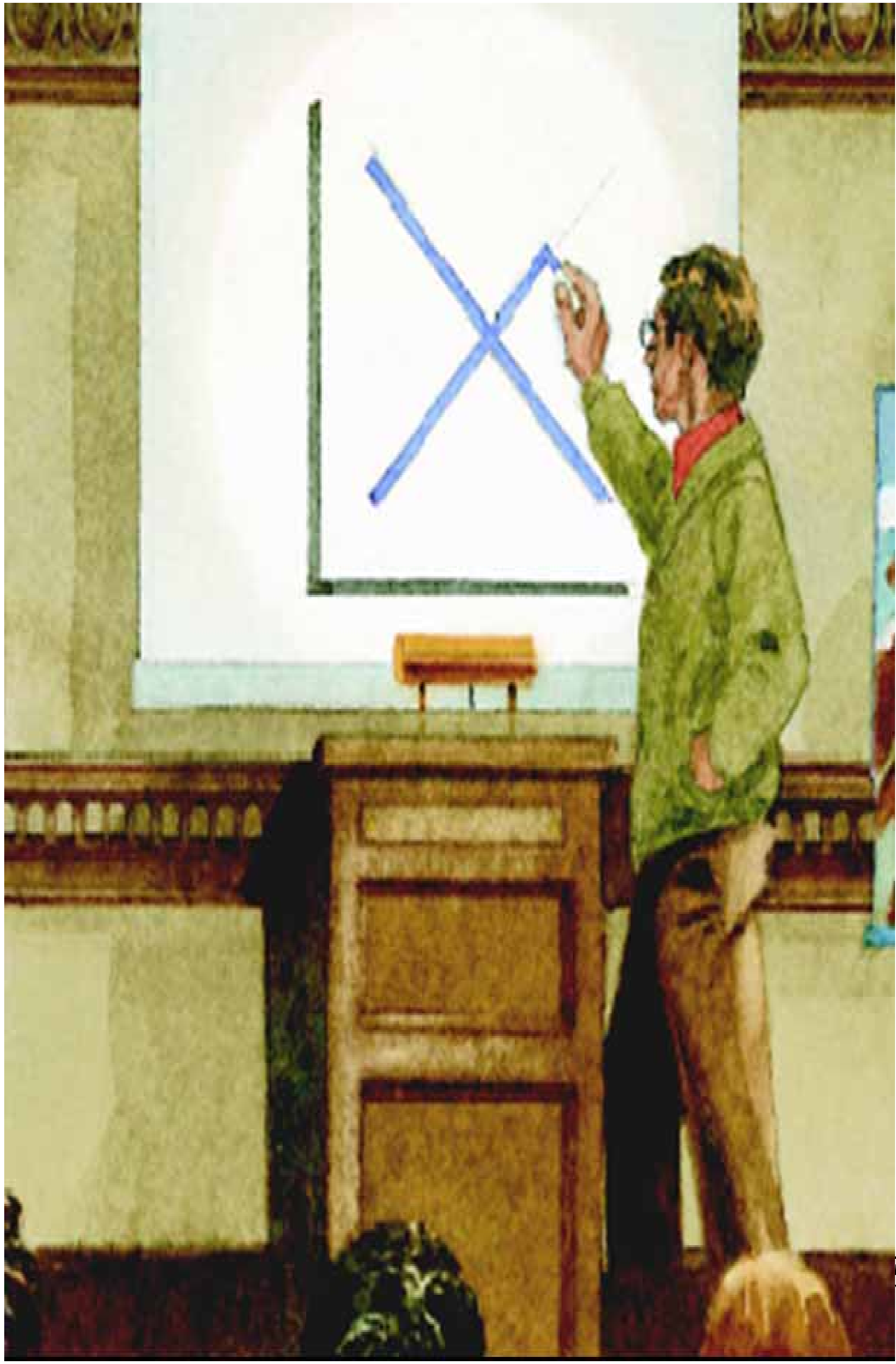


宏观经济学

教师：张 延

北京大学经济学院课程

2009年5月25日

- 通　　知

- 按照院里和学校的规定，5月28日端午节放假一天，周四中宏停课一次。

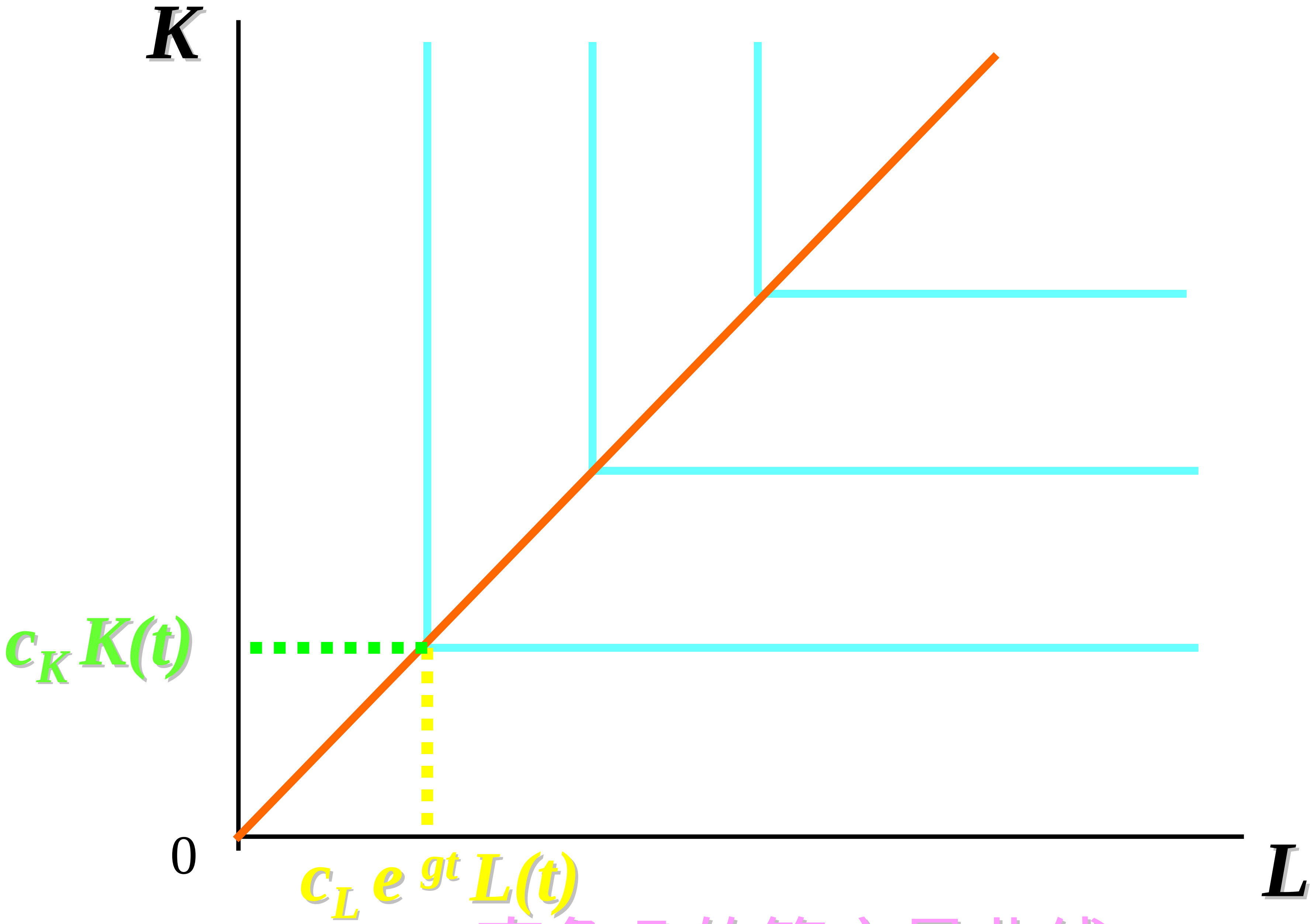
- 作业：
- 《高级宏观经济学》商务印书馆1999年版
- 第47页：1.1、1.4、1.10
- 6月4日交第6次作业。
- 6月5日上第6次习题课。

