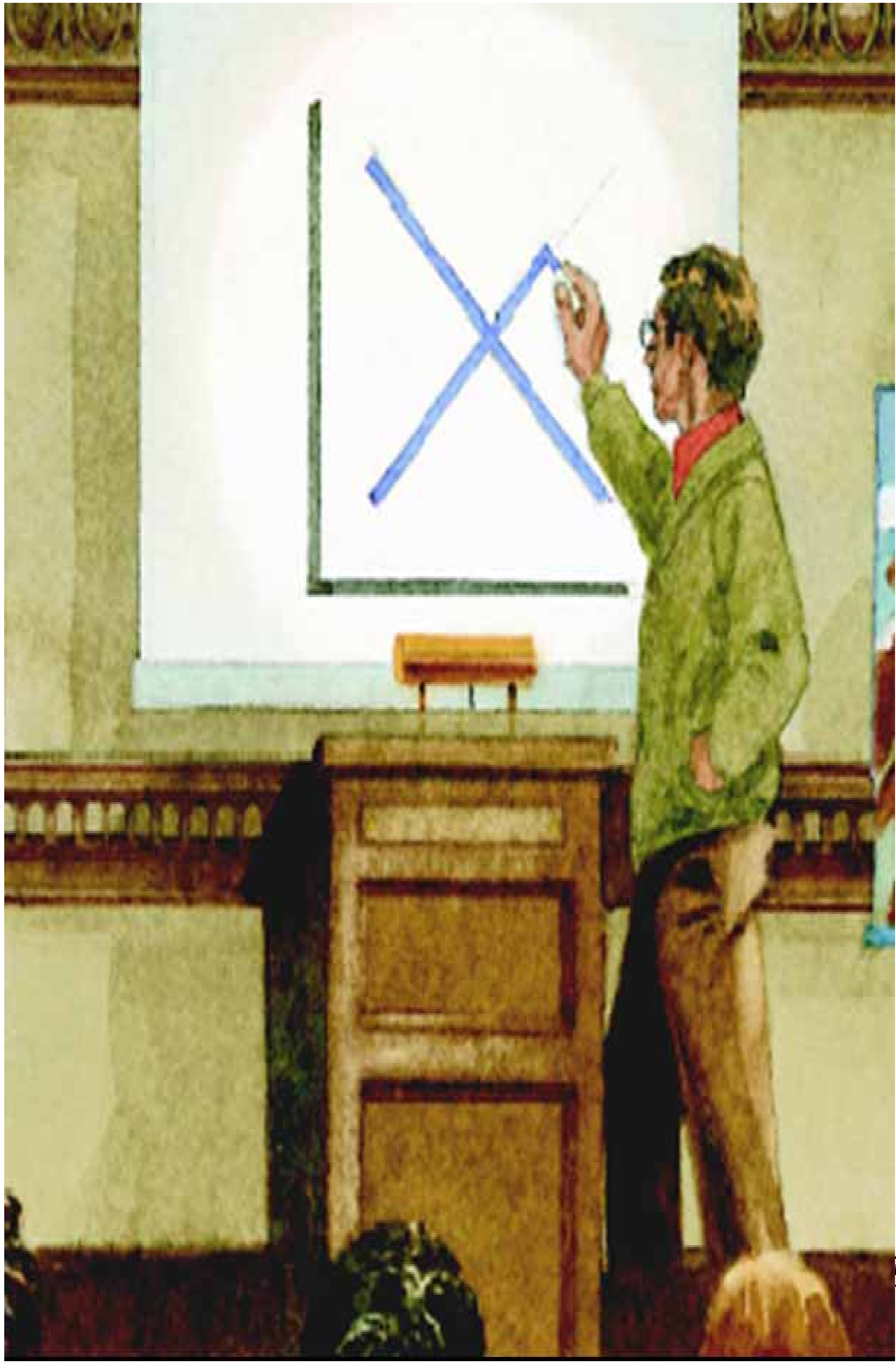


宏观经济学

教师：张 延

北京大学经济学院课程

2009年6月1日

- 作业：
- 《高级宏观经济学》商务印书馆1999年版
- 第47页：1.2、1.6、1.8
- 6月4日周四交第6次作业。
- 6月5日周五上第6次习题课。

- 考 试 时 间
- 6月15日周一下午2：00 — 4：00
- 题目类型（见网上模拟试卷和答案）

- # 9.4　储蓄率变化的影响

- 在索洛模型中，就投入的要素而言，劳动、知识的增长率外生，资本的增长率取决于 s、Y 和 δ。

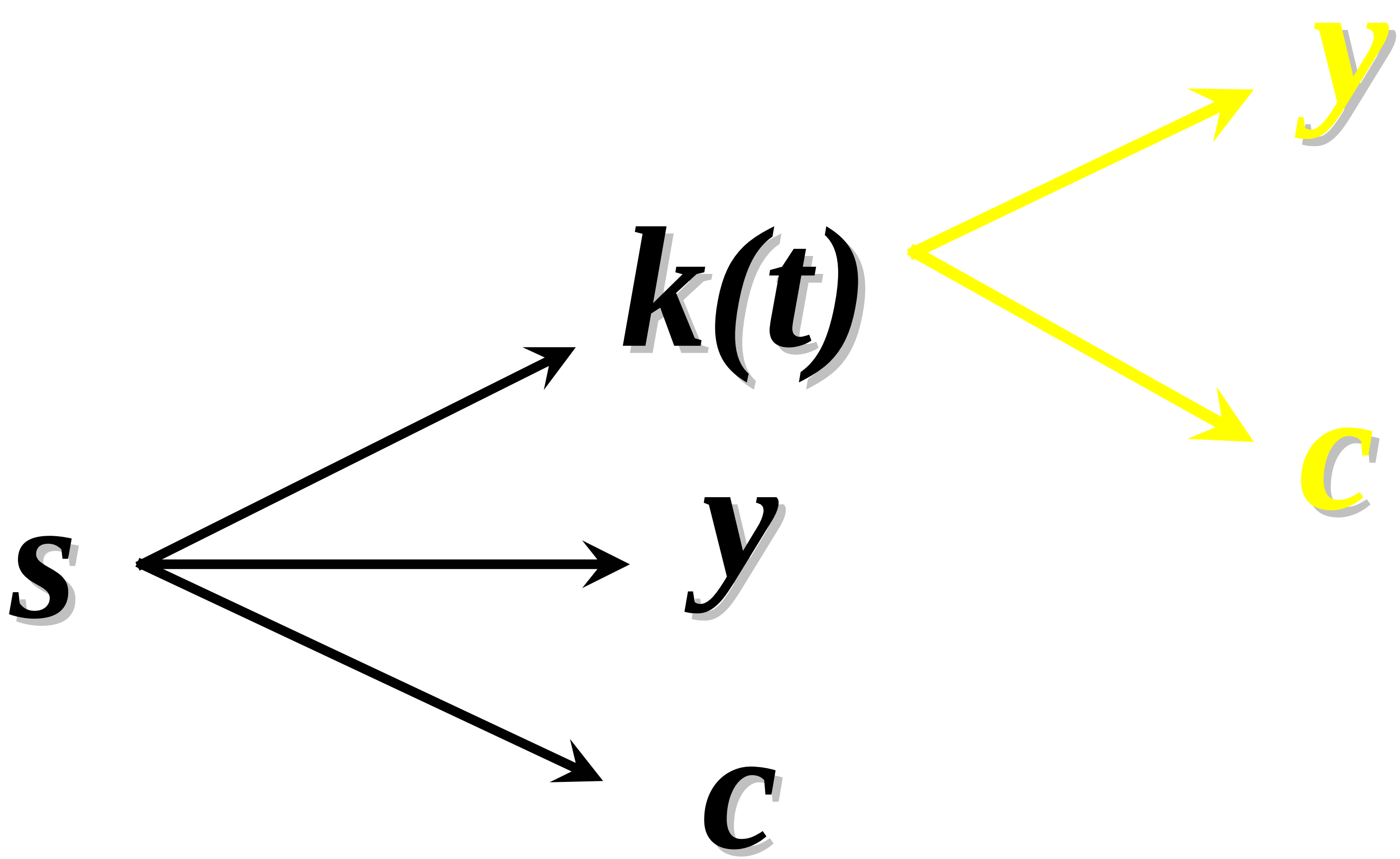
- 其中政策最有可能影响的参数是储蓄率。政府购买在消费品和投资品之间的分配，政府收入中税收和借款所占比例以及政府对储蓄和投资的课税都有可能影响产量中用于投资的比例。因此，就有必要考察一下储蓄率变化的效应。

- 具体一点，我们考虑一个处于平衡增长路径上的索洛模型，并假定s有一永久性增加。除了表明该模型中储蓄的作用以外，这一试验还将表明，当经济不在平衡增长路径上时，该模型的特性。

$$\begin{tikzcd} & k \\ s \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & y \\ & c \end{tikzcd}$$

- s 变化的直接影响

- 我们的分析思路是：
- 1、第一：定性分析。
- 各个因变量对自变量s求导



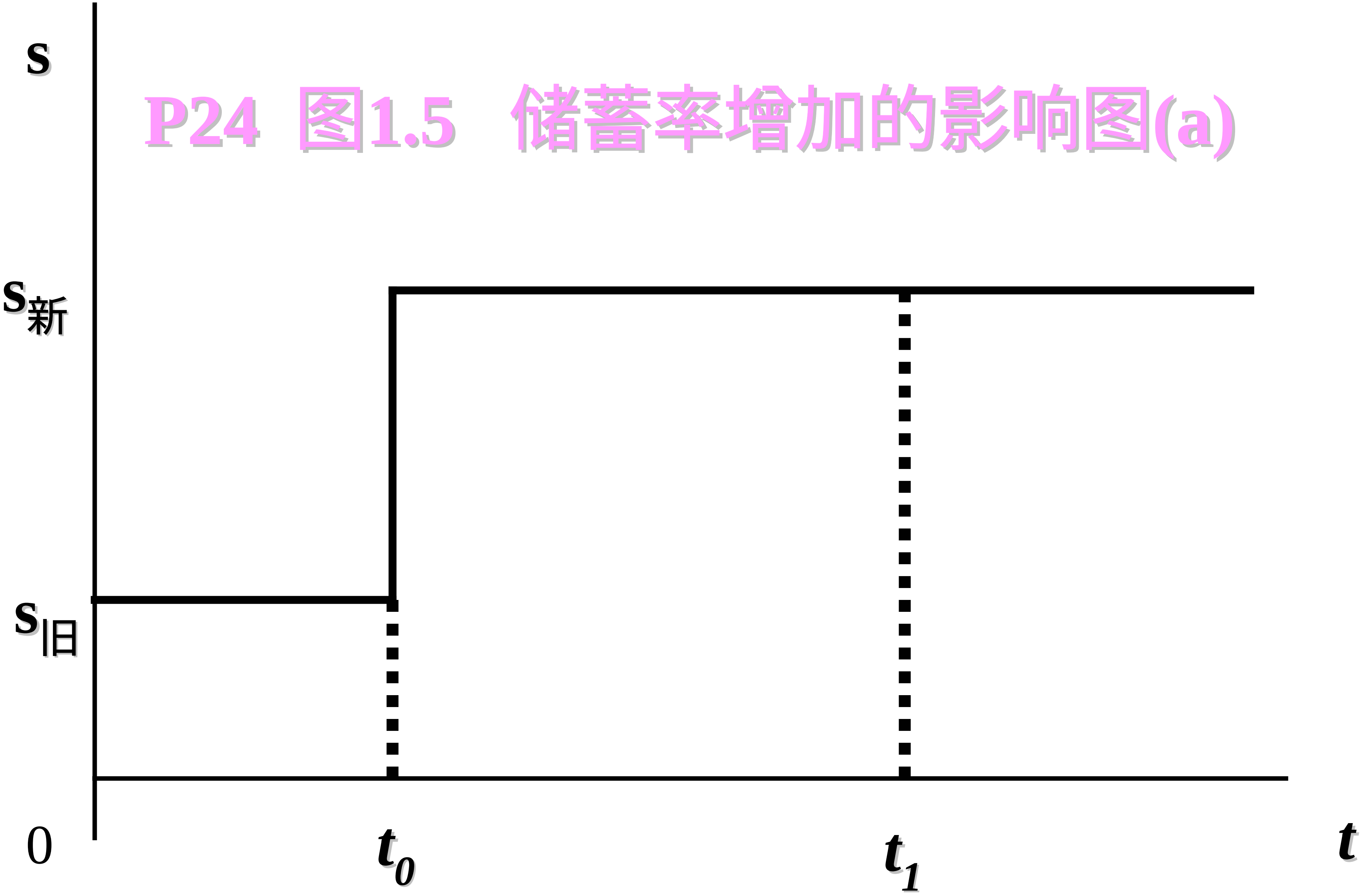
- s 变化的直接影响和间接影响

2、第二：各个变量对时间t求导

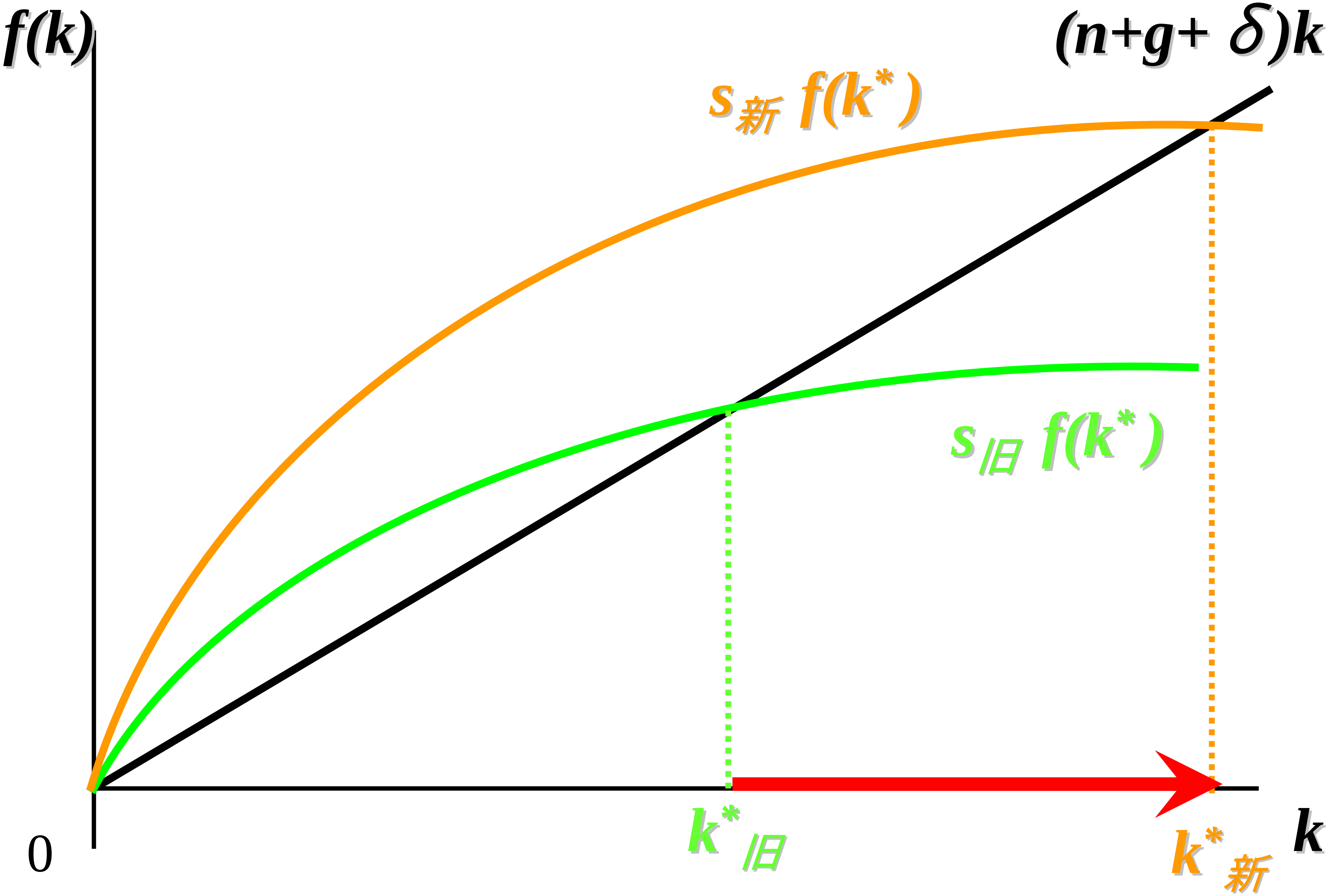
- 由于均衡是一种不再变动的境界，所以对各个变量的讨论分成三个时期：
- （1） 在t_0之前，旧的均衡打破之前。
- （2） 在t_1之后，新的均衡建立之后。
- （3） 在t_0和t_1之间，涉及从旧的均衡到新均衡的过渡时期。

- 一、对k 的影响：$s \longrightarrow k$
- 1、s 的变化(突变)
- $s_{旧}$ 的一次性上升 $\longrightarrow$ $s_{旧} \uparrow s_{新}$
- $\longrightarrow$ $s_{旧} < s_{新}$
- 在t_0 之前，s为一条较低水平的直线。
- 在t_0 之后，s为一条较高水平的直线。*

P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(a)

