壳层的少数质子贡献的，并可定量地计算其大小。

当奇 Z 偶 N 核的满壳层外有 p 个质子处于角动量为 j 的能级上时，计算出

$$Q = - \langle r^2 \rangle \frac{2j-1}{2(j+1)} \left[1 - \frac{2(p-1)}{2j-1} \right]$$

其中 $\langle r^2 \rangle$ 为径向波函数 R_{nl} 的平均值。可见当 $p < (2j + 1)/2$ 时，即外层质子数少于该层能填充粒子数的一半时，电四极矩具有负值；当 $p > (2j + 1)/2$ 时， Q 为正。因此，对质子数为幻数加1的奇 A 核， Q 为负；对幻数减1的奇 A 核， Q 为正。这个结论与实验相符。

但简单的壳模型对电四极矩的预言，除对幻数附近的原子核有较好的符合以外，实验与理论有严重分歧。计算表明，实验测得的 Q 值比理论值大得多，甚至高达 20 倍以上，并且奇中子核的电四极矩也不小。这说明，对于这些原子核的电四极矩，不象壳模型预言的那样，只是少数核子的贡献，而应该考虑大量核子的集体效应。

6. γ 跃迁概率

基于壳模型得出的 γ 跃迁概率公式可以定性地用来判别跃迁的多极性，但在定量上一般不相符合

总结上面的讨论：

- (1) 核内存在一个平均场，核子在这平均场中的独立运动有一定意义，且其运动有很强的自旋-轨道耦合。
- (2) 壳模型用于确定核基态的自旋和宇称相当成功。
- (3) 对于原子核的其它性质，壳模型应用于幻数附近相当成功；对远离幻数的原子核（也叫远离满壳层的原子核），遇到了不少困难。

Nuclear mean field

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{\vec{p}_i}{2m_i} + \sum_{i<j=1}^A V(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

A – independent nuclear Hamiltonian

$$H_0 = \sum_{i=1}^A \left(\frac{\vec{p}_i}{2m_i} + U(|\vec{r}_i|) \right) = \sum_{i=1}^A h_0(i)$$

$$\text{if } h_0(i)\varphi_i(\vec{r}) = \varepsilon_i\varphi_i(\vec{r}) \quad i = n_i, l_i, j_i, m_i$$

then(no antisymmetrization)

$$\psi_{1,2,\dots,A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \prod_{i=1}^A \varphi_i(\vec{r}_i)$$

$$H_0\psi = E_0\psi \quad E_0 = \sum_{i=1}^A \varepsilon_i$$

Heyde, P. 253: Hartree-Fock a tutorial

$$U(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' = \sum_{b \in F} \int \varphi_b^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_b(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_i} \Delta \varphi_i(\vec{r}) + \sum_{b \in F} \int \varphi_b^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_b(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}) d\vec{r}' = \varepsilon_i \varphi_i(\vec{r})$$

$$i = 1, 2, \dots, A, A+1, \dots$$

antisymmetrization

$$\varphi_b(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}) \rightarrow [\varphi_b(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}) - \varphi_b(\vec{r}) \varphi_i(\vec{r}')]]$$

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m_i} \Delta \varphi_i(\vec{r}) + \sum_{b \in F} \int \varphi_b^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_b(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}) d\vec{r}' \\ - \sum_{b \in F} \int \varphi_b^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_b(\vec{r}) \varphi_i(\vec{r}') d\vec{r}' = \varepsilon_i \varphi_i(\vec{r}) \end{aligned}$$

using the notation

$$U_H(\vec{r}) \equiv \sum_{b \in F} \int \varphi_b^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_b(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$U_F(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \sum_{b \in F} \int \varphi_b^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_b(\vec{r}) d\vec{r}'$$

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m_i} \Delta \varphi_i(\vec{r}) + U_H(\vec{r}) \varphi_i(\vec{r}) - \int U_F(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_i(\vec{r}') \\ = \varepsilon_i \varphi_i(\vec{r}) \end{aligned}$$