• 三、与哈罗德—多马模型的比较。

- 哈罗德(1939年)、多马(1946)模型。
- Harrod, R. F. (1939), " An Essay in Dynamic Theory." *E. J.* 49 (March): 14-33
- Domar, Evsey D. (1946). "Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment." *E.T.A.* 14(April): 137-147

- 假定生产函数为里昂惕夫函数：
- $Y(t) = Min\,[\,c_K K(t),\ c_L e^{gt} L(t)]$
- 其中c_K、c_L 和 g 均为正。
- 与索洛模型一样，$L^{\cdot}(t) = n\,L(t)$
- $K^{\cdot}(t) = s\,Y(t) - \delta K(t)$， $A^{\cdot}(t) = g\,A(t)$
- 最后，假定：$c_K K(0) = c_L L(0)$

- 生产函数为：
- $$Y(t) = Min\,[\, c_K K(t)，c_L e^{gt} L(t)]$$
- 也是一个劳动增进型的生产函数。
- 表明等产量曲线为直角凸的形状。



直角凸的等产量曲线

- 哈罗德—多马模型的隐含前提：

- 要素K与L之间不能自由替代、市场机制不能自发调节。

1、k 的动态学 —— 均衡的存在性

- 由于 $k = K／AL$，用链式法则可得。
- 两个变量之比的增长率等于其增长率

之差：$(X_1／X_2)^{\cdot}／(X_1／X_2)$

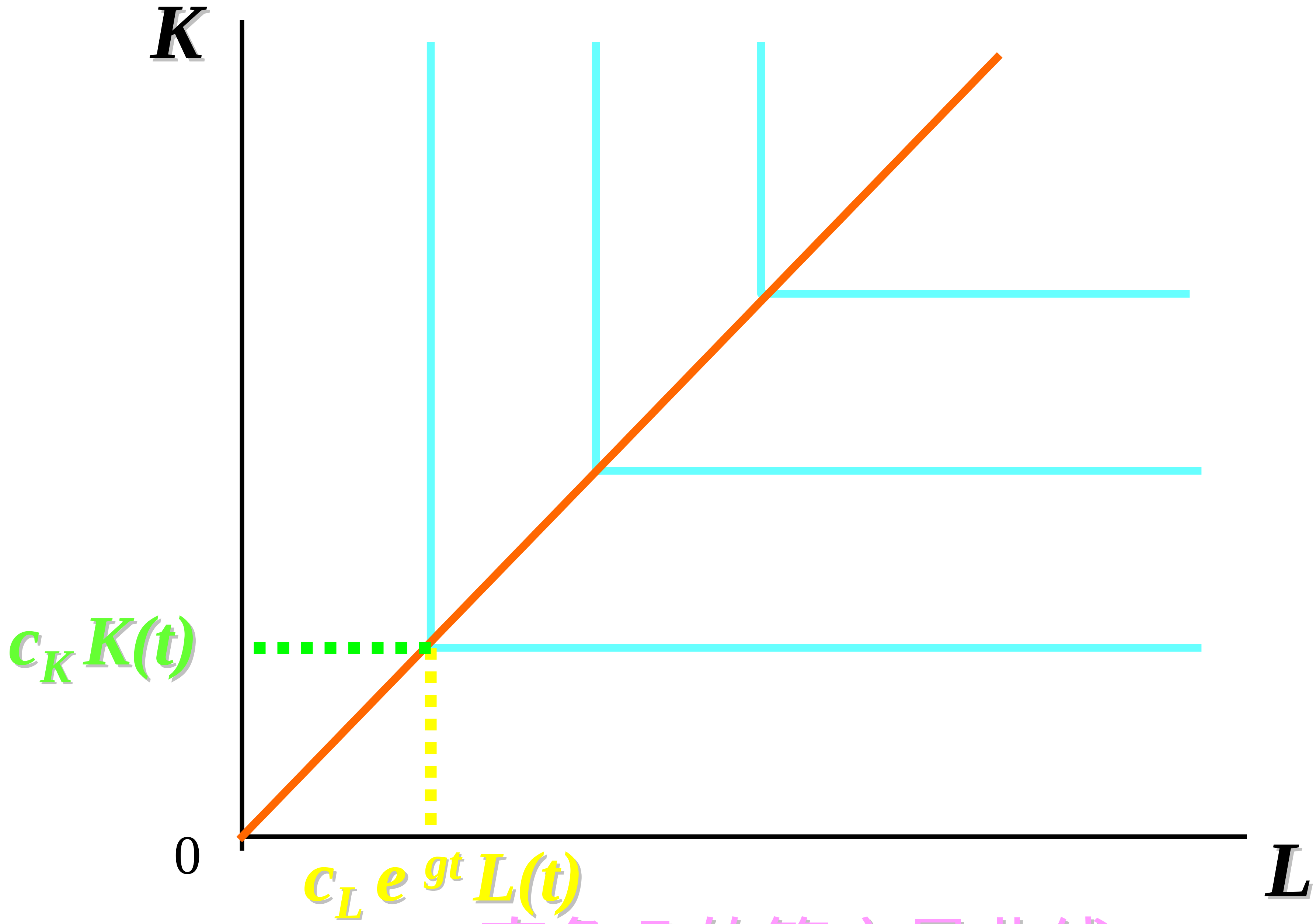
- $= X_1^{\cdot}／X_1 - X_2^{\cdot}／X_2$
- $k^{\cdot}／k = K^{\cdot}／K - (AL)^{\cdot}／AL$

- 根据均衡的定义，均衡是对立的、变动着的经济变量处于一种力量相当、相对静止、不再变动的境界。均衡是一种不再变动的境界。
- 如果均衡存在，应该有：
- $\dot{k} = dk/dt = 0$ 即：
- $\dot{k}/k = \dot{K}/K - \dot{(AL)}/AL = 0$
- 即：$\dot{K}/K = \dot{(AL)}/AL$

- $K^{\cdot}(t) ╱ K(t)$（均衡的定义式）
- $= [c_K K(t)]^{\cdot} ╱ [c_K K(t)]$
- $= [c_K K^{\cdot}(t)] ╱ [c_K K(t)]$
- $= K^{\cdot}(t) ╱ K(t)$
- $= [s\,Y(t) - \delta K(t)] ╱ K(t)$
- $= s\,Y(t) ╱ K(t) - \delta$ —— 实际增长率