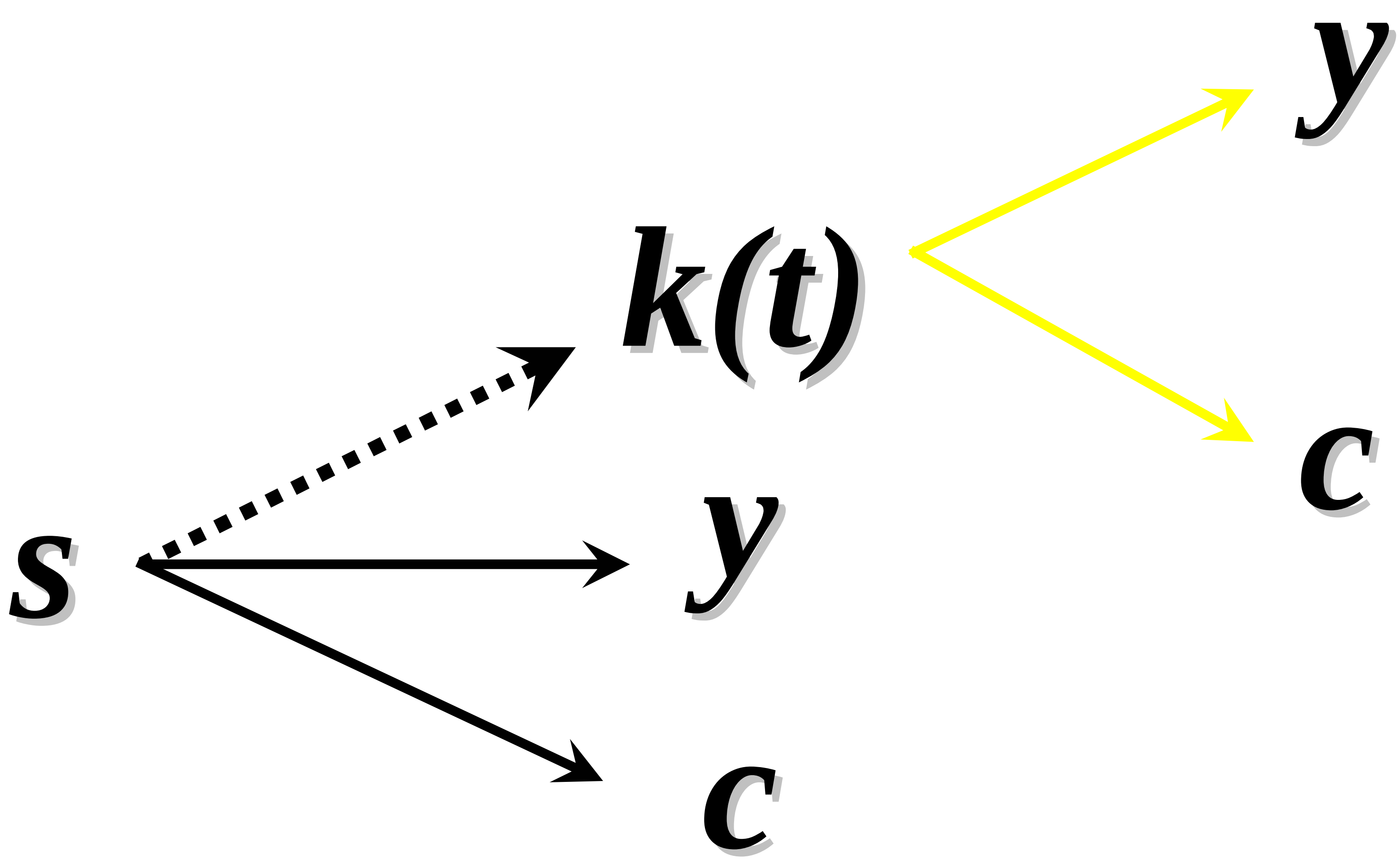


- 从几何图形上看：
- $s\uparrow \longrightarrow s\,f(k)\uparrow$
- $\longrightarrow$ 与 $(n+g+\delta)k$ 交于更高的 k^*
- $\longrightarrow k^*\uparrow$



- P23 图1.4 储蓄率提高对投资的影响

- 从图中可见：
- (1) s 与 k^* 同方向变化。$s\uparrow \rightarrow k^*\uparrow$
- (2) k^* 的变化是一个渐进的过程，从$k^*_{旧}$到$k^*_{新}$是一个渐进的过程，从$k^*_{旧}$到$k^*_{新}$之间，存在 $\dot{k}>0$ —→ k 要继续上升 —→ $k^*_{旧}\uparrow k^*_{新}$
- 如何证明上述的结论。



- s 变化的直接影响

- 2、k^* 随 s 变化的定性分析。
- 定性分析如下：
- ∵ k^* 是由 $\dot{k} = 0$ 定义的
- ∴ k^* 满足：$s\,f(k^*) = (n + g + \delta)k^*$ (1.17)
- ∵ k^* 是(s、n、g、δ) 的隐函数，
- 方程(1.17)对于(s、n、g、δ) 都成立。
- ∴ 方程(1.17)两端对s 的导数相等？
- $f(k^*) + s\,[f'(k^*)(\partial k^* / \partial s)]$
- $= (n+g+\delta)(\partial k^* / \partial s)$

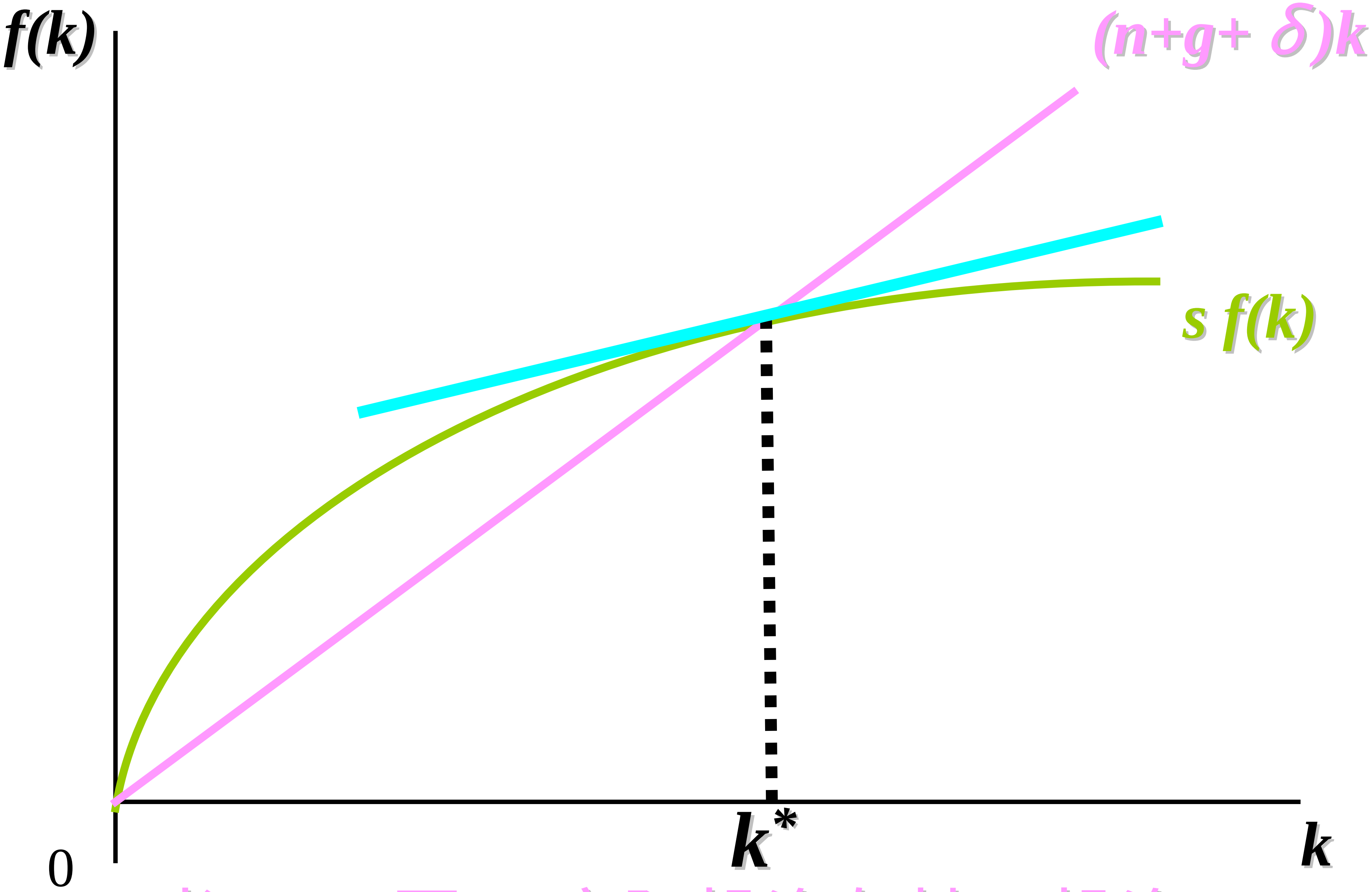
$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - s f'(k^*)} \qquad (1.19)$$

- $(n+g+\delta)$是持平投资线的斜率，而$s f'(k^*)$是实际投资线在k^*处的斜率。

- 开始的时候，曲线 $s f(k)$ 先比直线$(n+g+\delta)k$陡峭，然后随着k的上升，曲线 $s f(k)$ 逐渐变得比直线$(n+g+\delta)k$ 平坦 ——→ 这两条线最终肯定会相交 ——→ 必定存在一个交点。

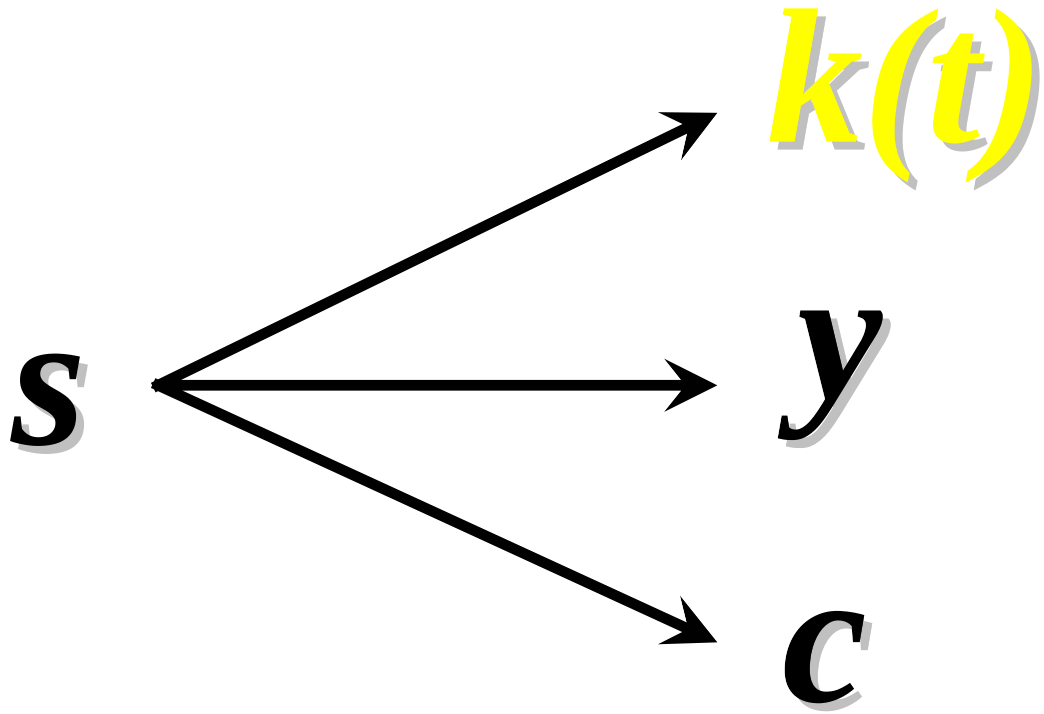
- 在 $k = k^*$ 处，由于持平投资线 $(n+g+\delta)k$ 比实际投资线 $s\,f(k)$ 陡峭 (见图1.2)，可知(1.19)的分母为正，

$$(n+g+\delta) > s f'(k^*)$$



书P20 图1.2实际投资与持平投资

- 因而 $\partial k^* / \partial s > 0$
- $\longrightarrow$ s 与 k^* 同方向变动
- 结论：
- s 的一次性上升（突变）$\longrightarrow$
- 导致 k^* 上升 $\longrightarrow$ $k^*_{旧} \uparrow k^*_{新}$



- k 是时间 t 的函数

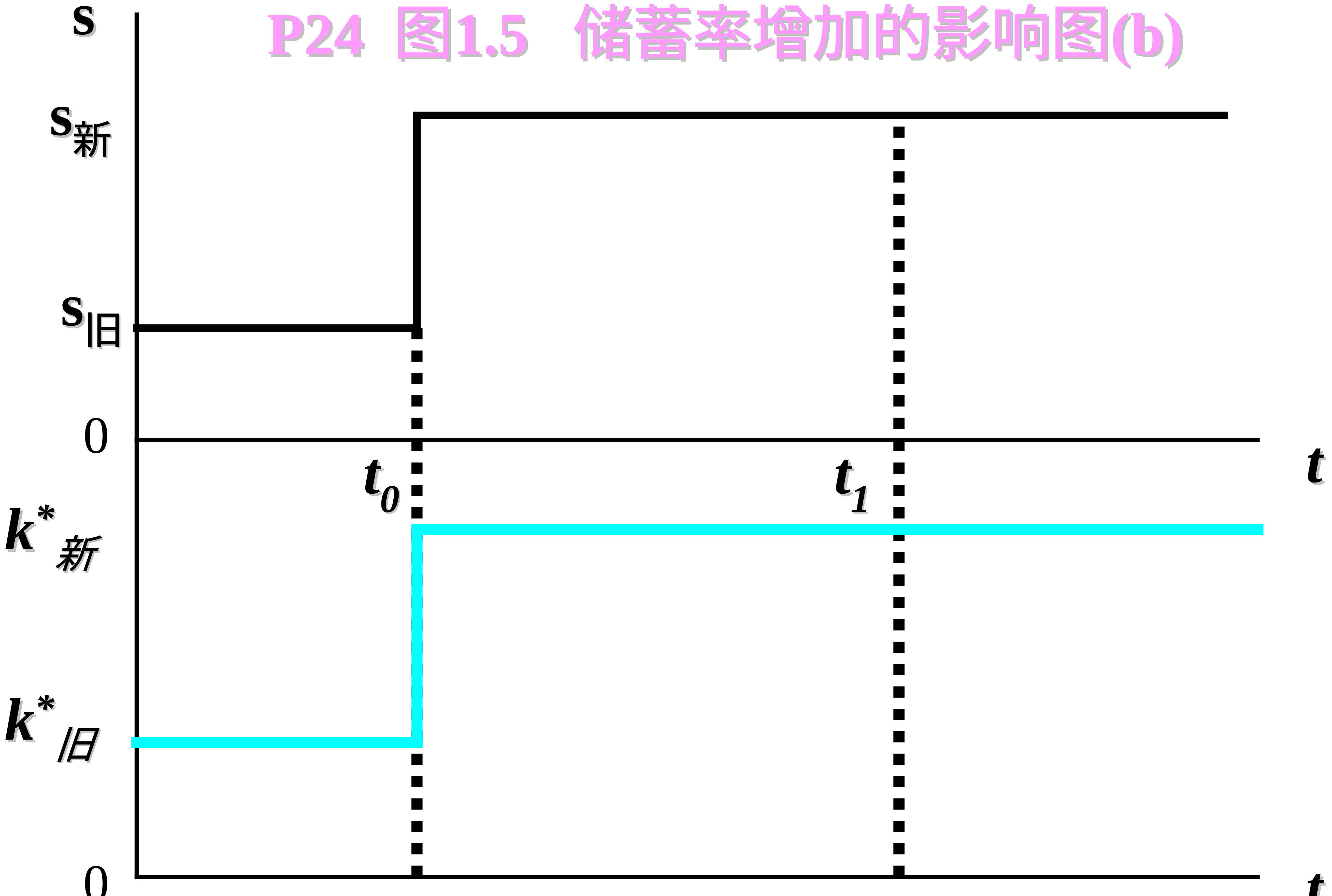
- 均衡是一种不再变动的境界。
- 对各个变量的讨论分成三个时期：
- （1） 在t_0之前，旧的均衡打破之前。
- （2） 在t_1之后，新的均衡建立之后。
- （3） 在t_0和t_1之间，涉及从旧的均衡到新均衡的过渡时期。

- 在t_0之前，在$k^*_{旧}$上，存在：
- $k^{\cdot} = s_{旧}\ f(k^*_{旧}) - (n+g+\delta)k^*_{旧} = 0$
- k为$k^*_{旧}$水平上的一条较低水平的

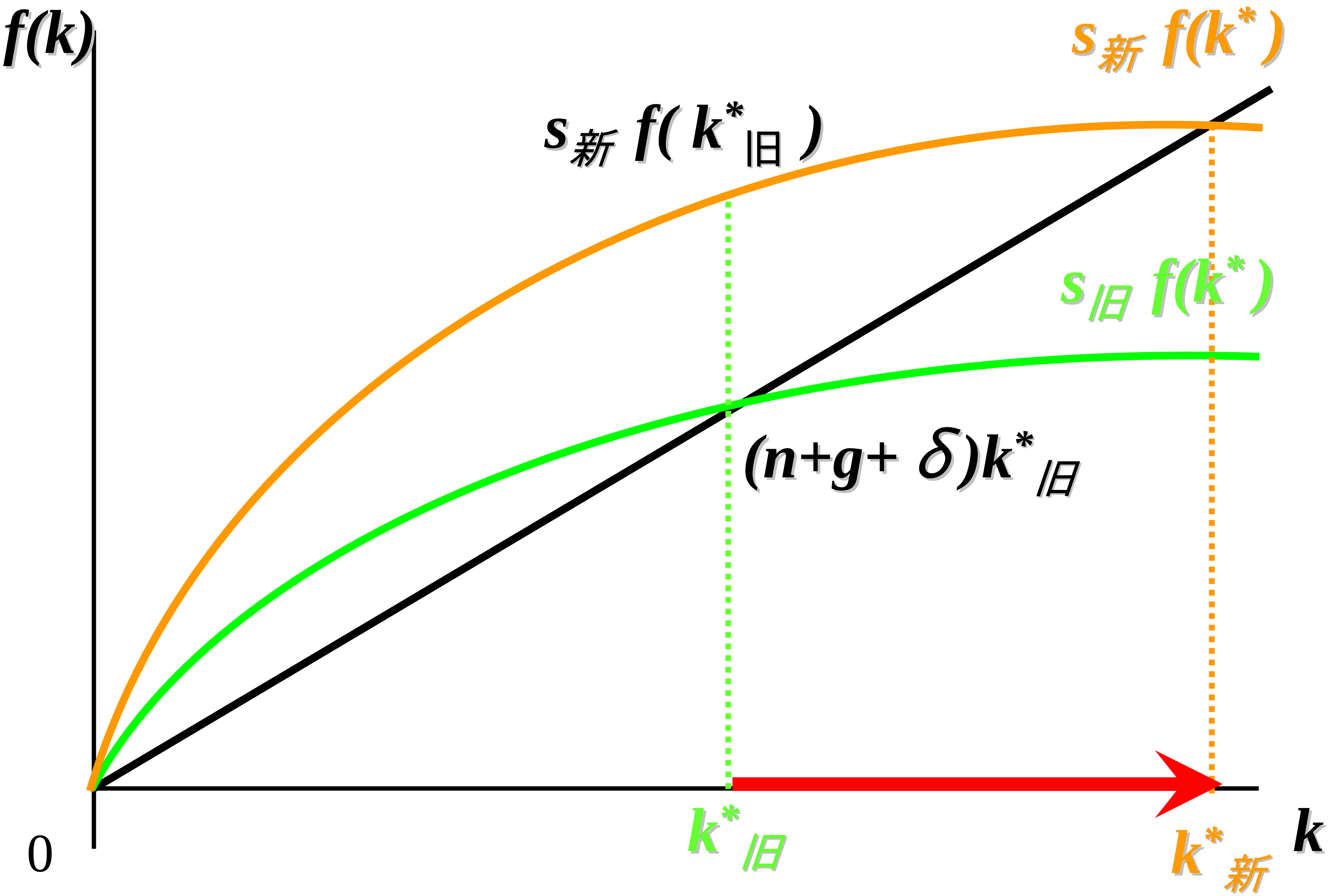
直线。

- 在t_1之后，在$k^*_{新}$上，存在：
- $\dot{k} = s_{新} f(k^*_{新}) - (n+g+\delta)k^*_{新} = 0$
- k为$k^*_{新}$水平上的一条较高水平的直线。
- 问题：
- $k^*_{旧} \uparrow k^*_{新}$是突变？还是渐变？

