§4.3.2. 核子-核子散射

光的衍射：

（1） 入射光为平面波，出射光为球面波，能量密度按 $1/r^2$，振幅按 $1/r$ 衰减；

（2） 在球形波面上，光强度的交替变化是由衍射光的干涉造成的；

（3） 在远处放置的探测器测到的既有入射波，也有散射波。

粒子的散射与光的衍射有相似之处：

（1）波动特性

（2）势井的作用-改变出射波的位相

1．低能核子-核子散射

n-p 散射：只有核力

p-p 散射：较复杂

n-n 散射：n-n 散射没有直接实验

仍采用球方势井：

$$V(r)=\begin{cases}V_0' & r\le R\\ 0 & r>R\end{cases}$$

对 ***r*<*R***，考虑到边界条件（***r*=0** 时，***u*=0**）

$u(r)=A\sin(k_1 r)$　　$k_1=\sqrt{2\mu(E-V_0')}$

对 ***r*>*R*,**

$u(r)=C'\sin(k_2 r)+D'\cos(k_2 r)$　　$k_2=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

或　　$u(r)=C\sin(k_2 r+\delta)$

其中δ称为相移。显然$C'=C\cos\delta,\ D'=C\sin\delta$ 。

连续性要求：

$C\sin(k_2 R+\delta)=A\sin k_1 R$

$k_2 C\cos(k_2 R+\delta)=k_1 A\cos k_1 R$

即

$k_2 ctg(k_2 R+\delta)=k_1 ctg k_1 R$

由此可解出 δ 。

分析：

$$V_0' = 0, \quad k_1 = k_2, \quad \delta = 0;$$

$$V_0' < 0, \quad k_1 > k_2, \quad \delta > 0; \quad \text{吸引}$$

$$V_0' > 0, \quad k_1 < k_2, \quad \delta < 0; \quad \text{外推}$$

对于 **l>0** 的波，有离心势 $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$，会产生不同的 δ_l。对于非球方势井，情况类似。

一般地，入射波

$$\Psi_{in} = Ae^{i(kz-wt)}$$

按球面波分解，取$l = 0$部分：

$$\Psi_{in} = \frac{A}{2ik}\left[\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r}\right]$$

出射　入射

考虑势场的作用，总的波函数在 **r** 很大时为

$$\Psi = \frac{A}{2ik}\left[\frac{e^{i(kr+\beta)}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r}\right]$$

按 **S** 波方程的解，当 **r** 很大时

$$\Psi(r)=\frac{C}{r}\sin(kr+\delta_0)$$

$$=\frac{C}{r}[\frac{e^{i(kr+\delta_0)}-e^{-i(kr+\delta_0)}}{2i}]$$

$$=\frac{C}{2i}e^{-i\delta_0}[\frac{e^{i(kr+2\delta_0)}}{r}-\frac{e^{-ikr}}{r}]$$

显然， $\beta=2\delta_0, A=kCe^{-i\delta_0}$ 。

散射波

$$\Psi_{sc}=\Psi-\Psi_{in}=\frac{A}{2ik}(e^{2i\delta_0}-1)\frac{e^{ikr}}{r}$$

散射流

$$j_{sc}=\frac{\hbar}{2\mu i}(\Psi_{sc}^{*}\frac{\partial\Psi_{sc}}{\partial r}-\frac{\partial\Psi_{sc}^{*}}{\partial r}\Psi_{sc})=\frac{\hbar|A|^2}{\mu kr^2}\sin^2\delta_0$$

而入射流

$$j_{in}=\frac{\hbar k|A|^2}{\mu}$$

在一定方向上 $d\Omega$ 立体角内穿出的粒子数与入射粒子数之比是微分截面：

$$d\sigma = \frac{j_{sc} r^2 d\Omega}{j_{in}} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}, \qquad \text{总截面} \quad \sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\sigma = \frac{4\pi \sin^2 \delta_0}{k^2}$$

显然，如果高次波也有贡献，则总截面需要对各个相移求和。

对 S 波，当入射能量很小时，则 k_2 很小，而 k_1 是由 V_0 所决定的常数。

在连续性方程中，可取

$$k_2 ctg(k_2 R + \delta) = k_1 ctg(k_1 R) = -\alpha$$

α 为正常数。上式可解出

$$\sin^2 \delta_0 = \frac{\cos k_2 R + \frac{\alpha}{k_2} \sin k_2 R}{1 + \frac{\alpha^2}{k_2^2}}$$