- $[A(t)L(t)]^{\cdot} \big/ [A(t)L(t)]$ （均衡的定义式）
- $= [c_L e^{gt} L(t)]^{\cdot} \big/ [c_L e^{gt} L(t)]$
- $= c_L [e^{gt} g L(t) + e^{gt} L^{\cdot}(t)] \big/ [c_L e^{gt} L(t)]$
- $= [g L(t) + L^{\cdot}(t)] \big/ L(t)$
- $= [g L(t) + n L(t)] \big/ L(t)$
- $= n + g$ —— 自然增长率

- 要达到平衡增长路径，必须满足：
- 两个增长率相等。
- $\therefore\ K^{\cdot}(t) / K(t) = [A(t)L(t)]^{\cdot} / [A(t)L(t)]$
- $sY(t) / K(t) - \delta = g + n$
- 实际的增长率 ＝ 自然的增长率



直角凸的等产量曲线

- 这意味着：两种要素不能自由替代，沿着固定的路径扩张产量是最优的。
- 即：两种要素投入的技术系数是固定的。$K(t)／L(t) = c_L e^{gt}／c_K$ 为一个固定的常数。

- 2、直角凸的等产量曲线的性质：
- 如果对于所有t，有：
- $c_K K(t) = c_L e^{gt} L(t)$ 成立，
- 则：$Y(t) = c_K K(t) = c_L e^{gt} L(t)$
- 意味着按照最优路径增加产量。

- 实际增长率
- $= s\, Y(t) / K(t) - \delta$
- $= s\, c_K K(t) / K(t) - \delta$
- $= s\, c_K - \delta$
- —— 有保证的增长率、满意的增长率

- 如果按照最优路径增长，则意味着：
- $Y(t) = c_K K(t) = c_L e^{gt} L(t)$
- $s\, Y(t) ／ K(t) - \delta = g + n = s\, c_K - \delta$
- 实际的增长率 ＝ 自然的增长率
- ＝ 有保证的(满意的) 增长率

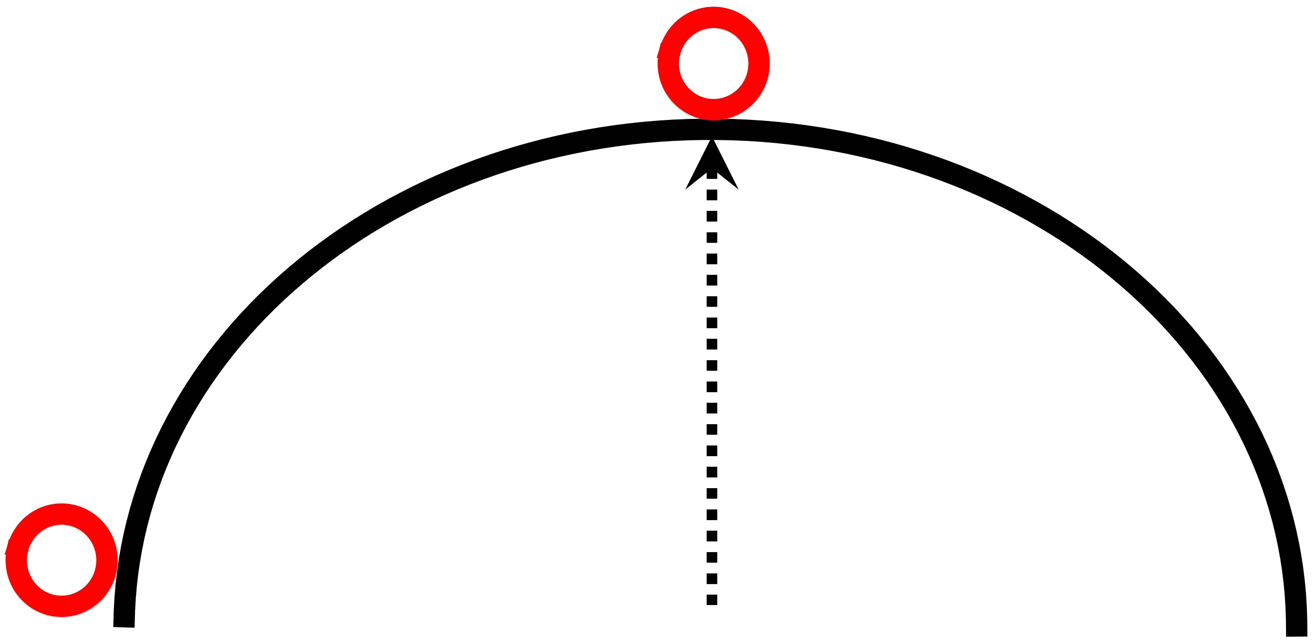
- $g + n = s\,c_K - \delta$

- 外生变量c_K、g、s、δ和n由不同

因素决定，无理由期望这一条件成立。

- “刃峰”上的增长。

非稳定性均衡的偏离 1



均衡位置

- 3、如果偏离最优路径增长，则意味着劳动力：
- $Y(t) = c_K K(t) = c_L e^{gt} L(t)$
- 按照最优路径增长，需要的劳动力数量

  为：
- $L(t) = c_K K(t) / c_L e^{gt}$
- 实际失业量 = $L(t) - c_K K(t) / c_L e^{gt}$

- 实际失业率 u = 实际失业量 ／ $L(t)$
- $= 1 - c_K K(t) ／ [c_L e^{gt} L(t)]$
- $1 - u = c_K K(t) ／ [c_L e^{gt} L(t)]$
- $(1-u)^{\cdot} / (1-u)$
- $= [c_K K(t)]^{\cdot} / c_K K(t) - [c_L e^{gt} L(t)]^{\cdot} / [c_L e^{gt} L(t)]$

- ∵ 如果 $[c_K K(t)]^{\cdot} ╱ [c_K K(t)]$
- $< [c_L e^{gt} L(t)]^{\cdot} ╱ [c_L e^{gt} L(t)]$
- 即: $(1-u)^{\cdot} / (1-u) < 0$
- 如果： $1- u > 0$
- 即: $(1- u)^{\cdot} < 0$
- $- u^{\cdot} < 0$
- $u^{\cdot} > 0$

- $\therefore du/dt > 0$

- ——→ u 与 t 同方向变动，随着

时间的推移，失业率会不断上升。

- 也可以直接用 u 对 t 求一阶导：
- 实际失业率随时间的变化为：
- du/dt
- $= d\{1- c_K K(t)/[c_L e^{gt} L(t)]\}/dt$

- $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$
- du/dt
- $= \; d\{1 - c_K K(t)/[c_L e^{gt} L(t)]\}/dt$
- $= \; -\{c_L e^{gt} L(t)\, c_K \dot{K}(t)$
- $-\, c_K K(t)[c_L e^{gt} L(t)]^{\cdot}\}/[c_L e^{gt} L(t)]^2$