P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(b)



- 3、k 随时间t 逐渐变化的路径。
- (1) k 对t 的一阶导(决定k 的单调性)
- s 的增加使实际投资线向上移动，因此k^*上升。如图1.4所示，不过k 并未立刻跳至k^*的新值。开始时，k 等于k^*的旧值。
- $\because$ $\dot{k} = s_{旧} f(k^*_{旧}) - (n+g+\delta)k^*_{旧} = 0$
- $\therefore$ $\dot{k} = s_{新} f(k^*_{旧}) - (n+g+\delta)k^*_{旧} > 0$
- $\longrightarrow$ k与t 同方向变化。

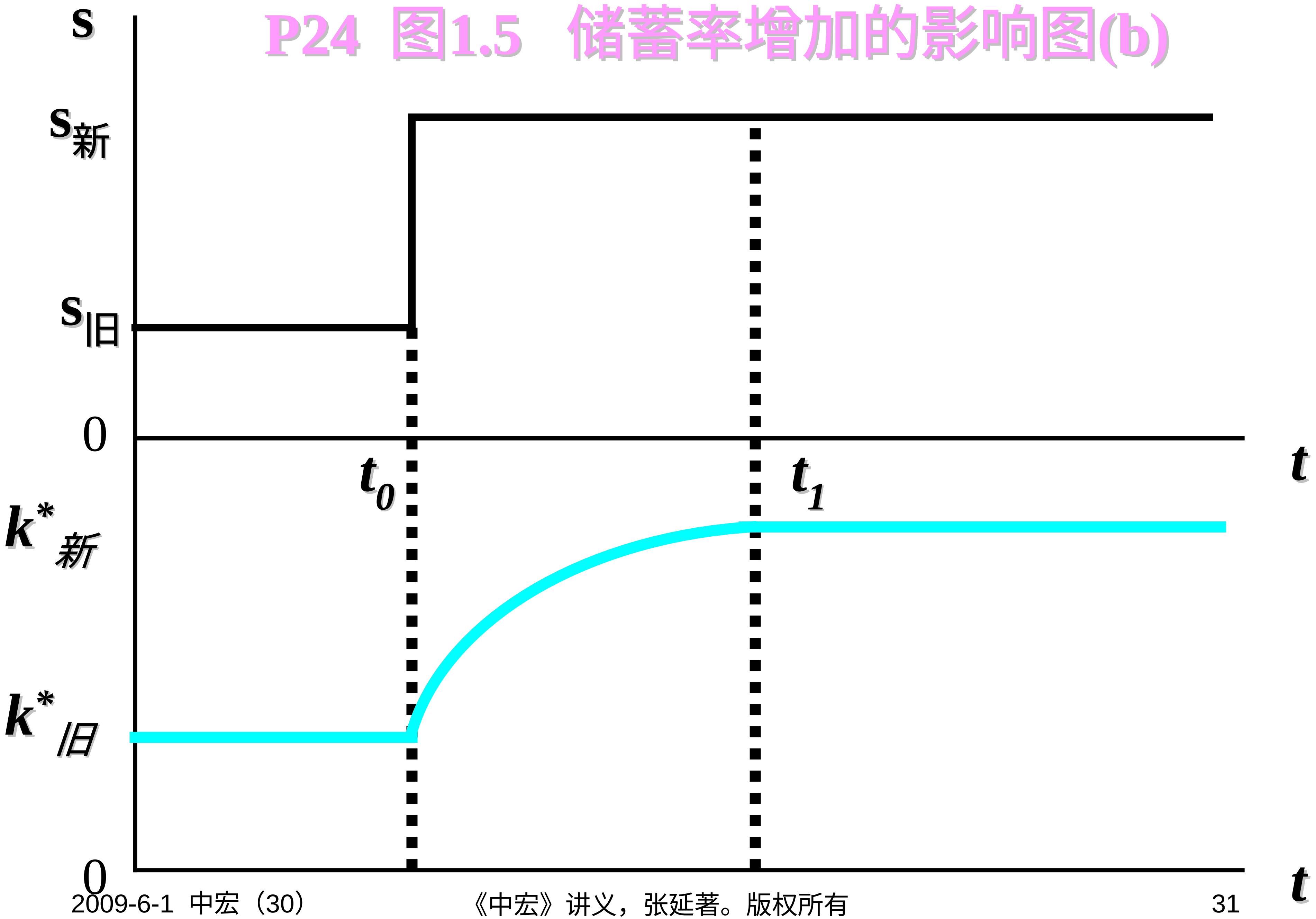


- P23 图1.4 储蓄率提高对投资的影响

- 经济含义：
- 在这一水平上，实际投资现在超过持平投资 —— 用于投资的资源多于维持*k*不变所需的水平 —— 因此$\dot{k}$是正的。
- 这样*k* 开始上升。它将继续上升，直至达到新值，在这一值上它将保持不变。
- 在$k^*_{新}$上，存在：
- $\dot{k} = s_{新} f(k^*_{新}) - (n+g+\delta)k^*_{新} = 0$

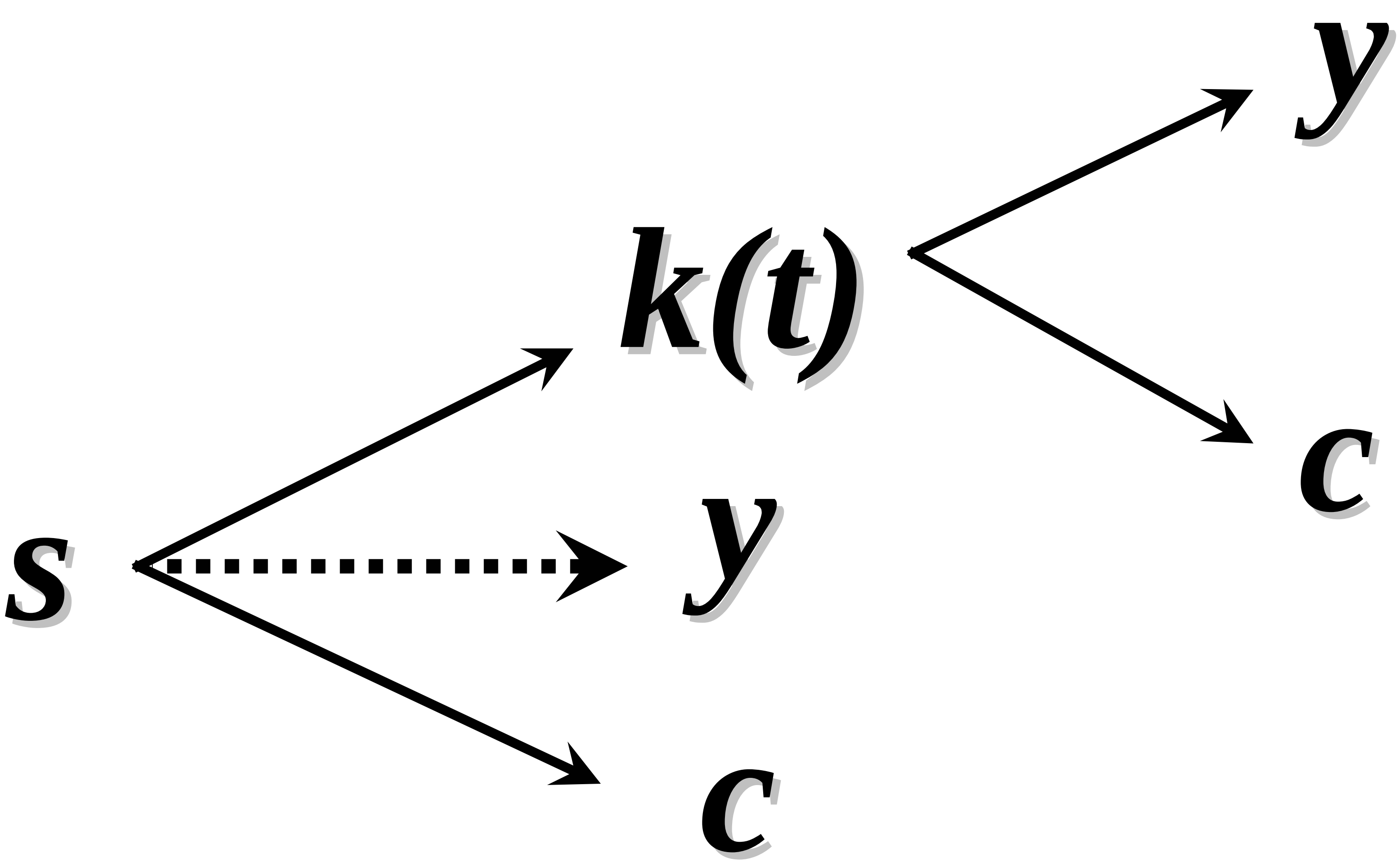
- (2) k 对t 的二阶导(决定 k 的凹凸性)
- $d\dot{k}/dt$
- $= sf'(k)\dot{k} - (n+g+\delta)\dot{k}$
- $= [sf'(k) - (n+g+\delta)]\dot{k}$
- $\because (n+g+\delta) > sf'(k)$
- 并且 $\dot{k} > 0$
- $\therefore$ $d\dot{k}/dt < 0$ ⟶ 随着 t 的推移，k以递减的速率单调上升，k 凹向原点

P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(b)



• 二、对产量y的影响：

- 我们常常不仅关心一个模型的定性含义，还关心其定量预测。例如，如果储蓄率的一个不大的增加对增长的影响在几个世纪之后仍然较大，那么如果得出结论说，该影响是暂时的，就没有太大意义。
- 对于大多数模型来说(包括本模型)，要得到严格的定量结果，就得对函数形式和各参数值予以设定；通常也得用数字例子进行分析。



- s 变化的直接影响

- 1、储蓄率对产量长期影响的定性分析

- $\partial y^* / \partial s = f'(k^*)(\partial k^* / \partial s)$ **(1.16)**

- 其中y^*为处于平衡增长路径上的每单位有效劳动的平均产量水平。

- ∵ k^*是由$\dot{k} = 0$定义的
- ∴ k^* 满足：
- $$s\,f(k^*) = (n + g + \delta)k^* \qquad (1.17)$$

- ∵ k^* 是$(s$、n、g、$\delta)$的隐函数，方程(1.17)对于$(s$、n、g、$\delta)$都成立。
- ∴ 方程(1.17)两端对s 的导数相等：
- $f(k^*) + s\,[\,f'(k^*)(\partial k^*/\partial s)\,]$
- $= (n + g + \delta)(\partial k^*/\partial s)$

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n + g + \delta) - s\,f'(k^*)} \qquad (1.19)$$

- 在前边方程(1.15)中，我们就看到s 的上升提高k^*。这也是方程(1.19)的一个推论，注意$(n + g + \delta)$是持平投资线的斜率，而$s f'(k^*)$是实际投资线在 k^* 处的斜率。
- 开始的时候，曲线 $s f(k)$先比直线$(n+g+\delta)k$陡峭，然后随着k的上升，曲线 $s f(k)$ 逐渐变得比直线 $(n+g+\delta)k$ 平坦 —→ 这两条线最终肯定会相交 —→ 必定存在一个交点。

- 在$k = k^*$处，由于持平投资线$(n+g+\delta)k$比实际投资线$s f(k)$陡峭 (见图1.2)，可知(1．19)的分母为正：
- $(n+g+\delta) > s f'(k^*)$
- 因而 $\partial k^* / \partial s > 0 \rightarrow s$与$k^*$同方向变动。

- 把(1.19)代入(1.16)，得到 ：
- $\partial y^* / \partial s = f'(k^*)(\partial k^* / \partial s)$

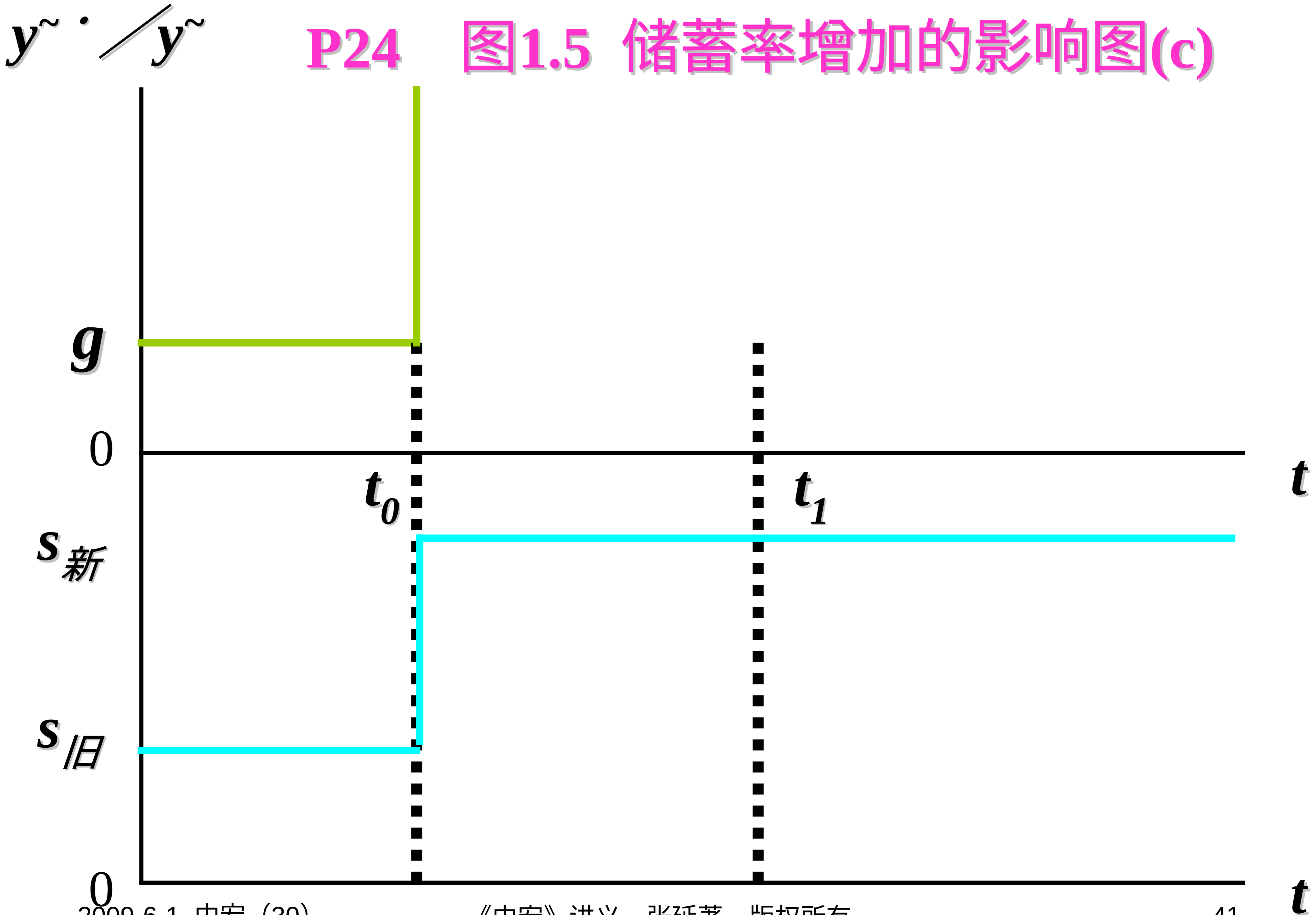
$$= f'(k^*) \frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - s f'(k^*)}$$

- 因而 $\partial y^* / \partial s > 0$
- ⟶ s 与 y^* 同方向变动。

- 结论：

- s 的一次性上升 ⟶ 导致 y^* 上升。

P24　图1.5 储蓄率增加的影响图(c)



- 2、储蓄率对产量长期影响的定量分析
- 我们常常不仅关心一个模型的定性含义，

还关心其定量预测。

- 两边同乘以 $s／y^*$，得到：

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\cdot\frac{s}{y^*}=\frac{s}{y^*}\cdot\frac{f'(k^*)\,f(k^*)}{(n+g+\delta)-s\,f'(k^*)}$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\cdot\frac{s}{y^*}=\frac{s}{y^*}\cdot\frac{f'(k^*)\ f(k^*)}{(n+g+\delta)-s\ f'(k^*)}$$

$$=\frac{s\ f'(k^*)}{(n+g+\delta)-s\ f'(k^*)}$$

$$=\frac{f'(k^*)}{(n+g+\delta)/s-f'(k^*)}$$

- ∵ $s\ f(k^*) = (n + g + \delta)\,k^*$
- ∴ 把$(n + g + \delta)/s = f(k^*)/k^*$
- 代入上式，得到：