对于 k_2 很小的情况，可取 $k_2^2 << \alpha^2$，$k_2 R << 1$，

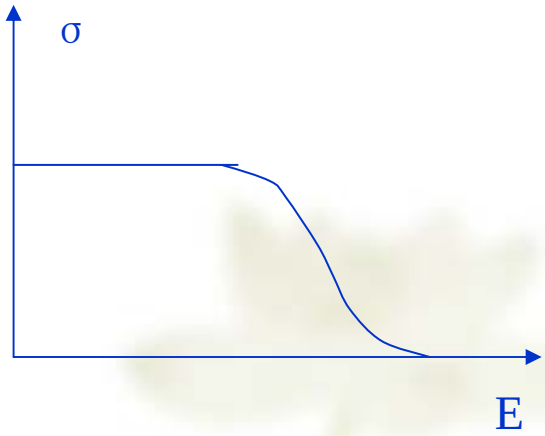
$$\sigma = \frac{4\pi}{k_2^2 + \alpha^2}(\cos k_2 R + \frac{\alpha}{k_2} \sin k_2 R) \approx \frac{4\pi}{\alpha^2}(1 + \alpha R) \cong 4.6 \text{ b}$$

用氘核势阱估算。

对于低能 **n-p** 散射，从实验上得知，在 **10eV<E<10keV** 内，截面几乎是常数，但σ **=20.44b**， 比上面推出的结果大得多。

实际上，上面推导中采用的是氘核中 **n-p** 自旋三重态相互作用的数据。**n-p** 散射还应有自旋单态（$S=0$）的相互作用，正如前面已指出，这种作用与三重态的不同。应当取

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_{\mathrm{t}} + \frac{1}{4}\sigma_{\mathrm{s}} \qquad (4.2-11)$$



σ_t 和 σ_s 分别是自旋三重态和自旋单态的 **n-p** 散射截面。σ_t 应为 **4.6b**，σ**=20.44b**，则可以定出 σ_s**=68b**。两种截面大小差别很大，表明自旋单态的作用与三重态是不一样的。

请由单态的低能截面推出对应的势井深度 V_0

对于能量稍高的 **S** 波散射，截面随能量的升高而降低，即σ是 $k=k_2$ 的函数。由上面的公式分析，σ 与 k 的符号无关，即σ可按 k 的偶次幂展开。历史上常用有效射程法来研究。

$$\sigma = 4\pi\frac{\sin^2\delta}{k^2} = \frac{4\pi}{k^2(1+\mathrm{ctg}^2\delta)} = \frac{4\pi}{k^2+\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}r_0k^2\right)^2} \qquad (4.2-10)$$

由上式可见，当 $k\to 0$ 时，有$\sigma=4\pi a^2$。

a 称为散射长度，实际上是与散射的强度有关。

$\mathbf{r_0}$ 在近似求解中是一个与相互作用范围有关的量，具有长度的量纲，因此被称为有效力程。

由低能 **n-p** 散射实验和氘核的数据，可以定出 **n-p** 相互作用中自旋三重态

$$a_t = 5.425 \pm 0.0014\text{fm}, \qquad r_{0t} = 1.749 \pm 0.008\text{fm}$$

$$a_s = -23.714 \pm 0.013\text{fm}, \qquad r_{0s} = 2.73 \pm 0.03\text{fm}$$

和自旋单态情形的散射长度与有效力程

低能 **n-p** 散射只能定出每种相互作用的两个参数 ***a*** 和 $\boldsymbol{r_0}$，而与核子-核子作用势函数的详细形式无关。这称为低能散射的有效力程理论，或称低能散射势阱形状无关理论。这是容易理解的，低能入射粒子波长很长，不能细致地分辨势阱的形状。于是，任意的两参数势阱，只要参量选得合适，就能和所有的低能核子-核子散射实验很好地符合。

（2）低能 p−p 散射和核力的电荷 无关性

既有核力作用，还有库仑力作用。两种作用都造成相移而且无法简单分开。

p-p 体系是全同粒子体系，散射截面在质心系中相对于 $\mathbf{90^0}$ 对称。波函数是交换两个粒子反对称的。对于 $\boldsymbol{l}=\mathbf{0}$ 的态，空 间波函数是对称的，两质子的自旋必须反平行。因此，对于两质子，只能是 $^1\mathbf{S}_0$ 态，即只有单态核力起作用。

对于低能**p-p**散射也有有效力程理论。可以定出散射长度a_p和有效力程r_{0p}，

$$a_p = -7.821 \pm 0.004\text{fm}$$

$$r_{0p} = 2.830 \pm 0.017\text{fm}$$

从上述结果也可以近似地得到仅仅是核力作用（没有库仑力）时的散射长度，

$$a_N \approx -(16.8 - 17.11)\text{fm}$$

有效力程大体上仍和有库仑作用时相同。与前面所定出的 **n-p** 自旋单态的散射长度 a_s 及有效力程 r_{0s} 相比，有效力程很接近，散射长度稍有差别。但是，由于散射长度对于势阱深度是很灵敏的函数，散射长度的这点差别引起势阱深度的差别不过百分之几。因此，可以近似地认为，在 $^1S_0$ 态，**p-p** 及 **n-p** 作用基本相同。