- $= -\{ c_L e^{gt} L(t) c_K \dot{K}(t) - c_K K(t)[c_L e^{gt} g L(t)$
- $+ c_L e^{gt} \dot{L}(t)]\} / [c_L e^{gt} L(t)]^2$
- $= -\{ c_L e^{gt} L(t)[c_K \dot{K}(t) - c_K K(t)[g + n]\}$
- $/ [c_L e^{gt} L(t)]^2$

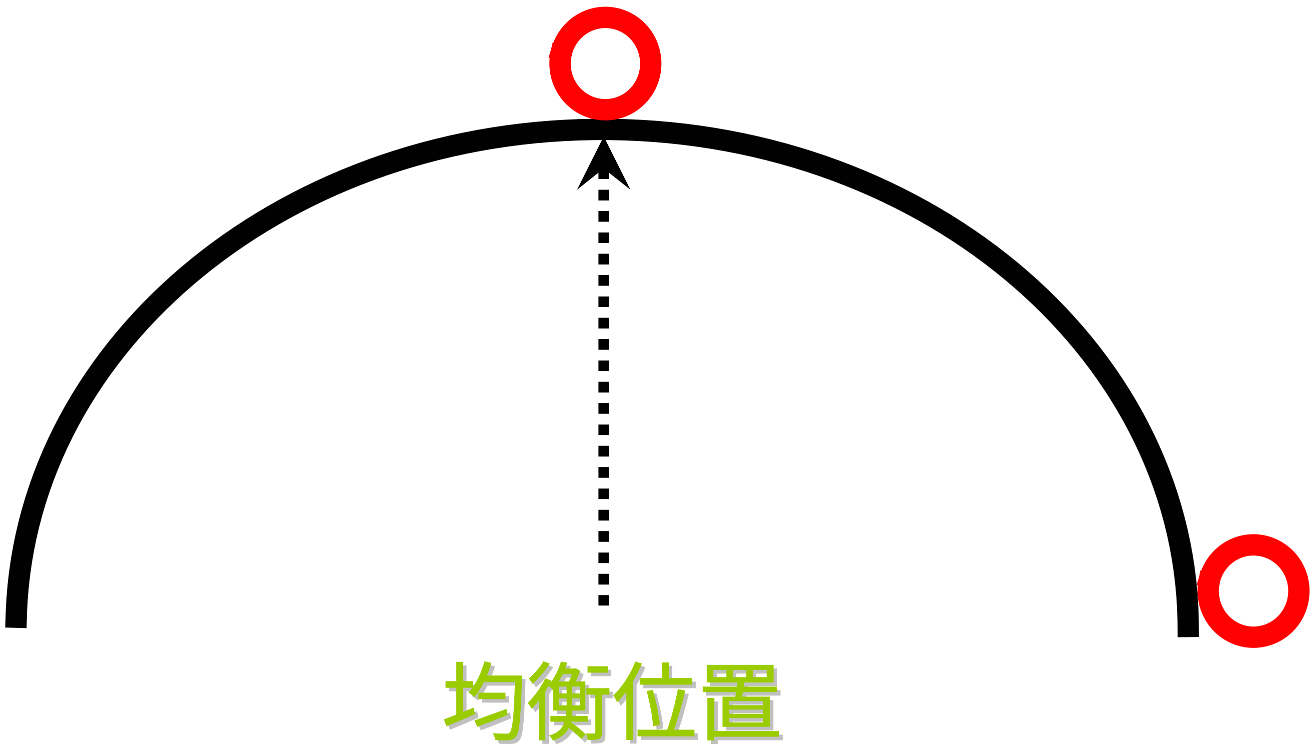
- $= - \ [c_K K^{\cdot}(t) - c_K K(t)[g + n]\} \ / [c_L e^{gt} L(t)]$
- $= - \ c_K [s Y(t) - \ \delta K(t) - \ K(t)(g + n)]$
- $/ [c_L e^{gt} L(t)]$
- $= - \ c_K K(t)[s Y(t) / K(t) - \delta - (g + n)]$
- $/ [c_L e^{gt} L(t)]$

- $= [s\,Y(t) / K(t) - \delta - (g+n)]\ \underbrace{[-\,c_K K(t)] / [c_L\, e^{gt} L(t)]}_{u-1}$
- $= \ (1 - u)[\,g + n \ - s\,Y(t) / K(t) + \ \delta\ ]$

- ∵ 如果 $[c_K K(t)]^{\cdot} / [c_K K(t)]$
- $< [c_L e^{gt} L(t)]^{\cdot} / [c_L e^{gt} L(t)]$
- 即：$s\,Y(t) / K(t) - \delta < n+g$
- ∴ $du / dt > 0$
- ——→ u 与 t 同方向变动，随着时间

的推移，失业率会不断上升。

非稳定性均衡的偏离 2



- 4、如果偏离最优路径增长，则意味着资本：
- $Y(t) = c_K K(t) = c_L e^{gt} L(t)$
- 按照最优路径增长，需要的资本数量为：
- $K(t) = c_L e^{gt} L(t) / c_K$
- 资本利用率为：
- $r = c_L e^{gt} L(t) / [c_K K(t)]$

- $\dot{r}/r$

- $= [c_L e^{gt} L(t)]^{\cdot} / [c_L e^{gt} L(t)] - [c_K K(t)]^{\cdot} / c_K K(t)$

- ∵ 如果 $[c_K K(t)]^{\cdot} \diagup [c_K K(t)]$
- $> [c_L e^{gt} L(t)]^{\cdot} \diagup [c_L e^{gt} L(t)]$
- 即: $r^{\cdot}/r < 0$
- 如果：$r > 0$
- 即: $r^{\cdot} < 0$