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\cdot\frac{s}{y^*} = \frac{f'(k^*)}{f(k^*)/k^* - f'(k^*)}$$

$$= \frac{f'(k^*)\,k^*/f(k^*)}{1 - f'(k^*)\,k^*/f(k^*)}$$

- ∵ $f'(k^*)\,k^* / f(k^*)$
- 为 $k = k^*$ 处的单位产出的资本弹性。
- $f'(k^*)$ ——— 资本的边际产量
- $f'(k^*)\,k^*$ ——— 资本获得的收入
- $f'(k^*)\,k^* / f(k^*)$
- ——资本在单位产出中所占的份额(%)
- 令 $a_K(k^*) = f'(k^*)\,k^* / f(k^*)$

∴
$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\cdot\frac{s}{y^*} = \frac{a_K(k^*)}{1 - a_K(k^*)}$$

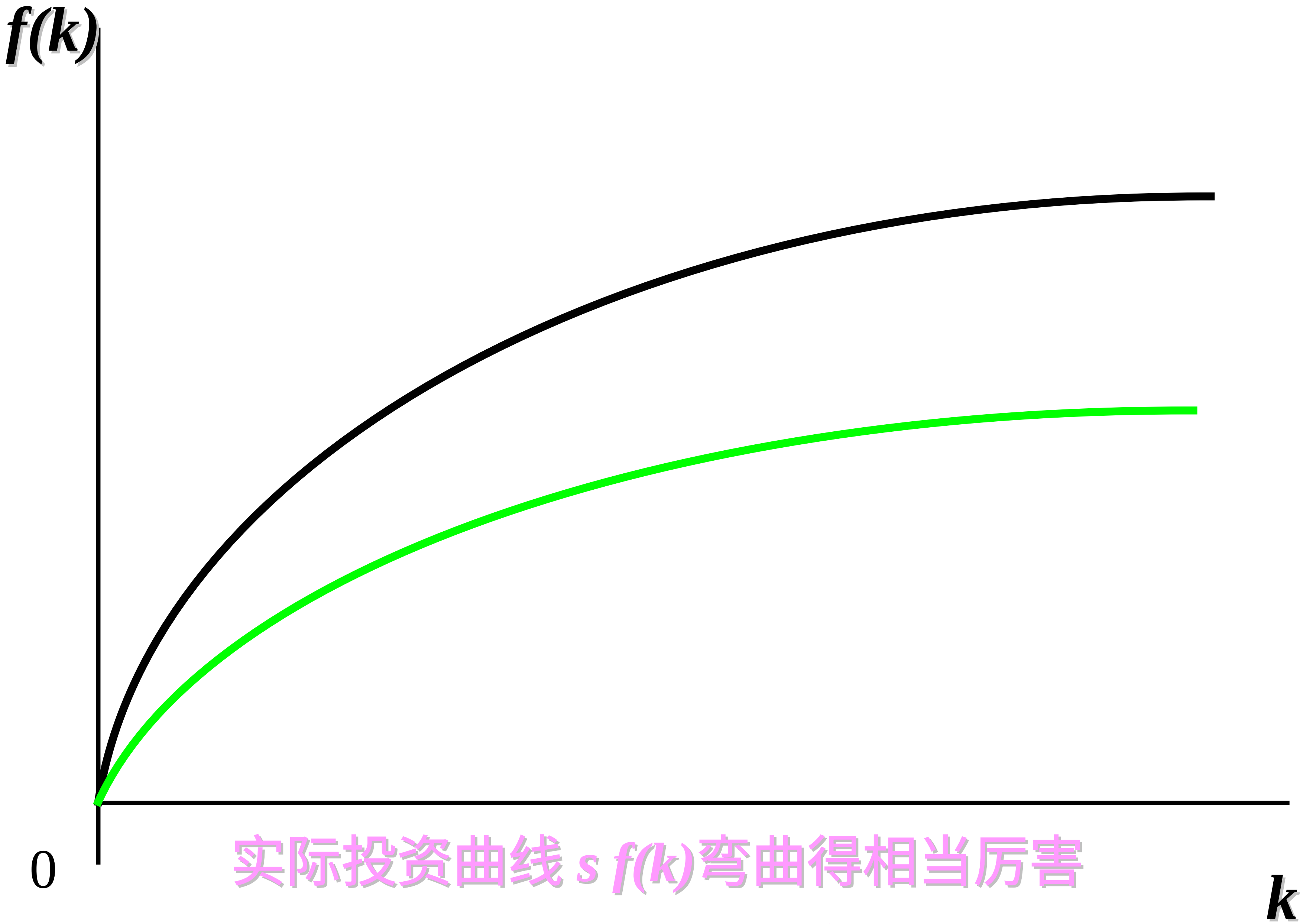
$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\cdot\frac{s}{y^*}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta y^*/y^*}{\Delta s/s}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta y^*}{\Delta s}\cdot\frac{s}{y^*}$$

$$=\frac{\text{单位产出变动的百分比}}{\text{储蓄率变动的百分比}}$$

- 在大多数国家，$a_K(k^*) = 1/3$。
- 可知在长期，产出的储蓄率弹性为：
- $(\partial y^* / \partial s)(s / y^*) = (1/3)/(1-1/3) = 1/2$
- 储蓄率增加10%，与储蓄率不变时相比，将使每工人平均产量在长期内提高大约5%。即使储蓄率增加50%，也仅使 y^* 增加大约22%。这样，储蓄率的显著变化对于平衡增长路径上的产量水平只有较小影响。

- 单位产出的资本弹性 —— $a_K(k^*)$较小的含义：
- (1) $a_K(k^*)$ 较小的几何意义
- $a_K(k^*) = f'(k^*)\,k^* / f(k^*)$
- 其中的 $f'(k^*)$ 较小 ⟶ 表明实际投资曲线 $s\,f(k)$弯曲得相当厉害（变得更加平坦）⟶ $f'(k^*)\,k^*$ ⟶ $f'(k^*)\,k^*$ 较小。



实际投资曲线 $s\,f(k)$ 弯曲得相当厉害

（变得更加平坦）

- (2) $a_K(k^*)$ 较小的经济含义
- 资本的边际产量 $f'(k^*)$ 较小
- ——→ 资本的收入较小 $f'(k^*)\,k^*$
- ——→ 资本占单位产出的份额 $f'(k^*)\,k^* / f(k^*)$较小
- $a_K(k^*) = f'(k^*)\,k^* / f(k^*)$
- 单位产出变动的百分比
- = ————————————————
- 资本变动的百分比

- 较小的$a_K(k^*)$值意味着k^*的变化对y^*的影响较小。
- 例如，$(n+g+\delta)$一般为每年6%(比如，若人口增长率为1～2%，每工人平均产量增长1～2%，折旧率为3～4%)。若资本的收入份额大致为1／3 。
- 若 $n+g+\delta=6\%$，$a_K(k^*)=1/3$
- 则 $\lambda=[1-a_K(k^*)](n+g+\delta)=4\%$。

- 因此，y 每年向 y^* 移动剩余距离的4%，要走完到其平衡增长路径值的距离的一半约需18年时间。
- 因此在我们的例子中，如果储蓄率增加10%，那么在1年后产量高于其以前路径0.04(5%)=0.2%；18年后高出0.5(5%) = 2.5%，且此比例渐趋近5%。这样，不仅储蓄率变化较大时的总体影响较小，而且其作用的出现也不很快

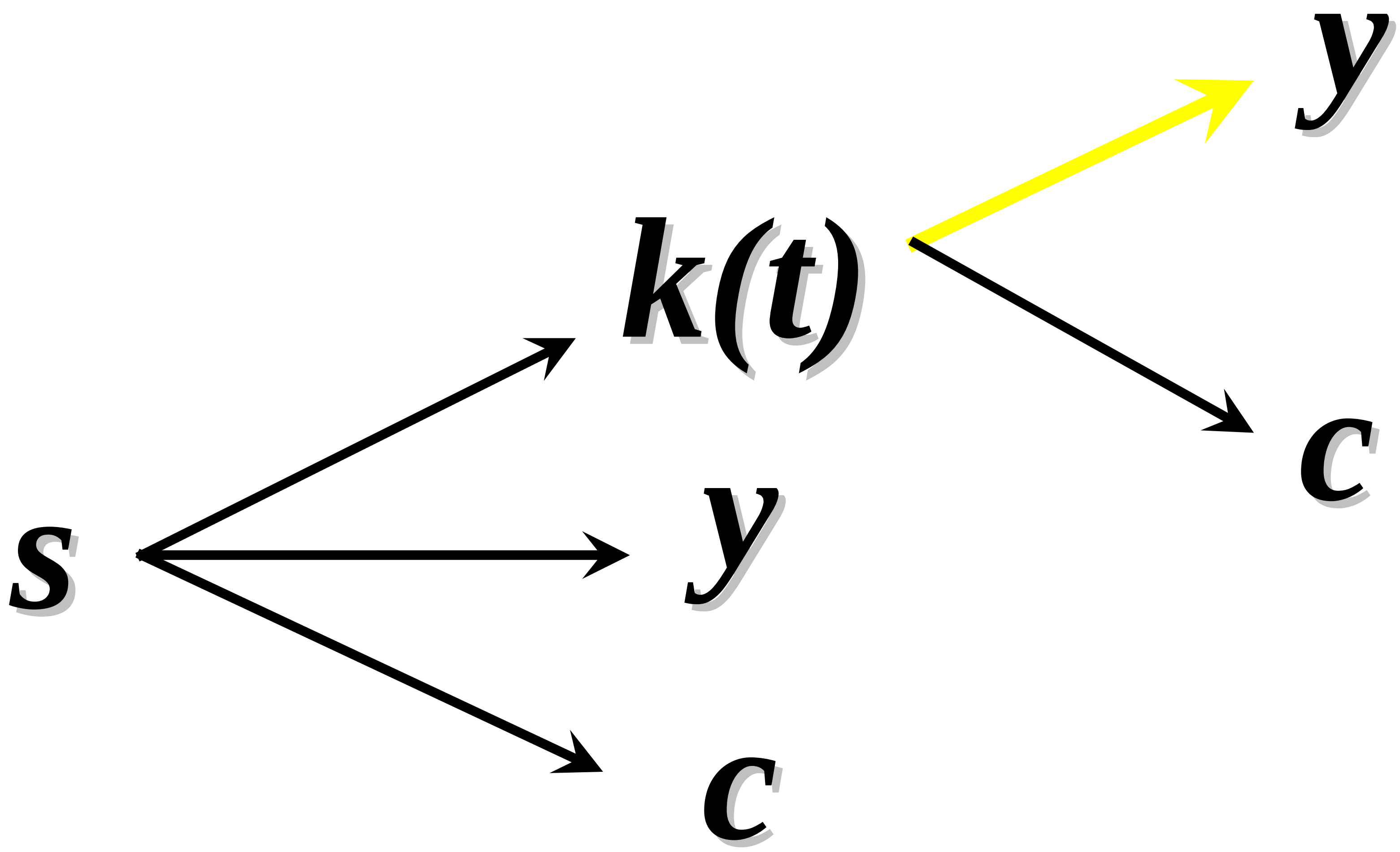
- 3、人均产量 $y^{\sim} = Y/L$ 随s的变化
- 每工人平均产量Y/L 的变动是我们特别感兴趣的东西。
- $y^{\sim} = Y/L = A\ f(k)$。
- $s \longrightarrow k \longrightarrow Y/L$

- $\partial \tilde{y}^{*} / \partial s = A f'(k^{*})(\partial k^{*} / \partial s)$
- 因而 $\partial \tilde{y}^{*} / \partial s > 0 \longrightarrow s$ 与 $\tilde{y}^{*}$ 同方向

变动。

- 结论：
- s 的一次性上升 $\longrightarrow$ 导致 $\tilde{y}^{*}$ 上升。

- $\tilde{y} = A\ f(k)$
- $\dot{\tilde{y}} / \tilde{y}$
- $= \dot{A}/A + \dot{f}(k)/f(k)$
- $= g + \dot{f}(k)/f(k)$
- $= g + f'(k)\dot{k}/f(k)$

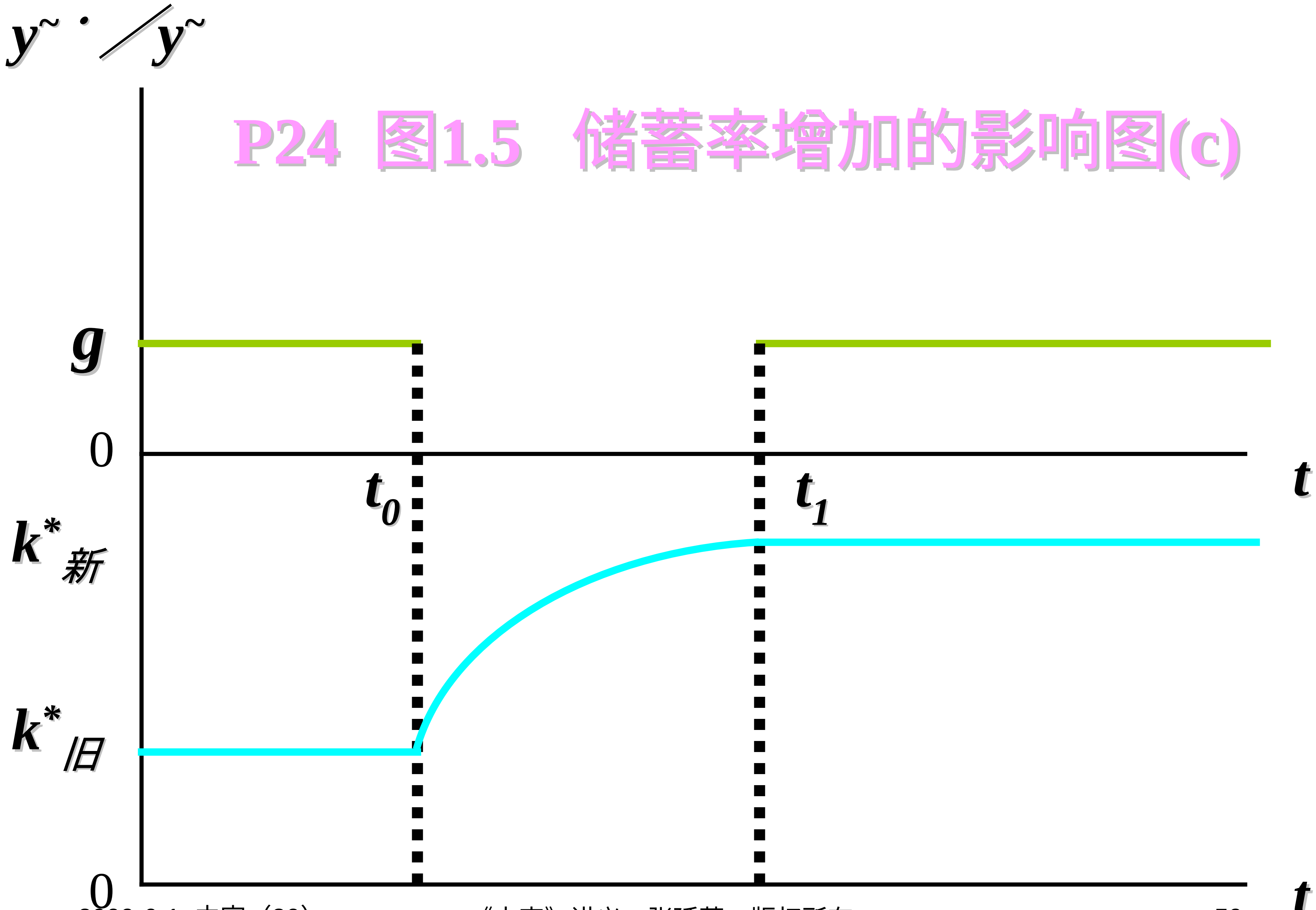


- s 变化的间接影响

- **(1) 在t_0 之前的$k^*_{旧}$上存在：**
- $k^{\cdot} = dk / dt = 0$
- $\longrightarrow \tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y} = A^{\cdot} / A = g$
- $\longrightarrow \tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}$ 为一条固定水平g 的、不随 t 变动的平行于横轴的直线。

- (2) 在t_1之后的$k^*_{新}$上存在：
- $k^{\cdot} = dk / dt = 0$
- ——→ $\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y} = A^{\cdot} / A = g$
- ——→ $\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}$ 为一条固定水平g 的、不随t变动的平行于横轴的直线。
- 经济含义：
- 如果k达到均衡的k 值，就只有A 的增长对Y / L的增长有贡献，则Y / L的增长率就是A 的增长率g 。

P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(c)