3.2. First example: ab initio quantum Monte Carlo calculations for nuclei with $A \leq 12$

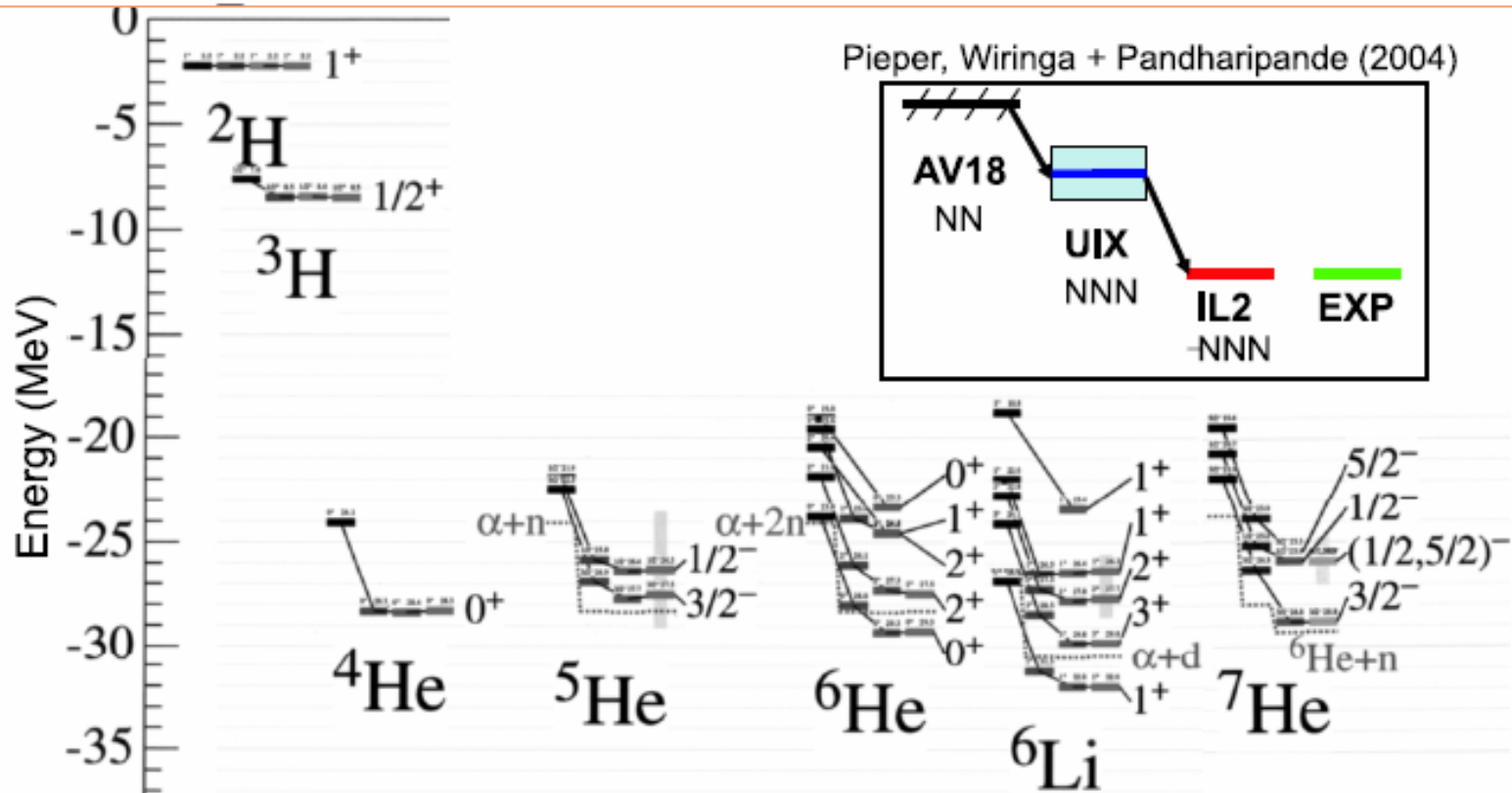


Figure 8. Nuclear binding energies and energy levels for light nuclei. The right-most bars denote experimental energies compared with results from GFMC calculations using the Argonne NN potential (AV18) and AV18 plus the Urbana - IX or the Illinois - 2 NNN potentials indicated by the three bars left to the experimental energies, respectively. The importance of three-body forces is evident. (This figure is part of a larger poster printed for me kindly by S. C. Pieper [20] on March 11, 2004.)

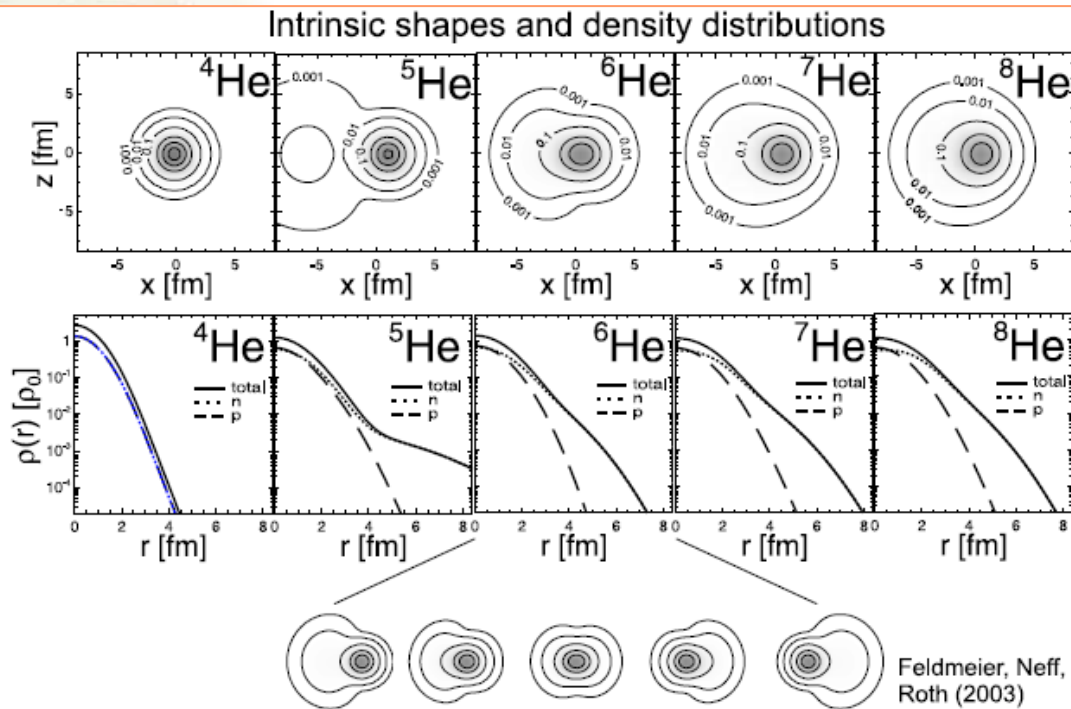


Figure 12. For the isotopes ${}^4\text{He}$, ${}^5\text{He}$, ${}^6\text{He}$, ${}^7\text{He}$, and ${}^8\text{He}$ intrinsic shapes are shown in the upper part and the corresponding neutron, proton and total densities as a function of radius in the lower part. For the ${}^6\text{He}$ nucleus the superposition of the zero-point motion of paired neutrons indicated at the bottom of the figure is essential in explaining the Borromean behavior of this halo nucleus (from [29]).