- $\therefore\ dr/dt < 0$

- ——→ r 与 t 反方向变动，随着时

间的推移，资本利用率会不断下降。

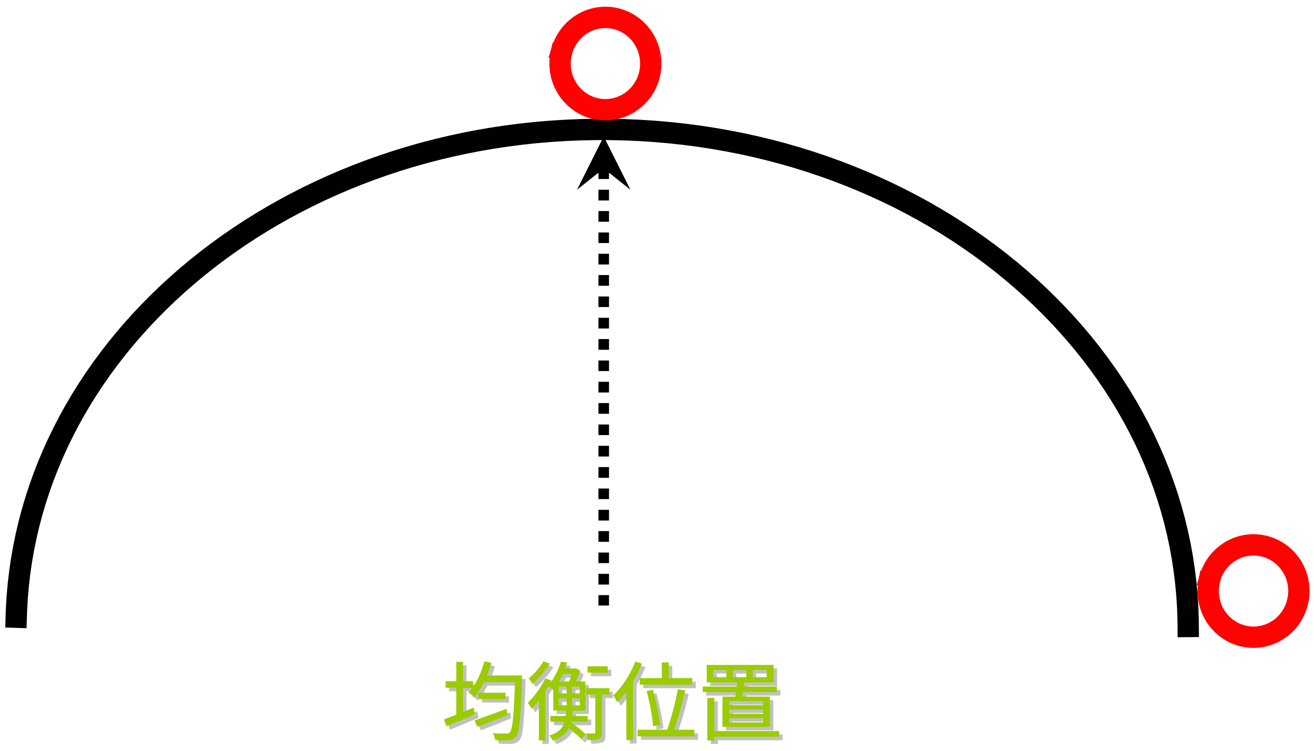
- 也可以直接用 r 对 t 求一阶导：
- $dr／dt$
- $= \{ [c_L e^{gt} \dot{} L(t)]c_K K(t) - c_L e^{gt} L(t)c_K \dot{K}(t)\}$
- $／[c_K K(t)]^2$
- $= \{ [c_L e^{gt} g L(t)+ c_L e^{gt} \dot{L}(t)] c_K K(t)$
- $- c_L e^{gt} L(t)c_K \dot{K}(t)\}／[c_K K(t)]^2$
- $= c_L e^{gt} L(t)[(g+n) c_K K(t) - c_K \dot{K}(t)]／[c_K K(t)]^2$

- $= \{ [(g+n)c_K K(t) - c_K [s\,Y(t) - \delta K(t)] \}$
- $c_L e^{gt} L(t) / [c_K K(t)]^2$
- $= \{ [(g+n) - [s\,Y(t) / K(t) - \delta] \}$
- $\underbrace{c_L e^{gt} L(t) / [c_K K(t)]}_{r}$
- $= r\,[g + n - s\,Y(t) / K(t) + \delta]$

- ∵ 如果 $[\dot{c_K} K(t)] ／ [c_K K(t)]$
- $＞ [\dot{c_L e^{gt}} L(t)] ／ [c_L e^{gt} L(t)]$
- 即：$s\,Y(t) ／ K(t) - \delta ＞ n + g$
- ∴ $dr ／ dt ＜ 0$
- ——→ r 与 t 反方向变动，随着时间的推移，资本利用率会不断下降。

- 哈罗德 — 多马模型的结论：
- 只要市场机制不完善(要素不能自由替代)，经济依靠自身的力量就很难实现稳定增长。

非稳定性均衡的几何图形



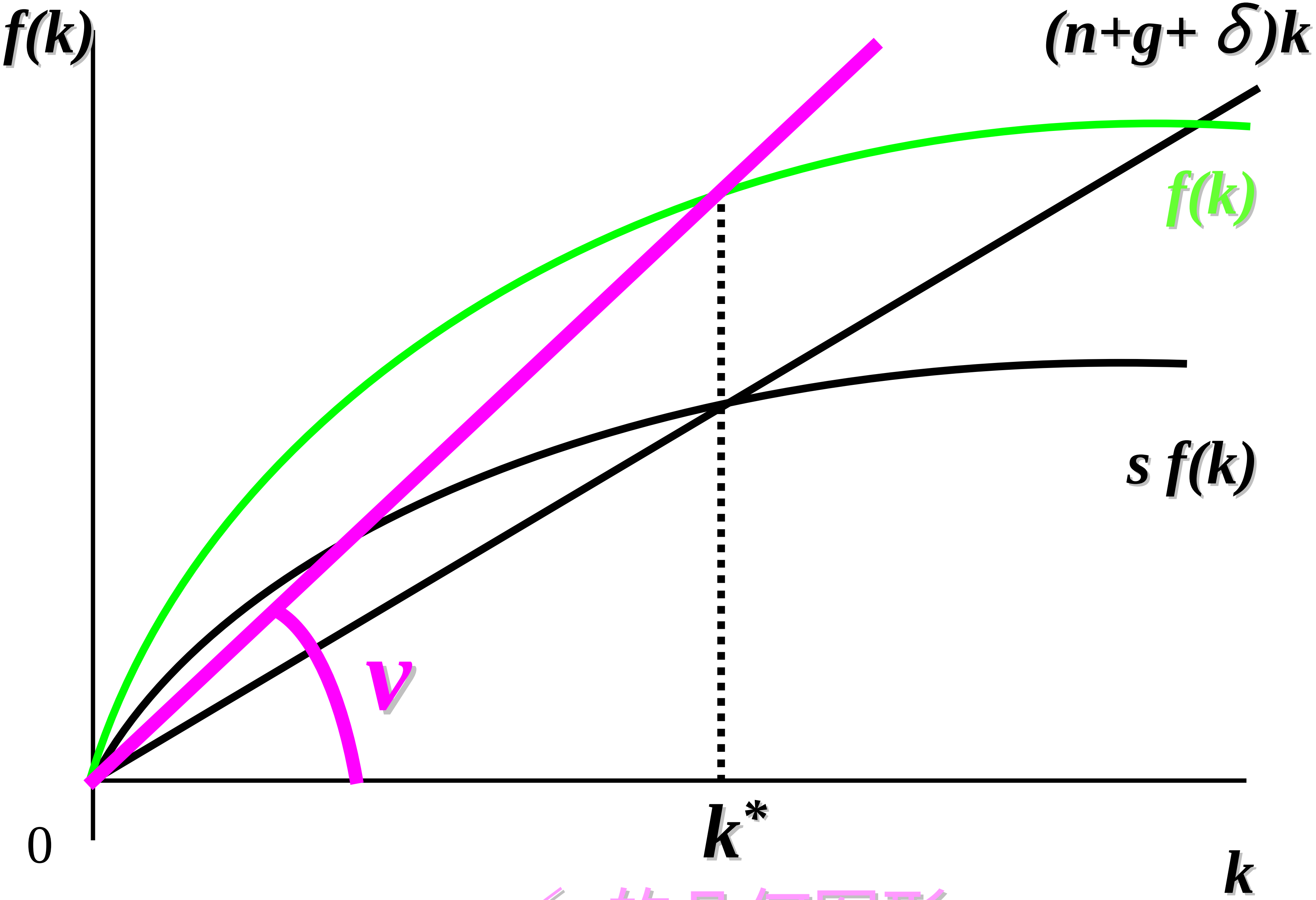
- 四、什么是平衡增长路径？
- 平衡增长路径上存在的经济现象。
- 由于k 向k^* 收敛，很自然人们要问：
- 当 $k = k^*$，即$\dot{k} = dk / dt = 0$ 时，
- 该模型的各变量如何变动。