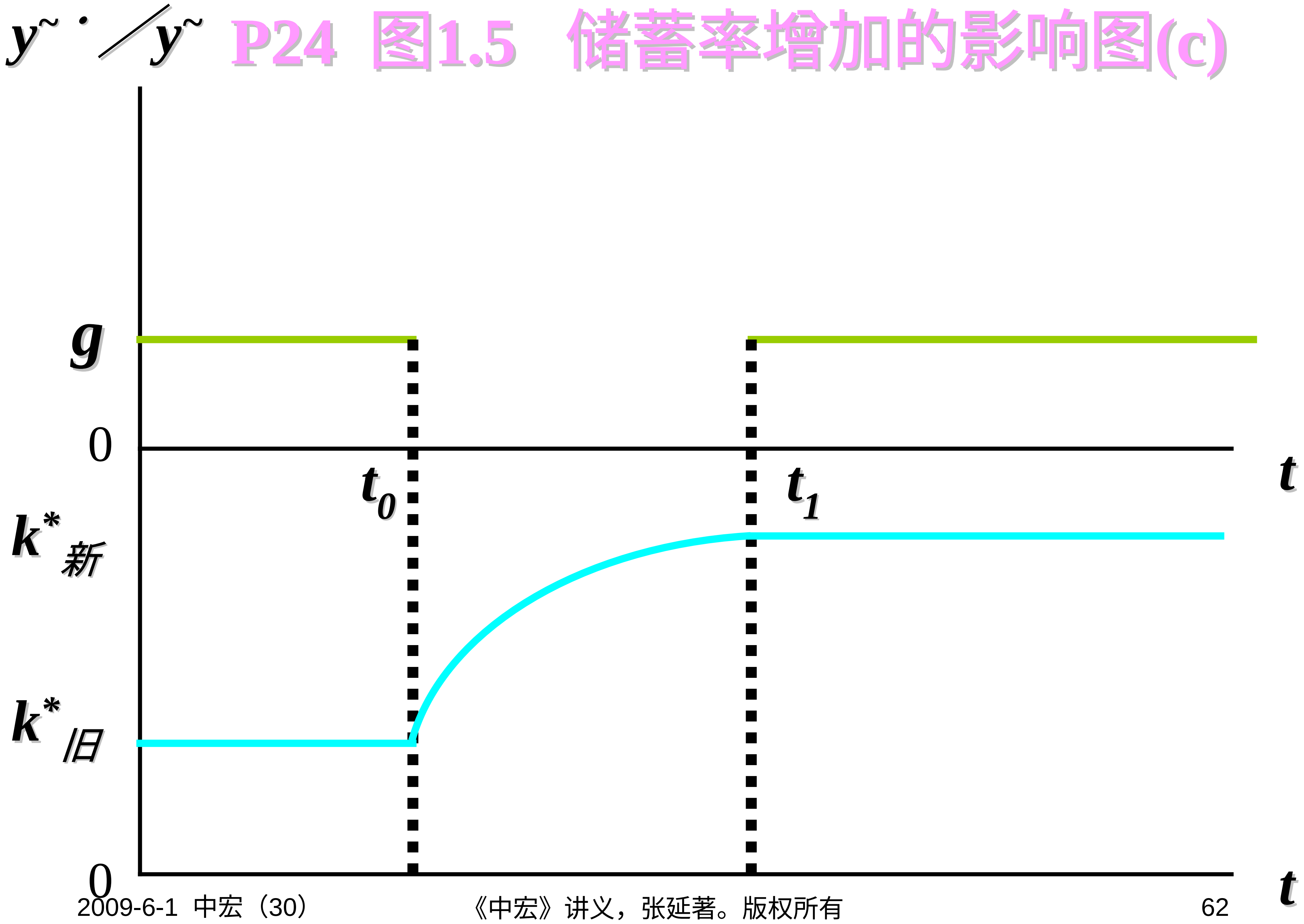


- (3)在 t_0 和 t_1 之间，由于 $\dot{k}>0$，所以 $\dot{\tilde{y}}/\tilde{y}>g$，若 k 递增，则 Y/L 同时由于 A 和 k 的增长而增长。这时其增长率超过 g 。这些结果总结于p24图1.5图(c)。t_0表示储蓄率增加的时间。

- 按假定，s在t_0时跳升并从此保持不变。每工人平均产量的增长率开始时为g，在t_0 时向上跳升，有一个快速上升的突变。随后逐渐回到其初始水平。

- ∵ $\dot{\tilde{y}} / \tilde{y} = g + f'(k)\dot{k} / f(k)$
- 在t_0和t_1之间，由于 $\dot{k} > 0$
- ∴ $\dot{\tilde{y}} / \tilde{y} > g$
- 所以 按假定，s 在 t_0 时跳升并从此保持不变。每工人平均产量的增长率开始时为g，在 t_0时向上跳升，有一个快速上升的突变。

P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(c)



(4) $\dot{\tilde{y}} / \tilde{y}$ 对时间 t 的一阶导。

- $d(\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}) / dt$

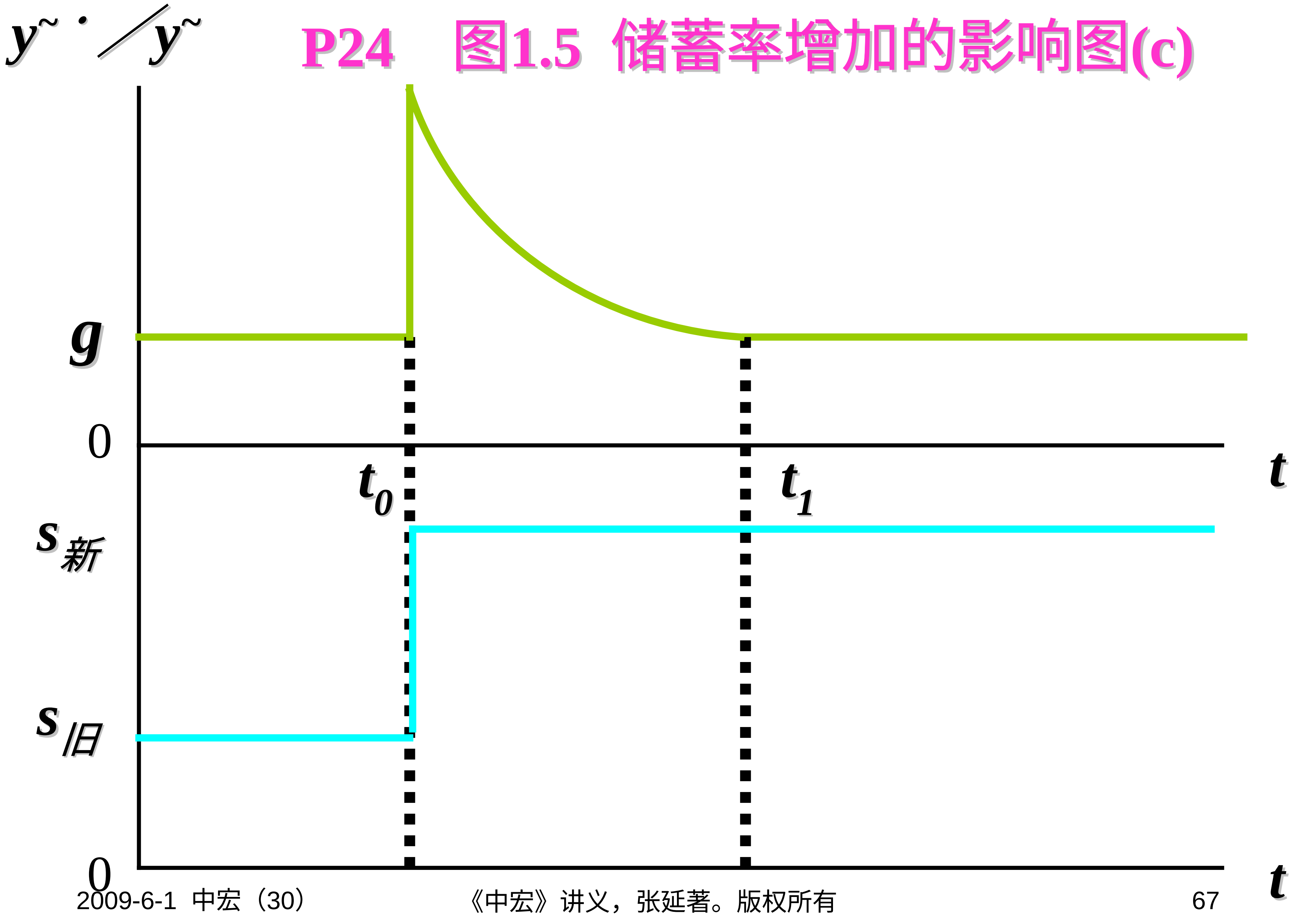
- $f(k)d[f'(k)k^{\cdot}]/dt - f'(k)k^{\cdot}df(k)/dt$
- $= \dfrac{f(k)d[f'(k)k^{\cdot}]/dt - f'(k)k^{\cdot}df(k)/dt}{f(k)^2}$

- $f(k)[f''(k)k^{\cdot}k^{\cdot} + f'(k)dk^{\cdot}/dt] - f'(k)k^{\cdot}f'(k)k^{\cdot}$
- $= \dfrac{f(k)[f''(k)k^{\cdot}k^{\cdot} + f'(k)dk^{\cdot}/dt] - f'(k)k^{\cdot}f'(k)k^{\cdot}}{f(k)^2}$
- $f(k)^2$
-
- $f(k)[f''(k)(k^{\cdot})^2 + f'(k)dk^{\cdot}/dt] - [f'(k)k^{\cdot}]^2$
- $= \dfrac{f(k)[f''(k)(k^{\cdot})^2 + f'(k)dk^{\cdot}/dt] - [f'(k)k^{\cdot}]^2}{f(k)^2}$

- ∵ 在 t_0 至 t_1 之间，$dk^{\cdot} / dt < 0$，
- 并且 $f''(k) < 0$
- ∴ $d(\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}) / dt < 0$
- ——→随着 t↑，$\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}$ 单调↓，
- $\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}$ 为一条单调下降的直线。

- 这些结果总结于p24图1.5 图(c)。t_0表示储蓄率增加的时间。按假定，s在t_0时跳升并从此保持不变。k从k^*的原值逐渐上升至新值。每工人平均产量的增长率开始时为g，在t_0时向上跳升，随后逐渐回到其初始水平。

P24　图1.5 储蓄率增加的影响图(c)



• 结　　论：

- 储蓄率的一个永久性增加产生了每工人平均产量增长率的暂时性增加。因为k在一定时期内上升，但最终将增加到一定水平，在这一水平上增加的储蓄被全部用于维持k的较高水平。

- 4、*ln Y／L* 的变化
- (人均产量的对数具有统计学上的意义)
- P24图1．5图(d)之所以给出了每工人平均产量的对数值而非每工人平均产量水平，是因为当一个变量以一不变速率增长时，该变量的对数作为时间的函数在图形上反映为一条直线。

- 定式：一变量的增长率 ＝该变量的对数，对时间 t 的一阶导数
- $d \ln(X) ⁄ dt$
- $= (1 ⁄ X)(d X ⁄ dt) = \dot{X} ⁄ X$ ，即：
- $d \ln \tilde{y} ⁄ dt$
- $= d \ln(Y ⁄ L) ⁄ dt = \dot{\tilde{y}} ⁄ \tilde{y}$
- $d \ln^2 \tilde{y} ⁄ dt^2$
- $= d \ln^2(Y ⁄ L) ⁄ dt^2 = d(\dot{\tilde{y}} ⁄ \tilde{y}) ⁄ dt$

- $\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}$
- $= g + f'(k)\dot{k} / f(k)$
- $\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}$ 是 $\ln \tilde{y}$ 对t 的一阶导数。
- ∵ 一阶导数 $\tilde{y}^{\cdot} / \tilde{y}$ 始终 ＞ 0
- ∴ $\ln(Y/L)$始终随t 的上升而单调上升，

只不过上升速率的变化分成三个阶段：

- (1) 在 t_0 之前，$\dot{\tilde{y}} / \tilde{y} = g$

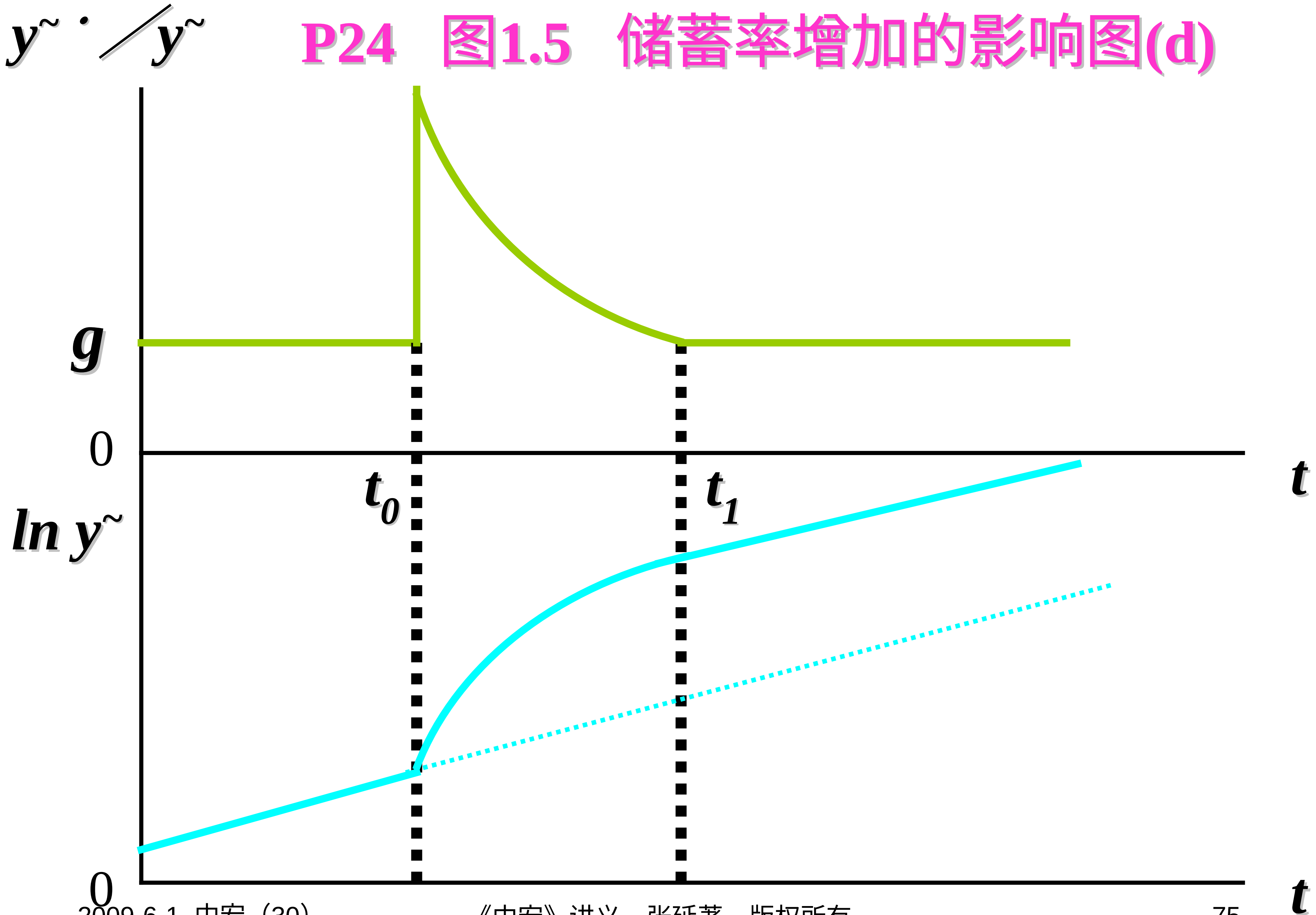
- ——→ $\ln(Y/L)$是一条斜率为固定水平 g 的单调上升的直线。

- (2) 在 t_1 之后，$\dot{\tilde{y}} / \tilde{y} = g$
- ⟶ $\ln(Y/L)$ 是一条斜率为固定水平 g 的单调上升的直线。
- t_1 之后的 $\ln(Y/L)$与t_0 之前的 $\ln(Y/L)$是否是同一条直线，取决于t_o和t_1之间 $\ln(Y/L)$上升的形式：线性、递增的速率还是递减的速率。

- (3) 在t_0至t_1之间，$\tilde{y}^{\cdot}/\tilde{y}$ 单调下降
- ——→ $d(\tilde{y}^{\cdot}/\tilde{y})/dt < 0$
- ——→ $d\ln^2(Y/L)/dt^2 < 0$
- ——→ $\ln(Y/L)$是一条以递减的斜率上升

  的曲线($\ln(Y/L)$ 凹向原点)。

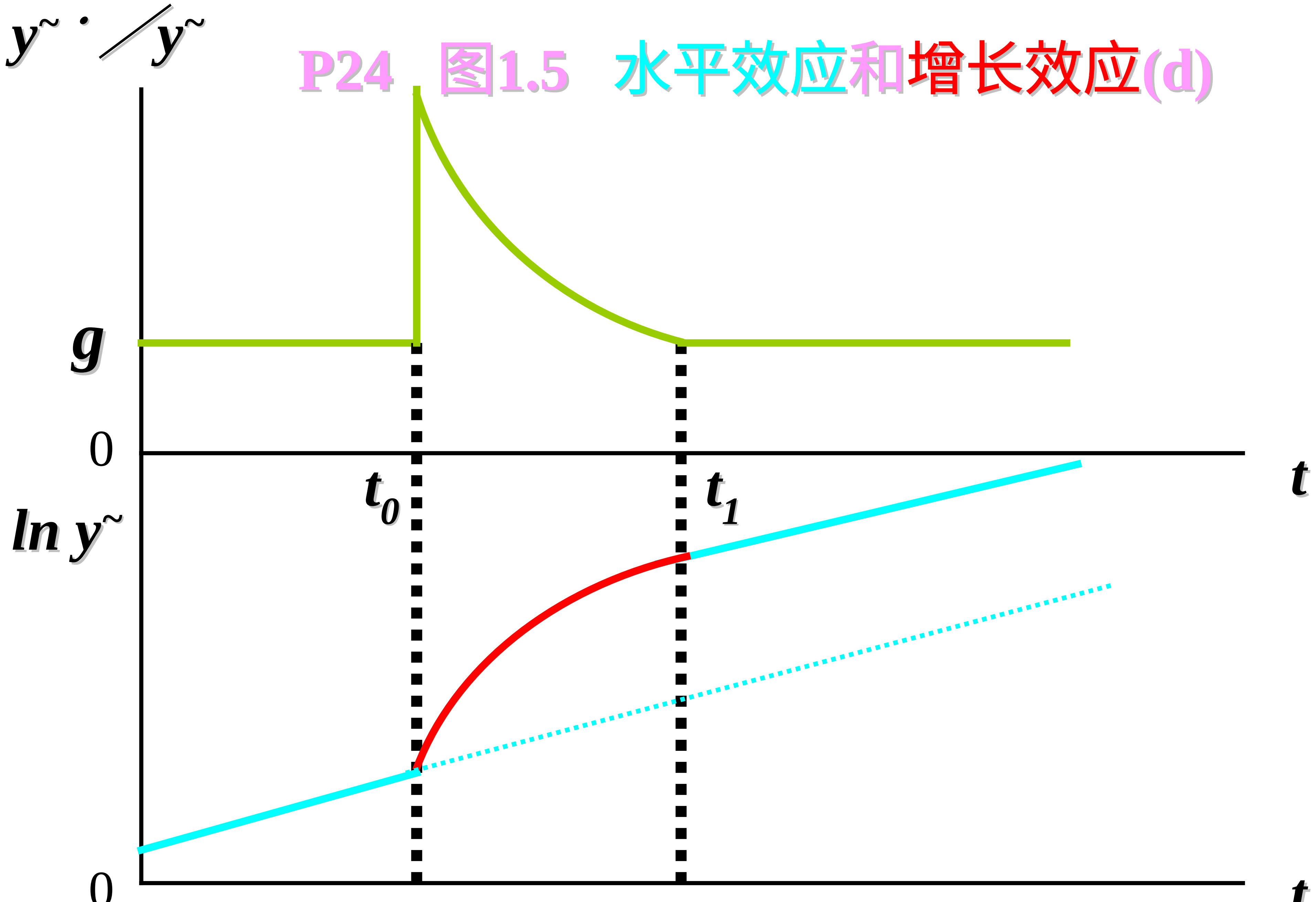
P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(d)