低能 **n-n** 散射没有直接的实验，可以通过间接实验来确定。由实验间接定出的 **n-n** 作用散射长度和有效力程是

$$a_n = -17.4 \pm 1.8\text{fm}$$

$$r_{0n} = 2.4 \pm 1.5\text{fm}$$

上述结果与 **p-p** 散射所定出的值也很接近。

比较 $^1S_0$ 态的核力，可以认为 **np**，**pp** 和 **nn** 的核力近似相同。这表明在相对运动状态和自旋态相同时，核子之间的作用与核子带电荷（质子）或不带电荷（中子）无关。这仅仅是一个近似正确的结论。这一结论也为高能核子-核子散射所证实，是核力的一个重要性质。

2．高能核子-核子散射

交换力　n-p 散射微分截面有几乎对称的向前、向后峰的现象。

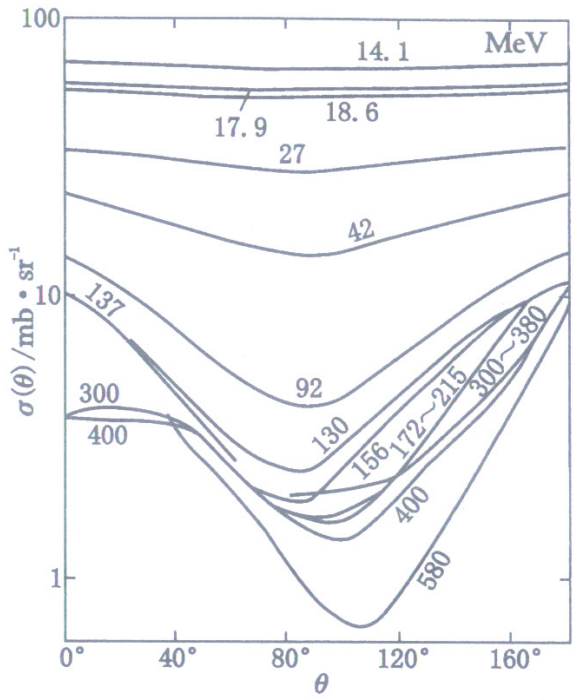


图 4-4　n-p 散射微分截面

[引自 W. N. Hess, Rev. Mod. Phys. ,30,368(1958).]