- 1、资本($\dot{K}/K$)的增长率大体上是 常数，
- 且大于劳动的增长率。
- $\because \dot{k}/k$
- $= \dot{K}/K - \dot{L}/L - \dot{A}/A = 0$
- $\therefore \dot{K}/K$
- $= \dot{L}/L + \dot{A}/A = n+g > n$

2、资本 — 产量比(*K*╱*Y*)近似为常数

- 对*A* 进入生产函数的这种设定方式，与该模型的其他假定一起，将意味着资本 — 产量比*K*╱*Y* 最终将稳定下来。实际上，就较长期限来看，资本 — 产量比并未表现出任何明显的向上或向下的趋势。另外，在建立模型时，若能使这一比例最终不变，将使得分析远为简单。

- K / Y
- $= (K/AL)/(Y/AL) = k/y = k/f(k)$
- $\because\ s f(k^*) - (n+g+\delta)k^* = 0$
- $\therefore\ K / Y$
- $= k^* / f(k^*) = s/(n+g+\delta) = 1/v$
- K/Y 的几何意义为：
- 对应于k^*点，在 $f(k^*)$上，连接一条从原点出发的射线，射线斜率(v)的倒数$(1/v)$即是资本 — 产量比。



• K／Y 的几何图形

- 3、总产量的增长率($\dot{Y}/Y$)大体上是常数，
- 且大于劳动的增长率。
- 规模报酬不变的假定意味着产量Y也以这一比例增长。
- ∵ $K/Y = s/(n+g+\delta)$
- 即： $\dot{K}/K - \dot{Y}/Y = 0$
- $\dot{K}/K = \dot{Y}/Y = n+g > n$

- 4、最后，人均资本量K/L和人均产量Y/L以比例 g 增长。或者说，在该路径上，人均产量的增长率仅仅决定于技术进步率。
- 设：$\tilde{y} = Y/L$，
- 即：$\dot{\tilde{y}}/\tilde{y}$
- $= \dot{Y}/Y - \dot{L}/L = (n+g) - n = g$

- 设：$\tilde{k} = K / L$
- 即：$\dot{\tilde{k}} / \tilde{k}$
- $= \dot{K} / K - \dot{L} / L$
- $= (n+g) - n$
- $= g$

- 5、在总产量的构成中，工资和利润的分配份额相当稳定。
- $Y = A L f(k)$， $k = K ／ AL$
- ∵ L是 L 的显函数，$f(k)$是 L 的隐函数

- $\because \partial Y / \partial L = A f(k) + AL f'(k)(K/A)(-1/L^2)$
- L不变，f(k)对L求导
- ——隐函数求导法
- $= A f(k) - f'(k)(K/L)$
- $= A [f(k) - f'(k)(K/AL)]$
- $= A [f(k) - k f'(k)]$
- ————劳动的边际产量

- $Y = A\,L\,f(k)$，$k = K/AL$
- ∵ $f(k)$是K的隐函数，$k = K/AL$
- ∴ $\partial Y/\partial K = A\,L\,f'(k)(1/AL)$
- AL不变，$f(k)$对K求导
- ———— 隐函数求导法
- $= f'(k)$
- ———— 资本的边际产量

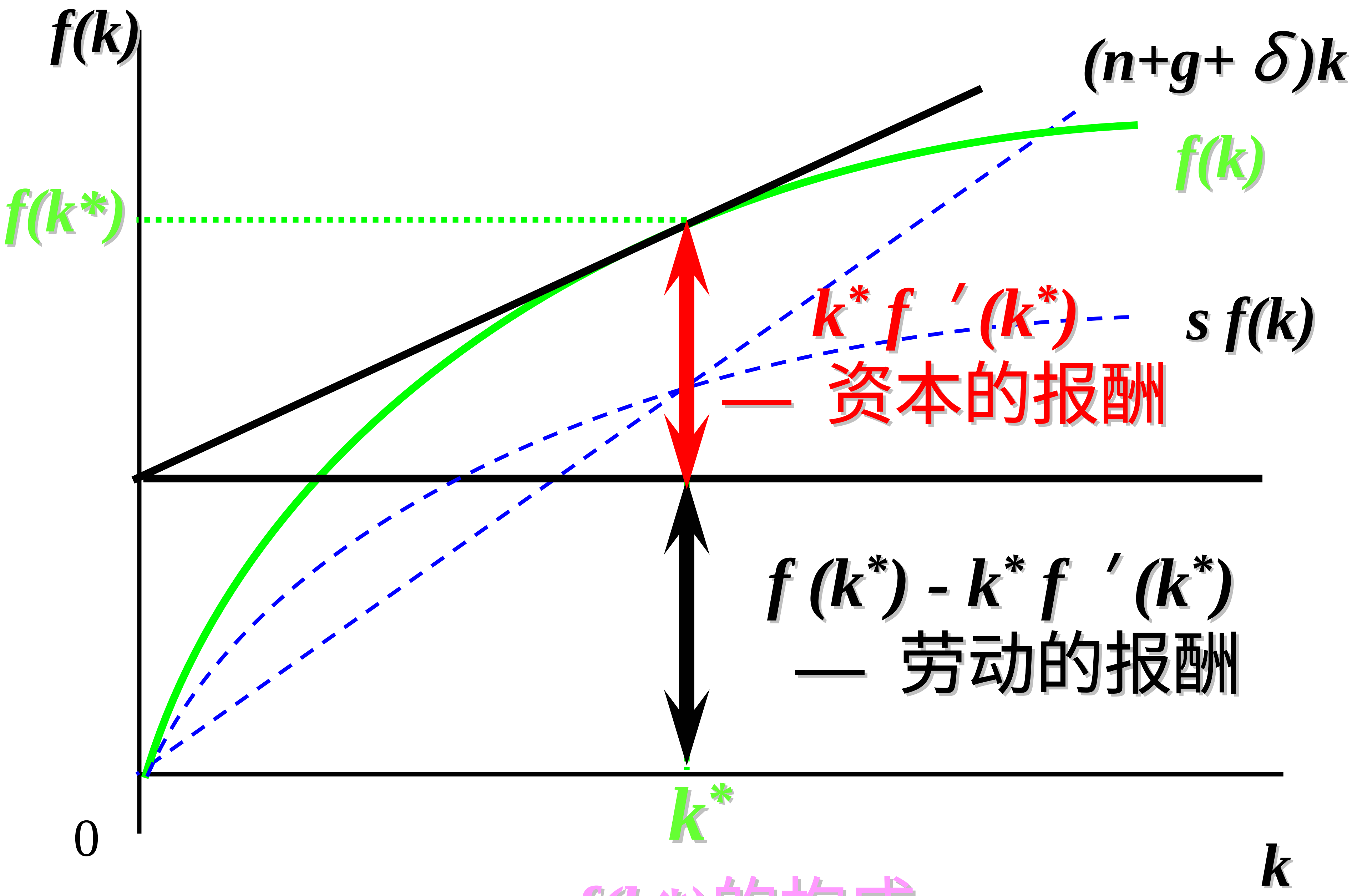
- 每种要素按边际产量取得报酬，即：
- 工资$w = \partial Y／\partial L = A[f(k) - k f'(k)]$
- 利润 $r = \partial Y／\partial K = f'(k)$
- 则：$w L + r K$
- $= A[f(k) - k f'(k)]L + f'(k)K$
- $= A L f(k) - K f'(k) + f'(k)K$
- $= A L f(k) = Y$