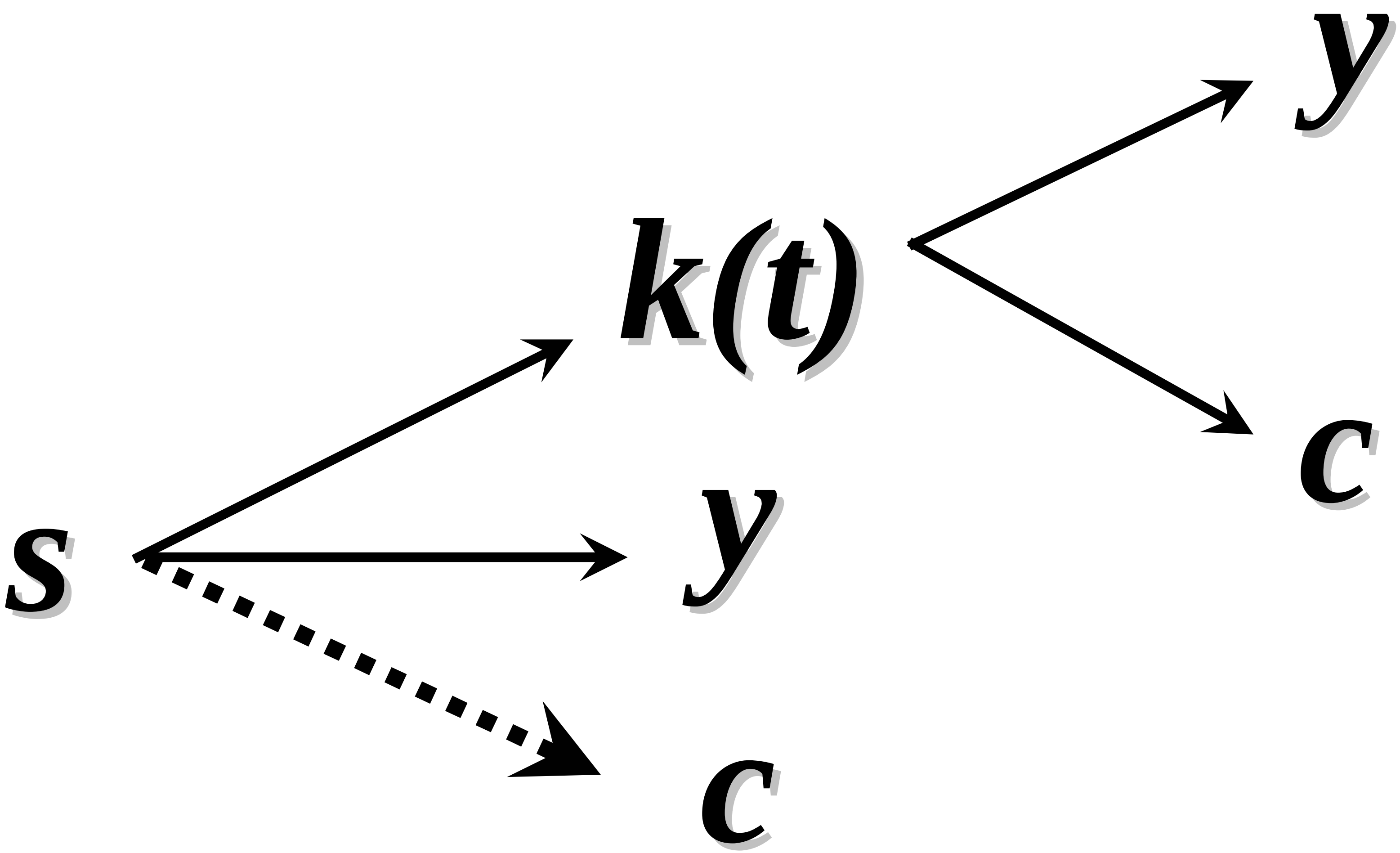
• 结　　论：

- 储蓄率的变化有水平效应，但没有增长效应：它改变经济的平衡增长路径，因而改变任一时点上每工人的平均产量水平，但并不影响处于平衡增长路径时每工人平均产量的增长率。的确，在索洛模型中只有技术进步率的变化有增长效应；所有其他变化都只有水平效应。

P24 图1.5 水平效应和增长效应(d)



- 三、对c 的影响
- 1、c 函数
- 若将家庭引入模型，其福利将取决于消费，而非产量：投资只是未来生产中的一种投入品。因此，在许多情况下，我们很可能更关心消费的变动而非产量的变动

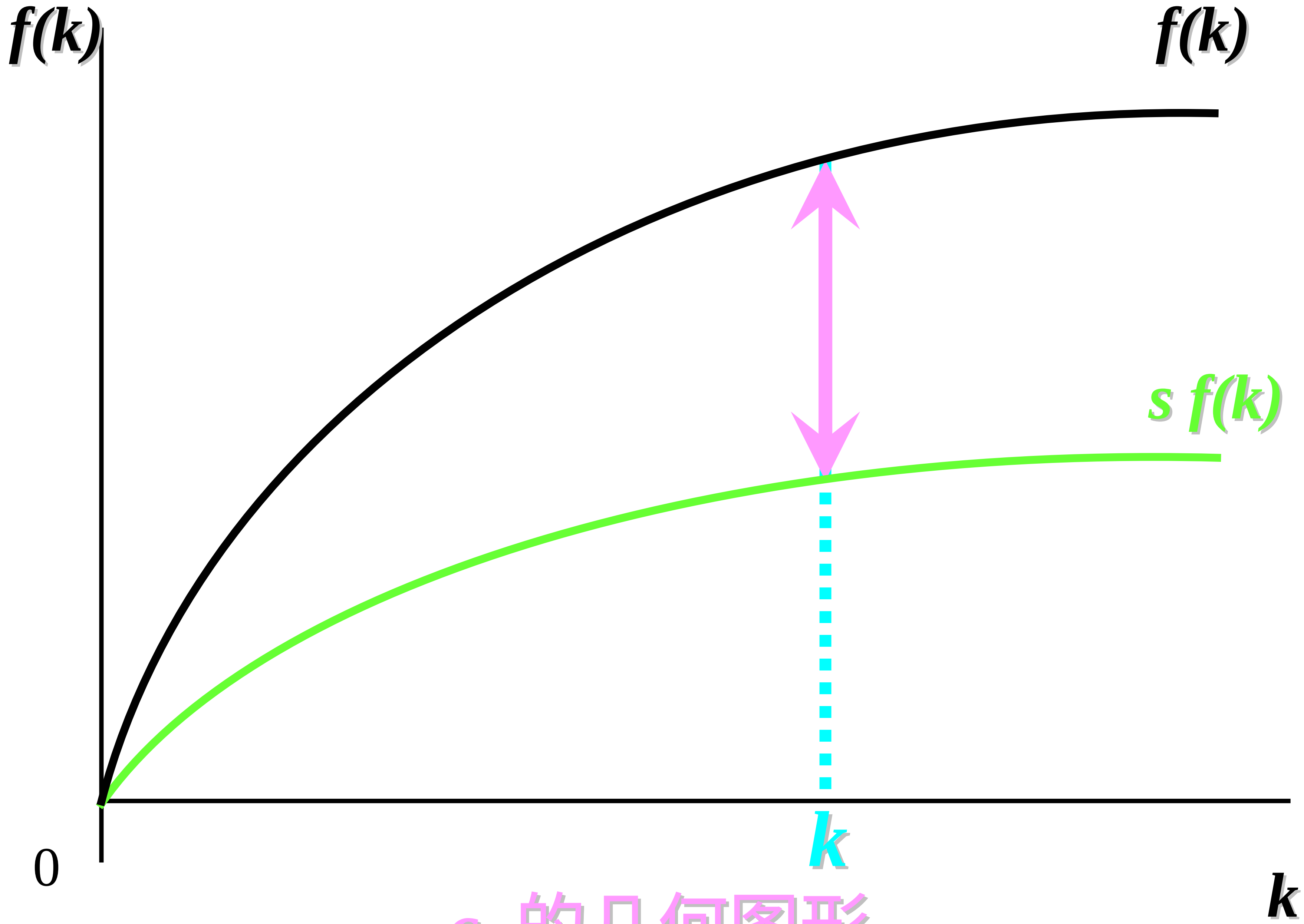


- s 变化的直接影响

- 当 $Y = Yd$ 的条件下，
- $Y = C + S$
- $Y / AL = C / AL + S / AL$
- $y = c + (s\ Y) / AL$
- $y = c + s\ y$

- $c = (1 - s)\, y = (1 - s)\, f(k)$
- $= f(k) - s\, f(k)$
- 几何意义：对于任何一个*k*，*f(k)*

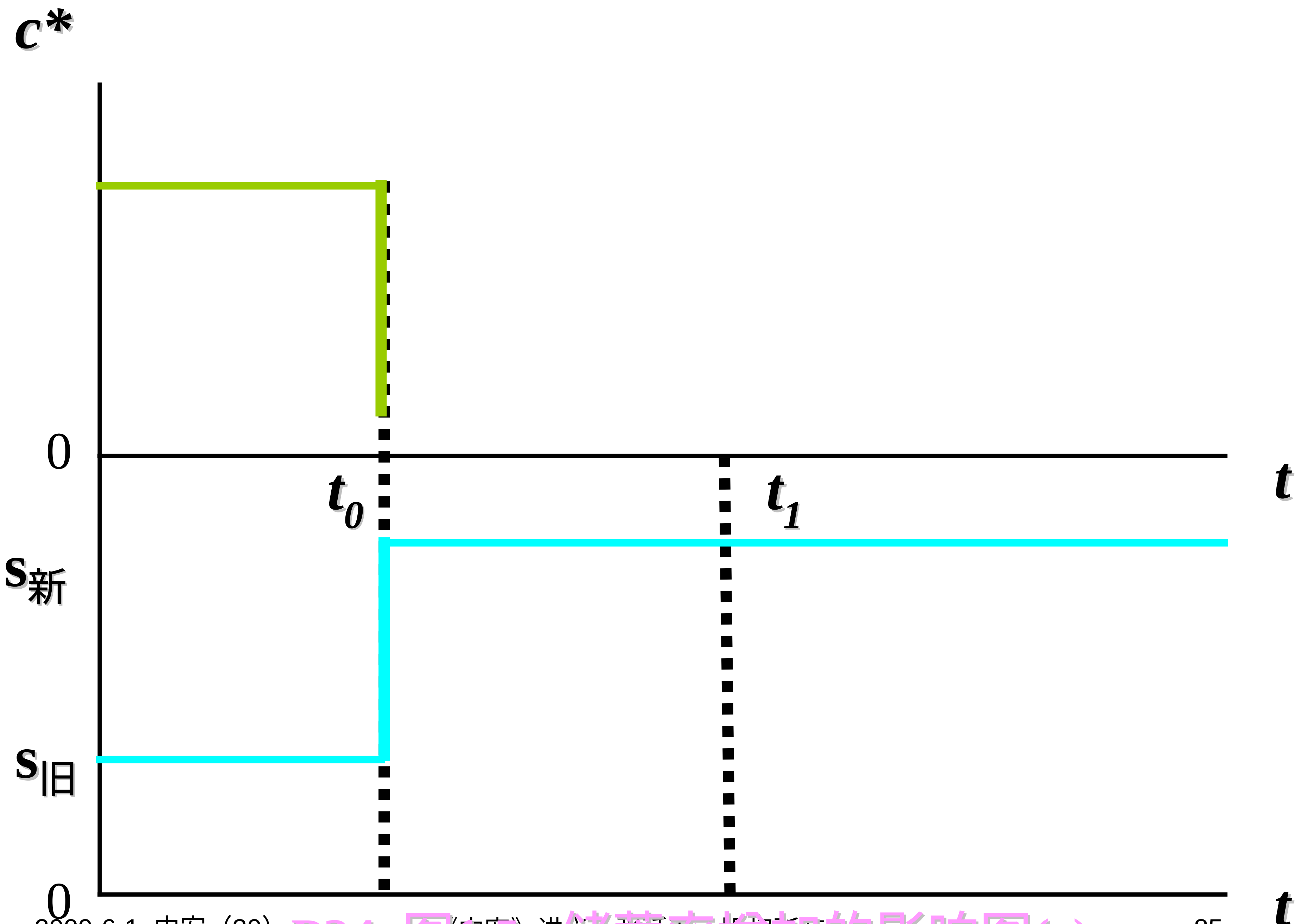
与 *s f(k)* 之间的垂直距离即为*c* 。



c 的几何图形

- $s_{旧} \uparrow s_{新} \longrightarrow 1-s_{旧} > 1-s_{新}$
- $\longrightarrow c_{新} < c_{旧}$
- 在t_0之前，c为一条较高水平的直线。在t_0之后，c为一条陡降（突变）的曲线。
- $c = f(k_{旧}^*) - s_{新} f(k_{旧}^*)$
- 然后，随着k 的上升，在s 的更高值不变的情况下，消费将逐渐上升。如P24图1.5中最后一图(e)所示。

- 每单位有效劳动的平均消费等于每单位有效劳动的平均产量乘以该产量中用于消费的比例*(1-s)*。因此，由于*s* 在t_0时发生非连续性变化，而*k* 却不是这样，所以每单位有效劳动的平均消费开始时猛烈下降



P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(e)

- 2、可以使c 达到最大化的黄金律的资本存量水平k^*。
- ∵ 当 $\dot{k} = dk／dt = 0$ 时，
- 存在一个k^*，满足：
- $s f(k^*) = (n+g+\delta)k^*$

- ∴　令c^* 表示处于平衡增长路径上的每单位有效劳动的平均消费。c^* 等于每单位有效劳动的平均产量$f(k^*)$减去每单位有效劳动的平均投资$s\,f(k^*)$。在平衡增长路径上，实际投资等于持平投资$(n+g+\delta)k^*$

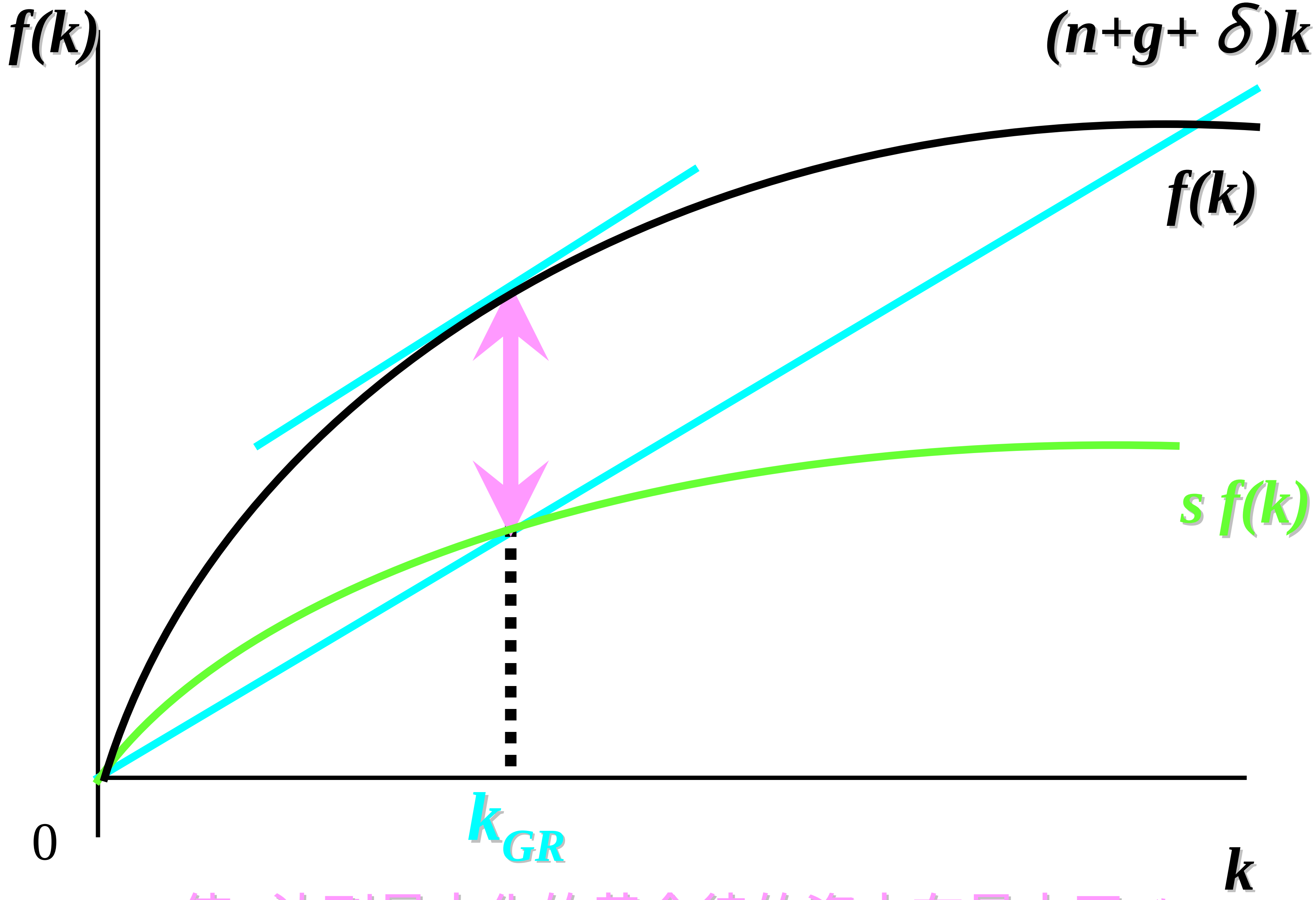
- 这样，$c^* = f(k^*) - s\,f(k^*)$
- $= f(k^*) - (n+g+\delta)k^*$
- 实现 c^* 最大化的一阶条件是：
- $dc^* / dk^* = f'(k^*) - (n+g+\delta) = 0$