自旋-轨道耦合力

$$V_{L,S}=V_{L,S}（r）L\cdot S$$

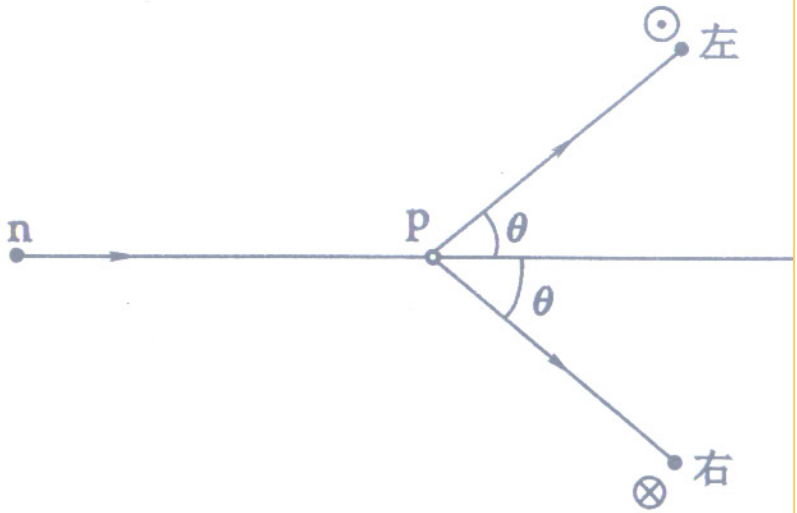


图 4-5　n-p 散射产生极化束

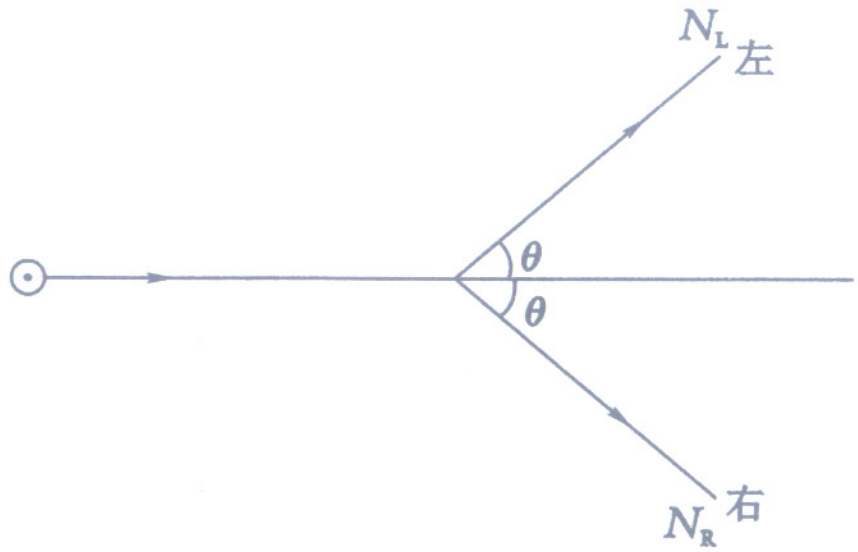


图 4-6　n-p 散射检验极化束

p-p散射 在r_0≈0.4fm处势函数有很强的排斥作用

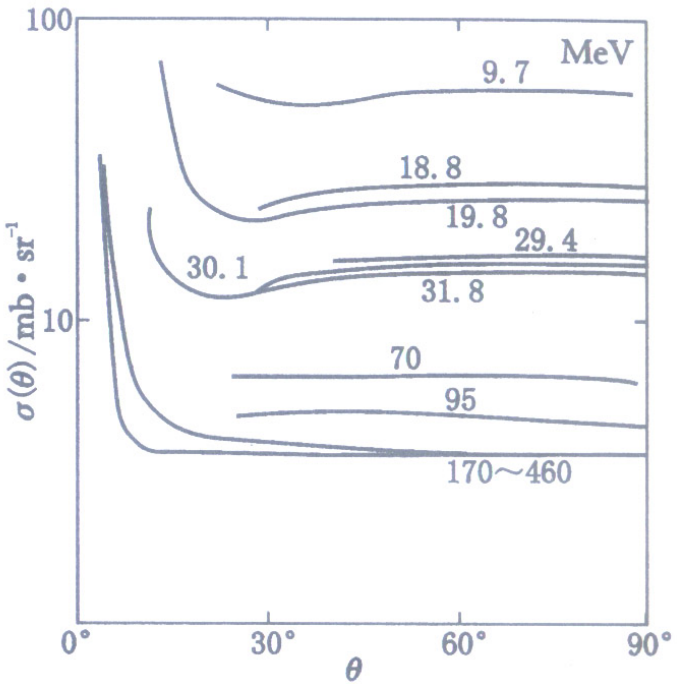


图 4-8 p-p 散射微分截面

[引自 W. N. Hess, Rev. Mod. phys., 30, 368(1958).]

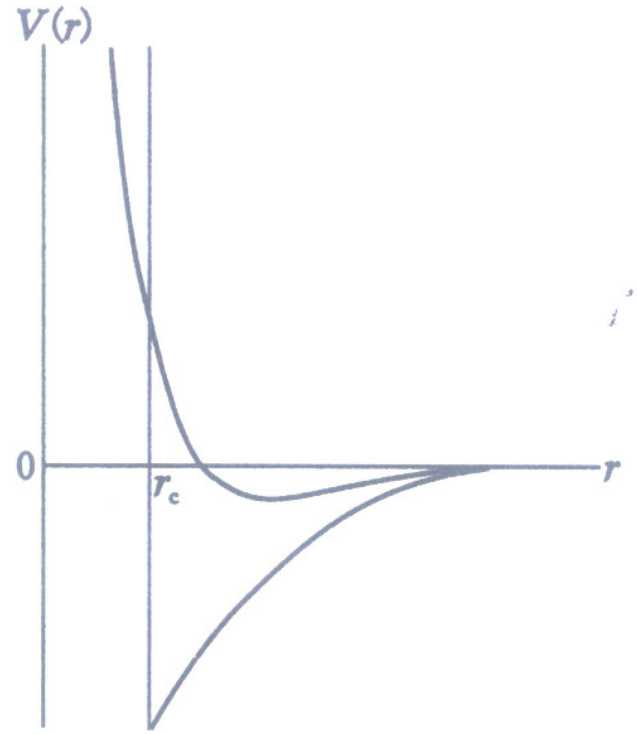


图 4-9 有排斥芯的中心势函数