- ∵ $Y = K f'(k) + AL[f(k) - k f'(k)]$
- ∴ 等式两边同除以*AL*，得到：
- $Y/AL = (K/AL) f'(k) + f(k) - k f'(k)$
- 令$y = Y/AL = f(k)$，得到：
- $y = f(k) = k f'(k) + [f(k) - k f'(k)]$

y 是如何瓜分的？

$$y = k f'(k) + [f(k) - k f'(k)]$$

- ∵ 存在均衡 k^*
- ∴ 存在均衡的、不变的、固定的
- $k^* f'(k^*)$和$[f(k^*) - k^* f'(k^*)]$
- $k^* f'(k^*)$ —— 资本的报酬
- $f(k^*) - k^* f'(k^*)$ —— 劳动的报酬



- f(k*)的构成

- $wL + rK = Y$
- 两边同时除以Y，得到：
- $wL/Y + rK/Y = 1$
- wL/Y —— 劳动报酬占总产量的份额。
- rK/Y —— 资本报酬占总产量的份额。

- 劳动报酬所占的份额的增长率为：
- $[wL/Y]^{\cdot}/(wL/Y)$
- $= \dot{w}/w + \dot{L}/L - \dot{Y}/Y$
- $= \dot{w}/w + n - (n+g)$

- $w = A[f(k) - kf'(k)]$
- $\dot{w} / w$
- $= \dot{A} / A + [f(k) - kf'(k)]^{\cdot} / [f(k) - kf'(k)]$
- $= \dot{A} / A + \{f'(k)\dot{k} - [f'(k)\dot{k} + kf''(k)\dot{k}]\}$
- $/ [f(k) - kf'(k)]$
- $= \dot{A} / A - kf''(k)\dot{k} / [f(k) - kf'(k)]$

- ∵　在平衡增长路径上，$\dot{k} = 0$
- ∴　$\dot{w} / w = \dot{A} / A = g$
- $[wL/Y]^{\cdot} / (wL/Y)$
- $= \dot{w} / w - g = 0$

- 劳动报酬所占的份额的增长率为0，意味着劳动报酬所占的份额不随时间变动。
- $[wL / Y]^{\cdot} = 0$

- 资本报酬所占的份额的增长率为：
- $[rK/Y]^{\cdot}/[rK/Y]$
- $= \dot{r}/r + \dot{K}/K - \dot{Y}/Y$
- $= \dot{r}/r + (n+g) - (n+g) = \dot{r}/r$
- $\because r = f'(k)$
- $\therefore \dot{r}/r = f'(k)^{\cdot}/f'(k)$
- $= f''(k)\dot{k}/f'(k)$

- ∵ 在平衡增长路径上，$\dot{k} = 0$
- ∴ $\dot{r} / r = f''(k)\dot{k} / f'(k) = 0$
- $[rK/Y]^{\cdot} / [rK/Y] = \dot{r} / r = 0$
- 资本报酬所占的份额的增长率为0。

- 资本报酬所占的份额的增长率为0，意味着资本报酬所占的份额不随时间变动。
- $[rK/Y]^{\cdot} = 0$
- 结论：总产量中分配向资本和劳动的份额各自不变。

- 这样，索洛模型意味着：不管出发点如何，经济向一平衡增长路径收敛，在平衡增长路径上，该模型中的每个变量的增长率都是常数。

- 索洛模型中的平衡增长路径符合卡尔多(1961年)描述过的关于增长的几个主要特征事实(*stylized facts*)：
- 1、对于大多数主要工业化国家而言，在过去一个世纪中，劳动、资本、产量的增长率大体上都是常数，这一说法是一个合理的初步近似。

- 2、产量和资本的增长率大致相等(从而资本 — 产量比近似为都是常数)，且大于劳动的增长率(从而每工人平均产量和每工人平均资本是上升的)。

- 3、在总产量的构成中，工资和利润的分配份额相当稳定。(暗含收入的差别不会扩大，不会出现马克思所预言的：随着经济增长，阶级差别在扩大，资产阶级越来越富，无产阶级越来越穷，最终阶级矛盾激化，无产阶级起来推翻资产阶级的现象。)
- 索洛模型中的平衡增长路径有这些性质。

五、 k 收敛的速度

- 实际中，我们不仅关心某种变化的最终结果，也关心这种效果出现的快慢。我们仍可利用对长期均衡的近似来探讨这一问题。

- k 向 k^* 收敛的速度
- $= [k(t) - k^*]^{\cdot} ╱ [k(t) - k^*]$
- $[k(t) - k^*]^{\cdot}$
- $= d[k(t) - k^*] ╱ dt$
- $= dk(t) ╱ dt - dk^* ╱ dt$
- $= k^{\cdot}$
- $k^{\cdot} = \phi(k)$

- 1、k 收敛速度的泰勒级数近似

- 为简单起见，我们着重考虑 k 的行为，而非y 的行为。我们的目的是确定k以多快的速度趋近k^*。

- 我们知道，$k^{\cdot}$决定于k (见1.13)；因此，我们可以写出 $k^{\cdot} = \phi(k)$。
- 如果$k = k^*$ 时，$k^{\cdot} = 0$ ，正规地说，只有在围绕平衡均长路径的一个任意小的邻域内，我们才可依靠泰勒级数近似之。就泰勒级数近似是否为有限变化提供好的指导这一问题，尚无一个普遍适用的答案。对于一个具有传统生产函数的索洛模型来说，以及就多数值的不大变化而言(如我们考虑的这种情形)，泰勒级数近似一般是相当可靠的。

- 泰勒展开式：
- $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开式为：
- $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- $+ f''(x_0)(x - x_0)^2 / 2 + \dots$
- $+ f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n!$
- $+ \xi^{(n+1)}$

- 因此，在 $k = k^*$ 处，对 $\dot{k}(k)$ 作一阶泰勒展开，可得：
- $\dot{k}(k) \approx \dot{k}(k^*) +$
- $[\partial \dot{k}(k) / \partial k \,/_{k=k^*}](k - k^*)$
- 当 $k = k^*$ 时，$\dot{k}(k^*) = 0$

- $\dot{k} = [k(t) - k^*]^{\cdot}$
- $\approx [\partial \dot{k}(k) / \partial k \,/_{k = k^*}](k - k^*)$ **(1.23)**
- 也就是说，$\dot{k}$ 近似等于k 与 k^* 之