- 即：$f'(k^*) = (n+g+\delta)$
- $f'(k^*)$ —— 资本的边际产量，$f(k^*)$在 k^* 点切线的斜率 。
- $(n+g+\delta)$ —— 直线$(n+g+\delta)k^*$的斜率。

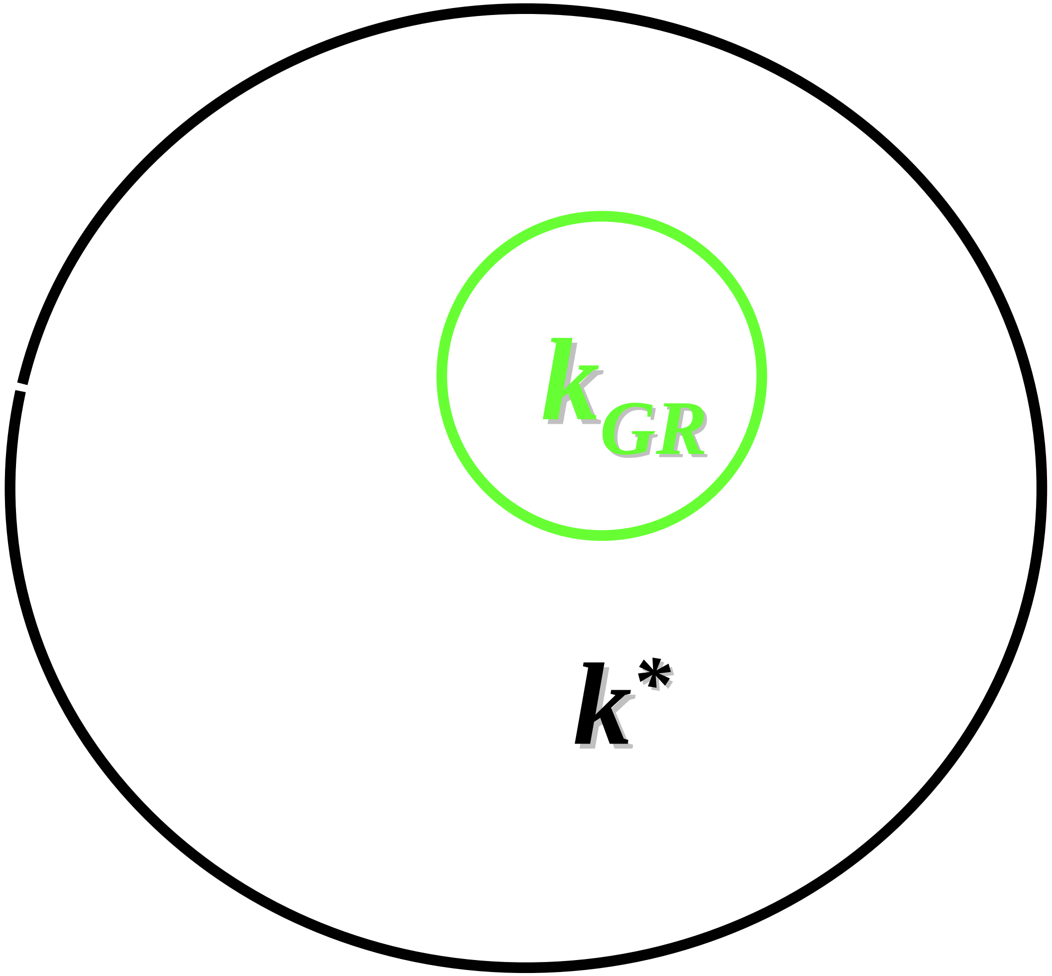
- 在 $k = k^*$ 上，如果满足：
- $f'(k^*) = (n + g + \delta)$
- 则这个使 c^* 达到最大化的 k^* 水平，称为黄金律 (*golden – rule*) 的资本存量水平 k_{GR}。

- 在 $k = k^*$ 时，

- $c^* = f(k^*) - s f(k^*)$ 达到最大化。



- 使c 达到最大化的黄金律的资本存量水平k^*



- $dc^* / dk^* = f'(k^*) - (n+g+\delta) = 0$

- 3、s 变动对c^*的影响（定性分析）
- 消费最终是否会超过s上升前的原来水平并非一目了然的。
- 在平衡增长路径上，c^* 是k^* 的函数 。
- $c^* = f(k^*) - (n + g + \delta)k^* \qquad (1.14)$
- 而k^* 是s 的函数，k^*的位置取决于s 和该模型中的其他参数n、g 和 δ。
- $k^* = k^*(s、n、g、\delta)$

- 因此c^*是s 的隐函数。我们运用隐函数求导法，可写出：

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \frac{df(k^*)}{dk^*} \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} - (n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

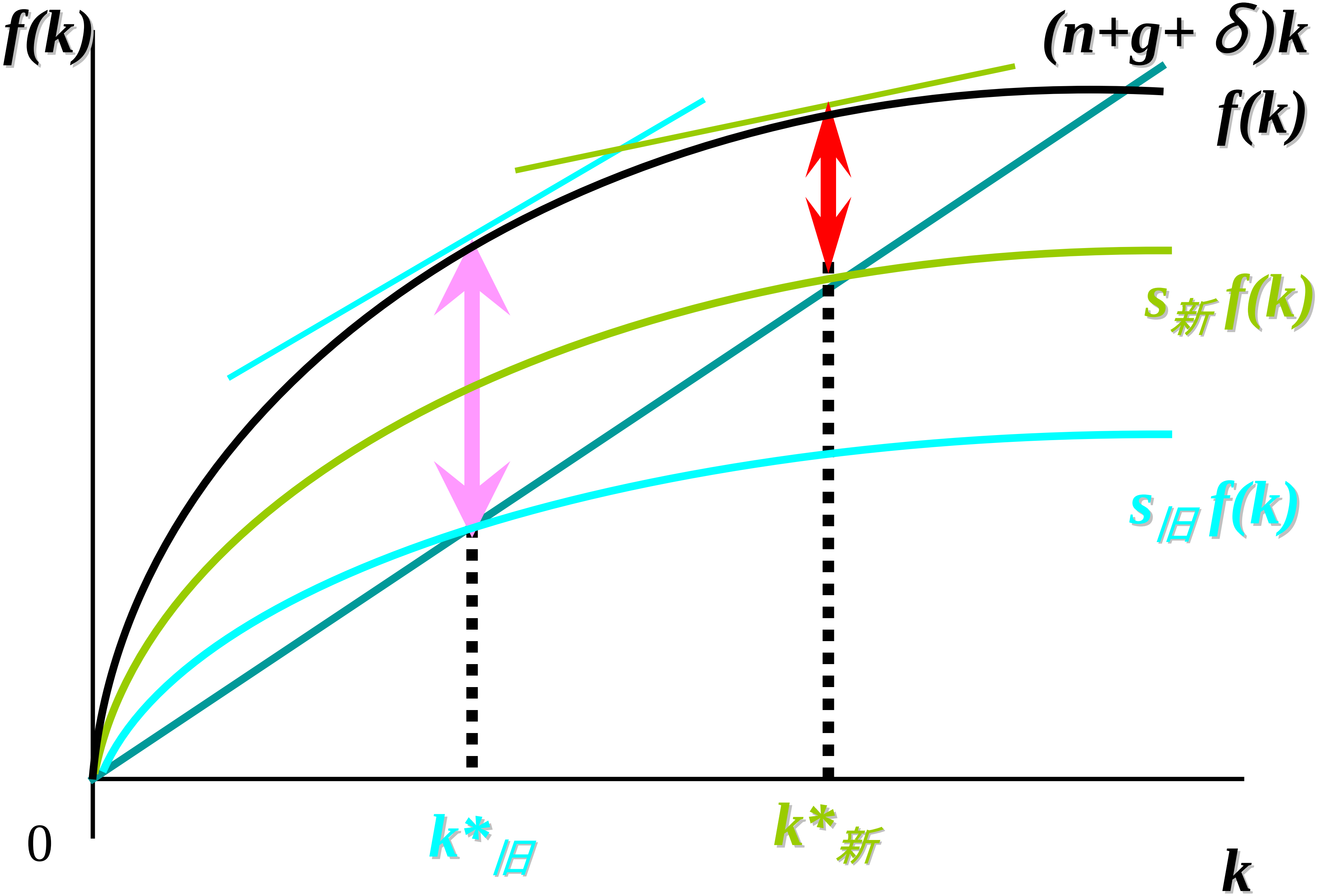
- $= \{f'[k^*(s、n、g、\delta)] - (n+g+\delta)\}$
- $\times [\partial k^*(s、n、g、\delta)/\partial s]$

- $\partial c^* / \partial s$
- $= [f'(k^*) - (n+g+\delta)](\partial k^* / \partial s)$ (1.15)
- 我们知道s 的增加提高 k^*，
- 即：$\partial k^* / \partial s > 0$ 对这一结论的证明

见前面。

- 因此，s 的增加是否在长期提高消费，取决于资本的边际产品 $f'(k^*)$ 是大于还是小于$n+g+\delta$。
- ∴ $\partial c^* / \partial s$ 和 $\partial c^* / \partial k^*$ 的符号取决于
- $[f'(k^*) - (n+g+\delta)]$ 的符号

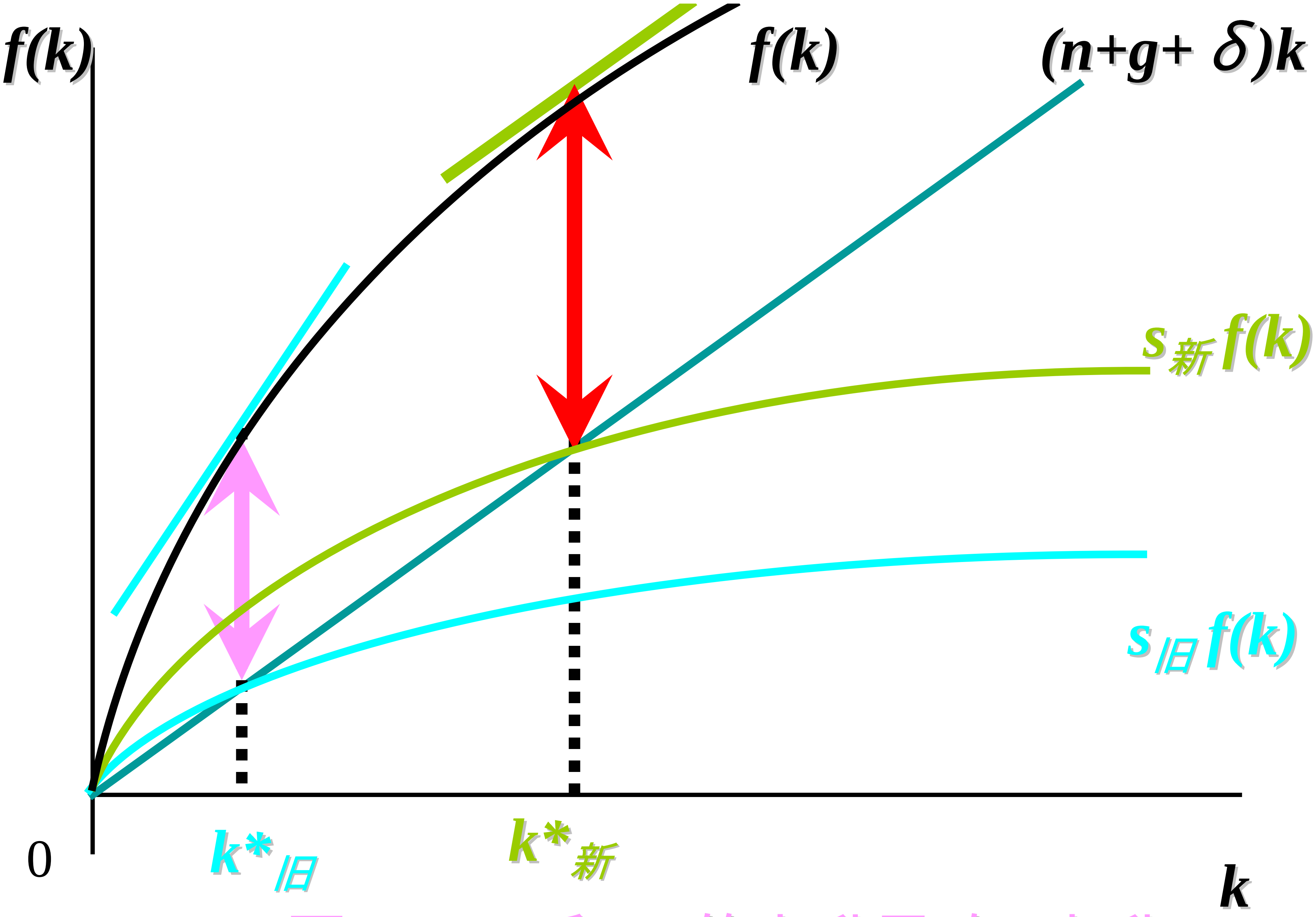
- (1)当 $f'(k^*) - (n + g + \delta) < 0$ 时，
- $\partial c^* / \partial s < 0$，$s$ 的上升导致 c^* 下降。
- P27 图1.6(a) 所示 。
- $\partial c^* / \partial k^* < 0$，$k^*$ 的上升导致 c^* 下降



- P27 图1.6(a) s和k^*的上升导致c^*下降

- 经济含义：
- 直观地看，如果k上升，要使k的这种上升得以维持，(每单位有效劳动的平均)投资必须上升$n+g+\delta$乘以k的变化量。如果$f'(k^*)$小于$n+g+\delta$，那么从增加的资本上获得的增加的产量不足以将资本存量维持在其较高水平上。此时，消费必须下降以维持较高的资本存量。

- (2) 当 $f'(k^*)-(n+g+\delta)>0$ 时，
- $\partial c^* / \partial s > 0$，$s$ 的上升导致c^*上升。
- $\partial c^* / \partial k^* > 0$，$k^*$的上升导致$c^*$上升。



• P27 图1.6(b) s 和k* 的上升导致c* 上升

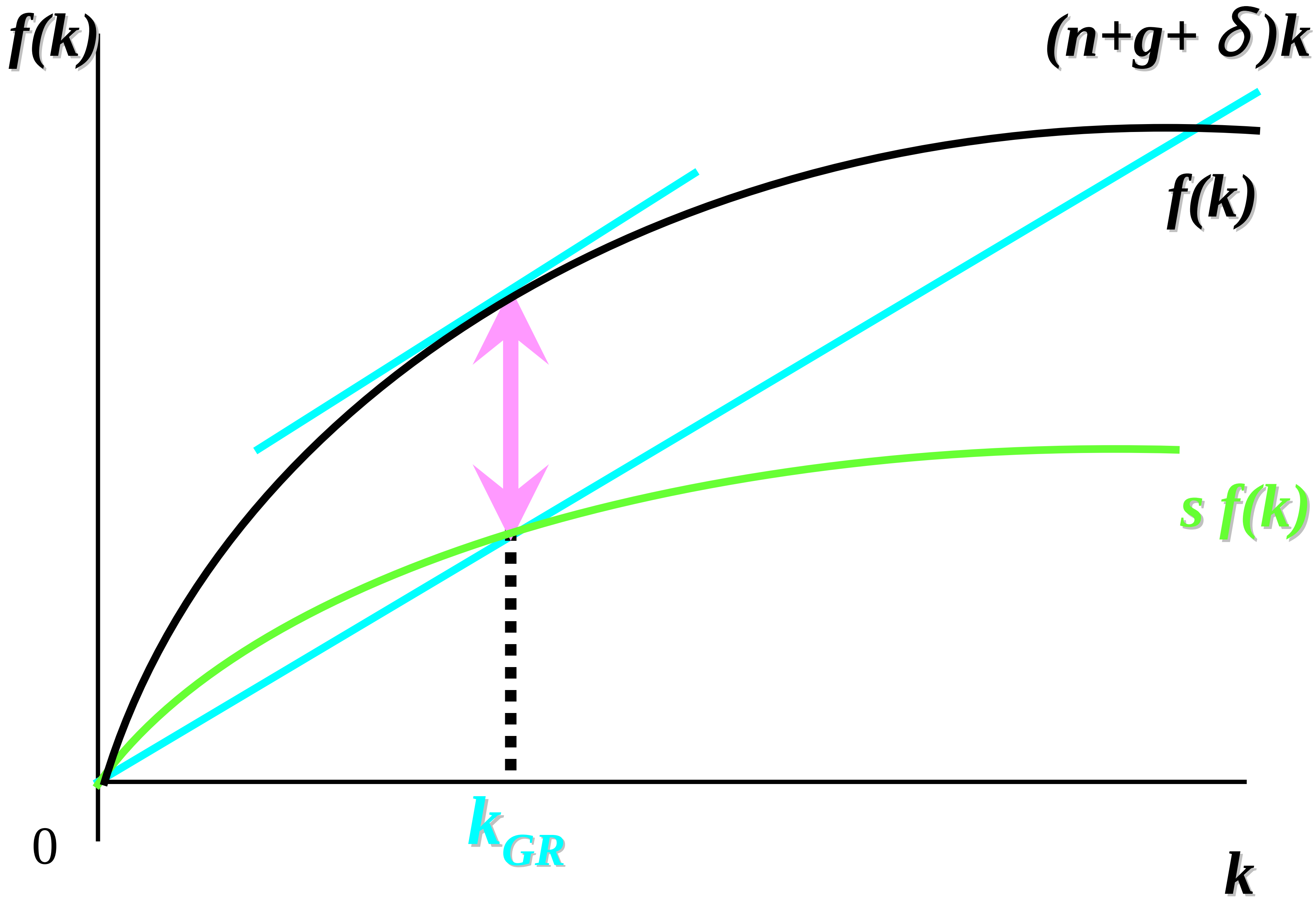
- 另一方面，如果$f'(k^*)$大于$n+g+\delta$，增加的产量大于将k维持在较高水平上所需的产量增加，因而消费上升。如P27图1.6(b)所示。该图不仅给出了$(n+g+\delta)k$和$sf(k)$，还给出了$f(k)$。在平衡增长路径上、c为$f(k)$和$(n+g+\delta)k$之间的距离。在上图中，$f'(k^*)$小于$n+g+\delta$，因此，即使当经济已达到新的平衡增长路径时，储蓄率的增加也降低消费。在中图中，相反的情况出现，储蓄率的增加在长期内提高消费。