差与$k = k^*$处对k 的一阶导数值的乘积

- $\because\ \dot{k} = dk / dt$
- $\quad = s\ f(k) - (n + g + \delta)\, k$
- ∴ 两边对k求导，得到：
- $\partial \dot{k}(k) / \partial k = s\ f'(k) - (n+g+\delta)$
- 把$k = k^*$代入上式，得到：
- $\partial \dot{k}(k) / \partial k \,\big|_{k=k^*}$
- $= s\ f'(k^*) - (n+g+\delta) \qquad (1.24a)$

- ∵ 当$k = k^*$时，
- $\dot{k} = s f(k^*) - (n+g+\delta)k^* = 0$
- ∴ $s = (n+g+\delta)k^* ／ f(k^*)$ 代入 (1.24a)
- $\partial \dot{k}(k) ／ \partial k \,/_{k=k^*}$
- $= [(n+g+\delta) k^* f'(k^*)] ／ f(k^*) - (n+g+\delta)$

- ∵ $f'(k^*)\,k^* \,/\, f(k^*)$
- 为 $k = k^*$ 处的产出的资本弹性。
- $f'(k^*)$ ——————— 资本的边际产量
- $f'(k^*)\,k^*$ ———— 资本获得的收入
- $f'(k^*)\,k^*/f(k^*)$
- —— 资本在单位产出中所占的份额(%)

- 令: $a_K(k^*) = f'(k^*)\, k^* / f(k^*)$
- $\therefore\ \partial \dot{k}(k) / \partial k \,\big|_{k=k^*}$
- $= (n+g+\delta)\,[\,a_K(k^*) - 1\,] \qquad (1.24)$
- 把(1.24)代入(1.23)，得到：

- $\dot{k} = \dot{(k - k^*)}$
- $\approx \left(\partial \dot{k}(k) / \partial k \,\big|_{k = k^*} \right)(k - k^*)$
- $\approx \underbrace{-[1 - a_K(k^*)](n+g+\delta)}_{\lambda}\,(k - k^*)$ **(1.25)**
- 定义：$\lambda = [1 - a_K(k^*)](n+g+\delta)$

- $[k(t) - k^{*}]^{\cdot} / [k(t) - k^{*}] \approx -\lambda$
- 定义： $\lambda = [1 - a_K(k^{*})](n+g+\delta)$
- $k(t) - k^{*}$
- $\approx [k(0) - k^{*}]\, e^{-\lambda t}$
- $\approx [k(0) - k^{*}]\, e^{-[1 - aK(k^{*})](n+g+\delta)t}$ (1.26)

- 方程(1.26)表明，在平衡增长路径的邻近，每单位有效劳动的平均资本 $k(t)$向k^*收敛的速度，取决于其初始值$k(0)$与k^*的距离，以及收敛的速度(指数增长的速度)。

- 可以证明，y 趋近y^* 的速度与k 趋近k^* 的速度相同，也就是说存在，
- $y(t) - y^*$
- $\approx [y(0) - y^*] e^{-[1-a(k^*)](n+g+\delta)t}$

- **2、经验检验**
- 我们可就(1.26)作一校准试验，看看经济实际上以多快的速度趋近其平衡增长路径。
- ∵ $(n+g+\delta)$ 一般为每年6%
- (比如，若人口增长率为1～2%，每工人平均产量增长1～2%，折旧率为3～4%)。若资本的收入份额大致为1／3 。

- 若 $n+g+\delta=6\%$，$a_K(k^*)=1/3$，
- 则 $\lambda=[1-a_K(k^*)](n+g+\delta)=4\%$。
- $k(t)-k^* \approx [k(0)-k^*]\, e^{-[1-aK(k^*)](n+g+\delta)t}$
- 因此，*k* 和 *y* 每年向 k^* 和 y^* 移动距离的4%，要走完到其平衡增长路径值的距离的一半约需多少时间？

- ∵ 要走完到其平衡增长路径值的距离

  的一半约，即$e^{-\lambda t} = 0.5$

- ∴ $t = \ln 0.5 / (-\lambda)$

- $\approx 0.69 / \lambda = 17.33$年

- 要使具有一不变的负增长率的变量(本例中为 $k - k^*$)降低一半，所需时间大约为70除以百分增长率.。
- 因此此例中的半衰期(*half – life* 减半期？)大约为70／(4%)，或大约18年。

- 同理，一具有正增长率的变量翻一倍所需时间大约也是70除以增长率。
- 要使 $e^{\lambda t} = 2$，则：
- $t = \ln 2 ／\lambda \approx 0.69／\lambda = 17.33$年
- 因此翻倍期大约为70／(4%)，或大约18年
- 经济增长的“70”规则因此得出。

长期经济增长的“70”规则

- 某个变量年增长率为X%，则该变量在70／X 年内翻一番，因而称作“70规则”。
- 从这一规则看，如果甲国经济增长率为1%，它的*GDP* 翻一番需要70年，而乙国经济增长率为3%，翻一番时间仅为70／3或23年。也就是说，即便甲乙两国人均收入起点水平大体相同，2个百分点增长率差别在100年后会导致3-4倍的巨大收入差别。复利式增长可能会在较长时期导致极为惊人的结果。

长期经济增长国际比较

国别	时期	期初人均GDP（美元）	期末人均GDP（美元）	年均增长率（%）
日本	1890-1990	842	16144	3.00
巴西	1900-1987	436	3417	2.39
联邦德国	1870-1990	1330	17070	2.15
美国	1870-1990	1223	14288	2.07
中国	1900-1987	401	1478	1.17
墨西哥	1900-1987	649	2667	1.64
英国	1870-1990	2693	13589	1.36
阿根廷	1900-1987	1284	3302	1.09
印度尼西亚	1900-1987	499	1200	1.01
巴基斯坦	1900-1987	413	885	0.88
印度	1900-1987	378	662	0.65
孟加拉国	1900-1987	349	375	0.08

中国增长前景：精神大餐？

- 我国改革开放以后人均收入年增长率大体为5-6%，如果能够在长期保持5%年增长率，用“70规则”计算，年均增长5%的变量将在大约14年内翻一番，在一百年间翻7番以上。也就是说，以5%增长率递增变量的数量值在100年后将是目前水平的2^7即128倍。给定目前我国人均800美元左右*GDP*水平，如果人均*GDP*能够保持5%增长率，一个世纪后能够达到102，000美元水平。即便年增长率在4%，结果也能达到42，000美元，这一结果超出现今世界上最富有国家的水平。

中国增长前景：回到现实。

- 一国在100年长期内持续保持5%人均收入高速增长，是极为困难的。然而，综合考虑我国发展阶段和现实条件，很多经济学家相信，如果各种政策得当，我国有可能在未来30-40年内保持较高增长水平。假定在未来40年间保持人均GDP年均5%增长率，则可以在21世纪中期达到12，000-13，000美元的人均GDP，实现赶上现在中等发达国家人均GDP水平的目标。

- 提高经济增长率是至关重要的。
- 经济增长率的变化有水平效应和增长效应。
- 水平效应指改变经济的平衡增长路径，但并不影响处于平衡增长路径时每工人平均产量的增长率。
- 增长效应指不仅改变经济的平衡增长路径，并且影响处于平衡增长路径时每工人平均产量的增长率。