- (3)当 $f'(k^*) - (n + g + \delta) = 0$ 时，

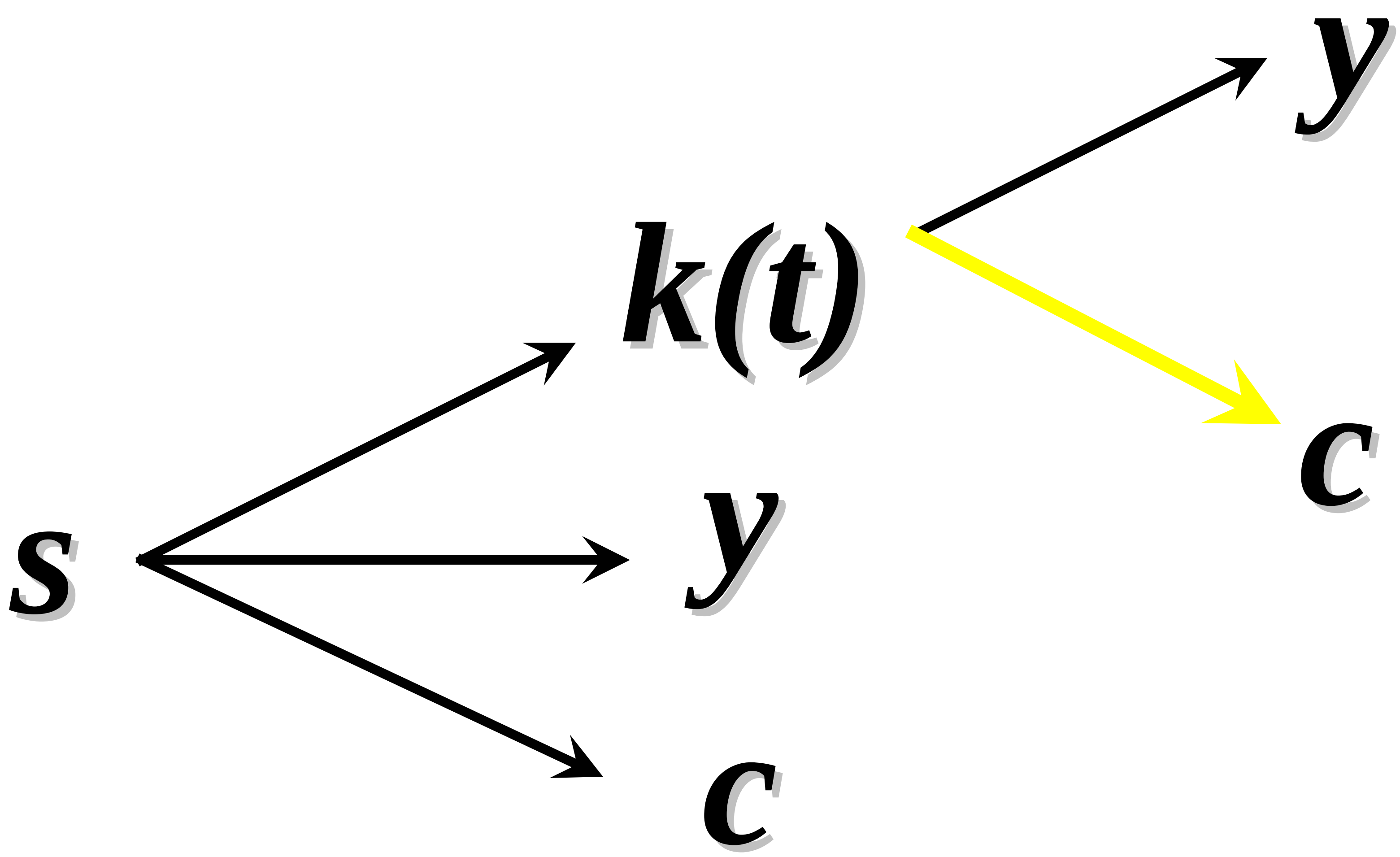
- $\partial c^* / \partial s = 0$，$s$ 的上升导致 c^* 达到最大值。

- $\partial c^* / \partial k^* = 0$，$k^*$ 的上升导致 c^* 达到最大值。

- 最后，在P27图1.6(c)中，$f'(k^*)$恰好等于 $n+g+\delta$，也就是说，在$k = k^*$ 处，$f(k)$的切线和$(n+g+\delta)k$平行。此时，s 的一个边际变化在长期内对消费没有影响，且消费在所有可能的平衡增长路径中达到其可能取的最大水平。这一k^*值就是所谓的黄金律资本存量水平 k_{GR}。



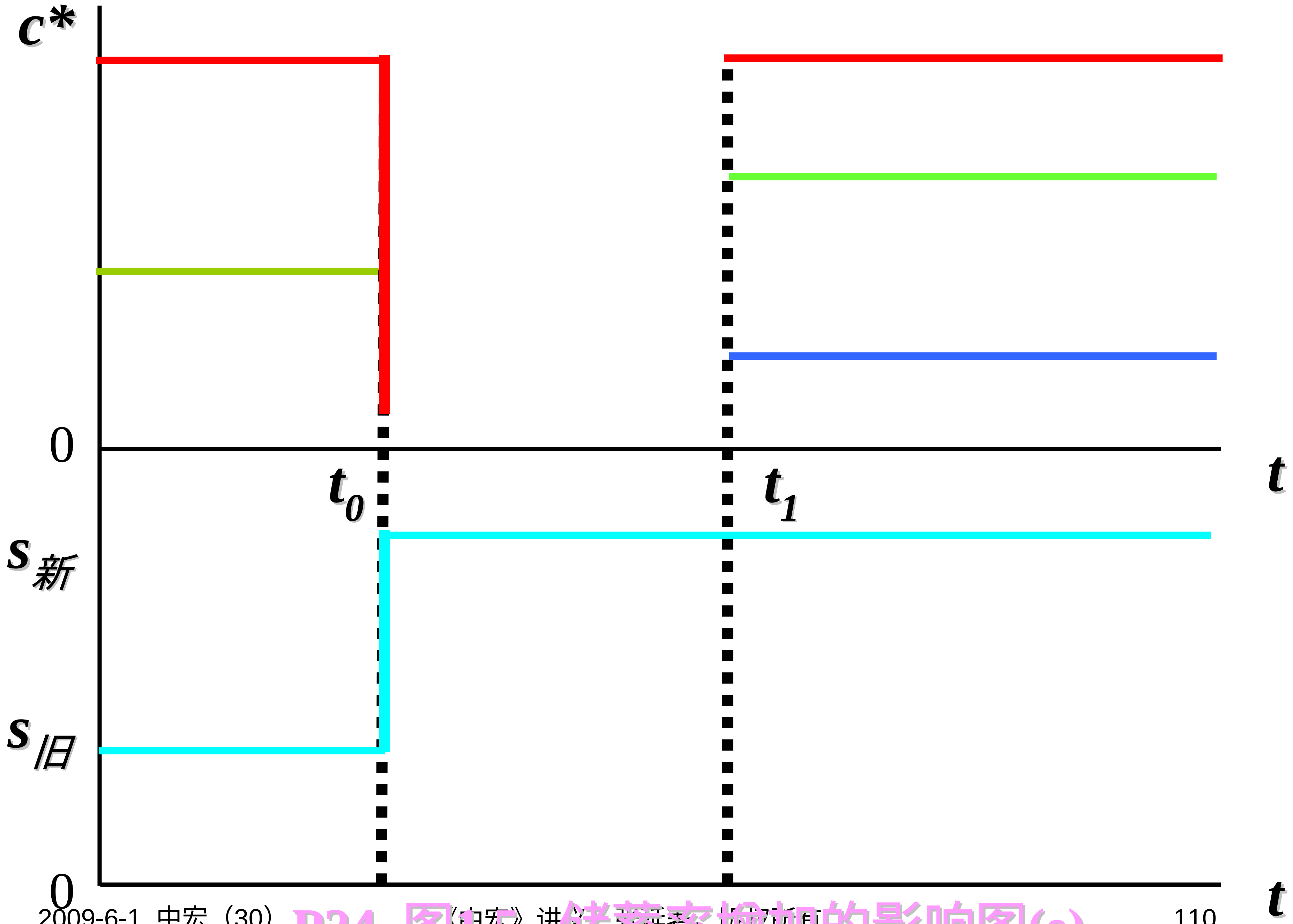
- P27图1.6(c)使c 达到最大化的黄金律的资本存量水平k^*



- s 变化的间接影响

- 4、c^* 随t 的变化
- $c^* = (1-s)\, y^* = (1-s)\, f(k^*)$
- $dc^* / dt = (1\text{-}s)\, f'(k)\dot{k}$
- (1) 在 t_0 之前的$k^*_{旧}$ 上存在：
- $\dot{k} = dk / dt = 0$
- $dc^* / dt = (1\text{-}s)\, f'(k)\dot{k} = 0$
- ——→ c^* 为一条固定水平的、不随t 变动的直线。

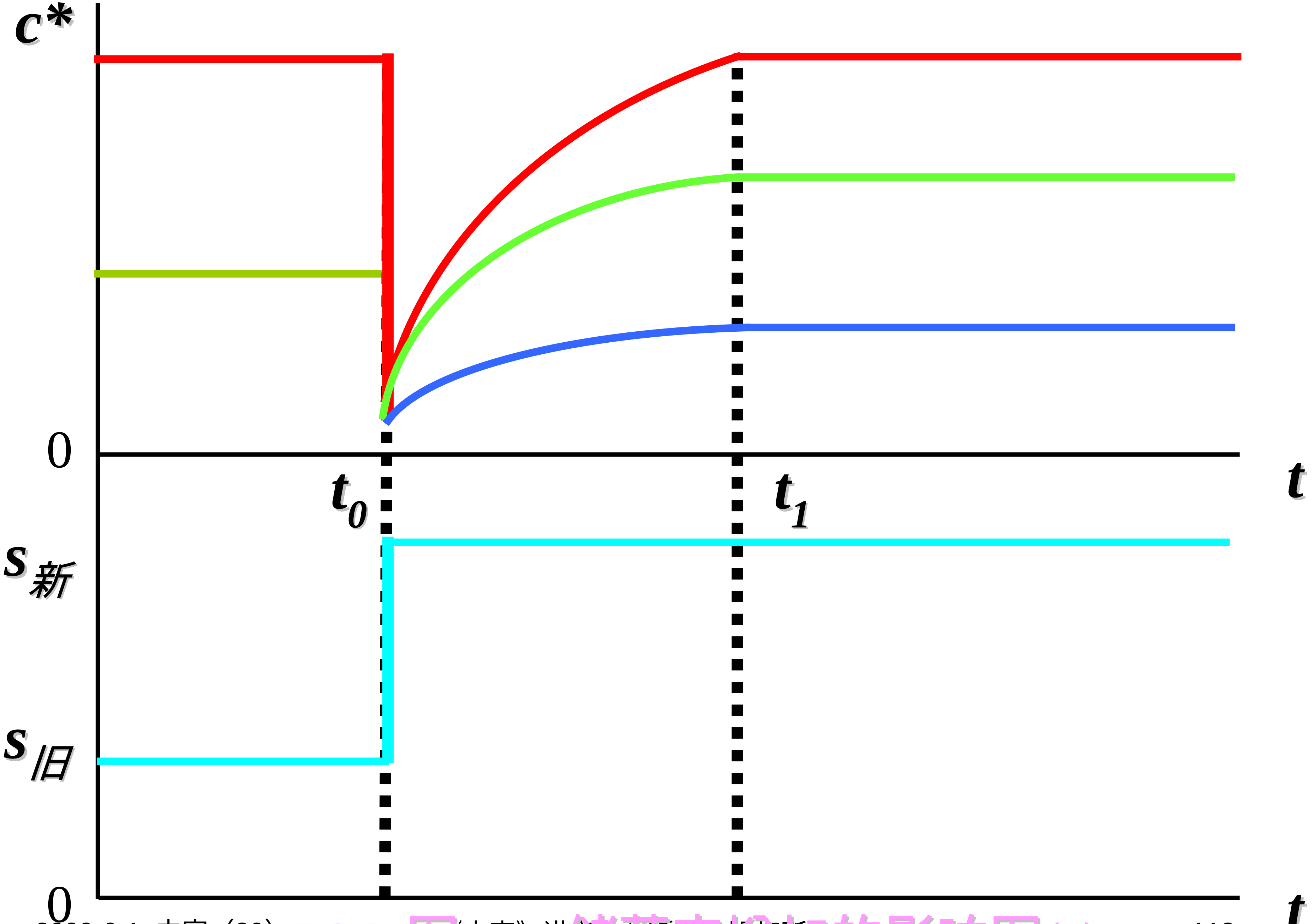
- (2)、在 t_1 之后的$k^*_{新}$ 上存在：
- $\dot{k} = dk/dt = 0$
- $dc^*/dt = (1-s)f'(k)\dot{k} = 0$
- ——→ c^*为一条固定水平的、不随 t 变动的直线。



P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(e)

- (3) 在 t_0 和 t_1 之间，由于 $\dot{k} > 0$
- 所以 $dc^* / dt = (1-s) f'(k)\dot{k} > 0$
- —→ 随着 t ↑，c^* 单调 ↑
- —→ c^* 与 t 同方向变动。

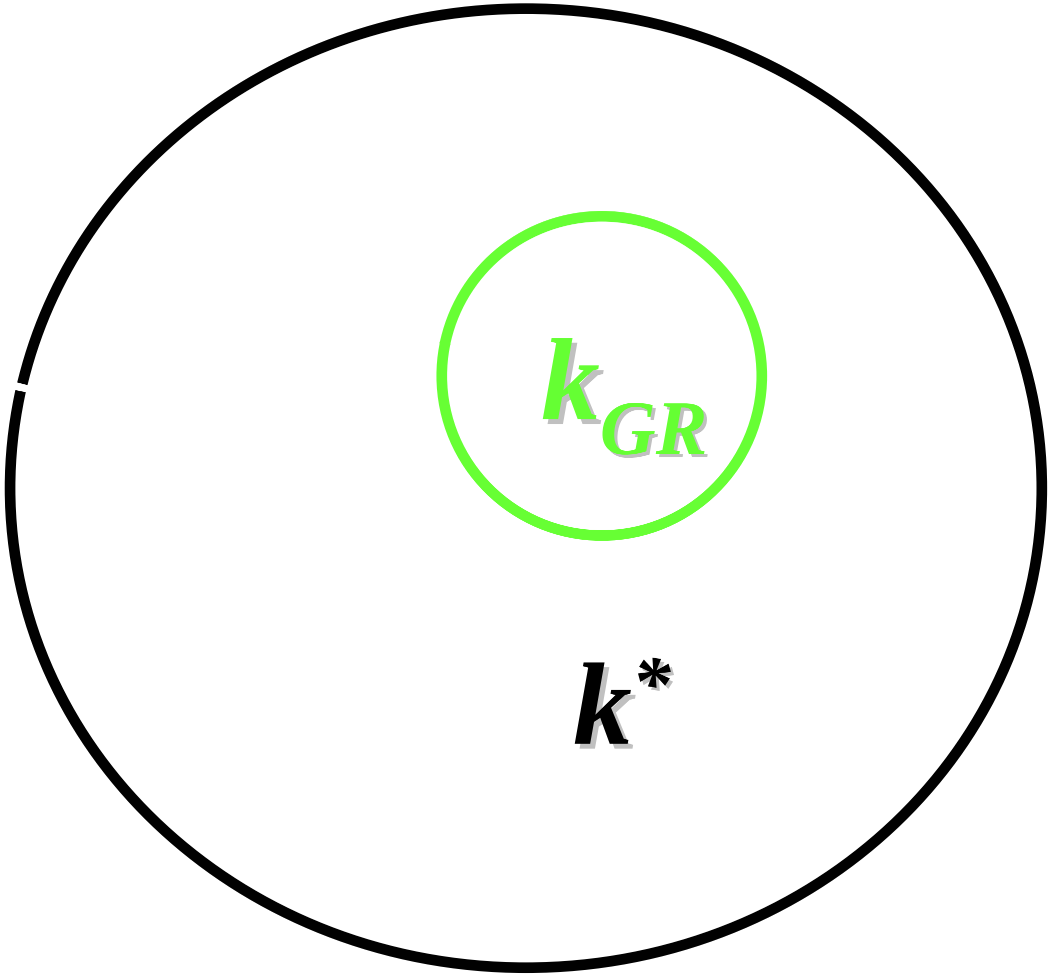
- d^2c^* / dt^2
- $= (1-s)\, \dot{k} f''(k)\dot{k} + (1-s) f'(k) d\dot{k} / dt$
- $= (1-s)(\dot{k})^2 f''(k) + (1-s) f'(k) d\dot{k} / dt$
- ∵ $f''(k) < 0$，且 $d\dot{k} / dt < 0$
- ∴ $d^2c^* / dt^2 < 0$
- ——→随着t↑，c^*以递减的速率单调↑
- ——→ c^* 凹向原点。



P24 图1.5 储蓄率增加的影响图(e)

- 消费最终是否会超过s上升前的原来水平并非一目了然的。取决于 $[f'(k^*)-(n+g+\delta)]$ 的符号，存在三种可能性。

- 在索洛模型中，储蓄是外生的，平衡增长路径中的资本存量等于黄金律水平的理由，并不多于平衡增长路径中的资本存量等于任意其他可能值的理由。



-
- $dc^* / dk^* = f'(k^*) - (n+g+\delta) = 0$

- $c = (1 - s)\, y = (1 - s)\, f(k)$
- $= f(k) - s\, f(k)$
- 由于消费*c*是每单位有效劳动的平均资本量*k*的函数，而k^*并不必然等于k_{GR}

- 在索洛模型中，储蓄率的上升对消费的影响，进而对消费者福利的影响是不确定的，可能存在三种情况。
- 经济增长并不必然导致消费者福利状况的改进。