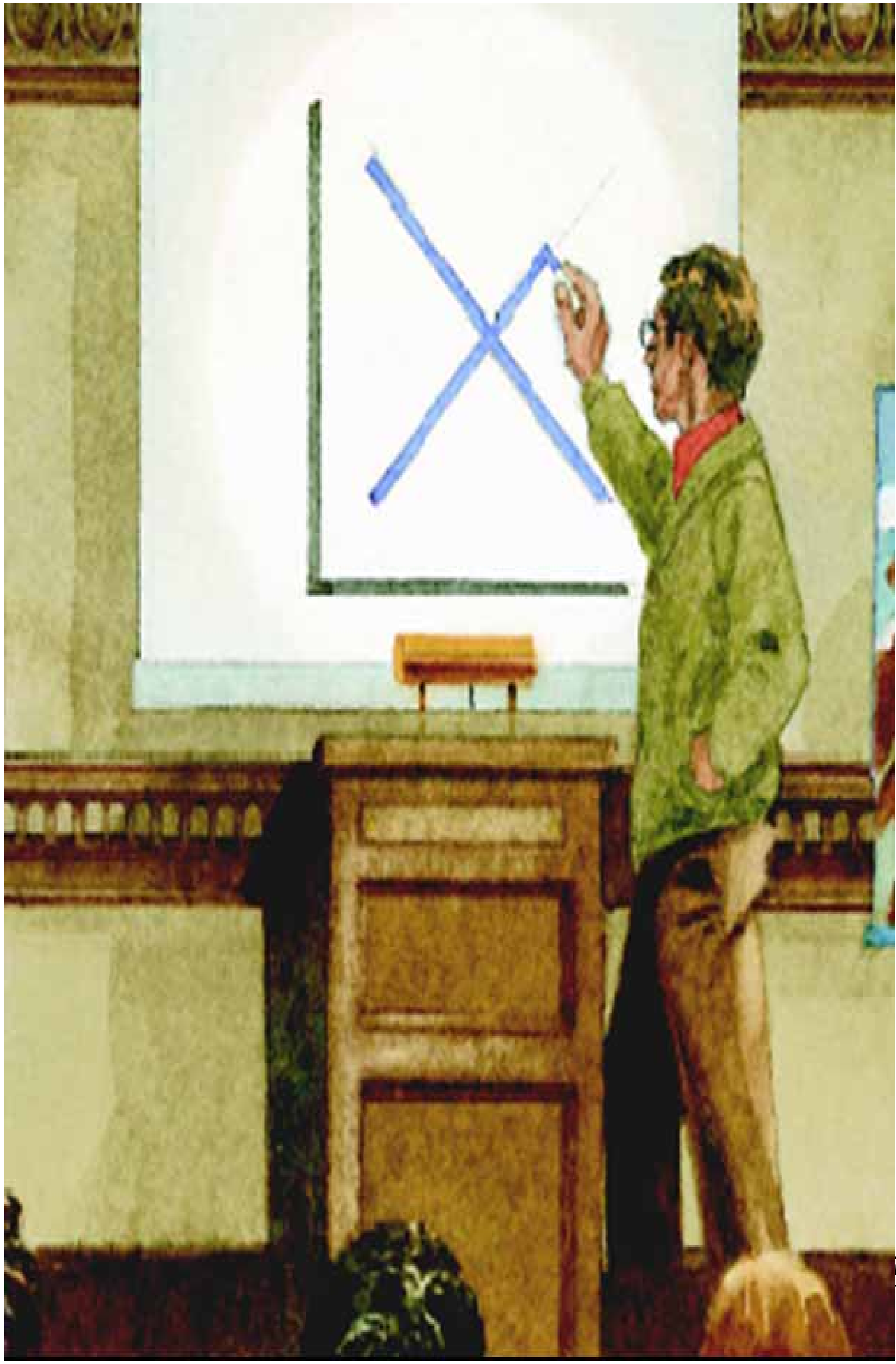


宏观经济学

教师：张 延

北京大学经济学院

2009年5月21日

张延著。版权所有

- 初步预定考试时间
- 6月15日周一下午（具体时间届时通知）
- 题目类型（见网上模拟试卷）
- 单项选择、作图、计算、问答。
- 本周五上第5次习题课。

《中宏》讲义，张延著。版权所有

- **9.2　索洛模型的假定**

- 一、 关于生产函数的假定：

- 1、投入和产出的关系

- 索洛模型包含四个变量：产量(*Y*)，和三种生产投入品 ——— 资本(*K*)、劳动(*L*)、“知识”或“劳动的有效性”(*A*)。在任一时间，经济中有一定量的资本、劳动和知识，而这些被结合起来生产一种产品。

- ***t*** **表示时间，生产函数的形式为：**

- $$Y(t) = F\,[\,K(t)\,,\ A(t)L(t)\,] \qquad (1.1)$$

- 该生产函数的两个特点值得注意：
- (1)、首先，时间并不直接进入生产函数，只是通过K，L，和A进入。
- 这就是说，仅在生产投入变化时，产量才随时间变化。

$$t \longrightarrow A、K、L \longrightarrow Y$$

- K、L、A、Y要对时间t求导的原因。

- (2)、第二，*A* 和*L* 以相乘形式进入。

- *AL* 被称为有效劳动。*A*可以看成劳动生产率、或者资本生产率。

- 如果知识进入的形式为$Y = F(K，AL)$，则以此种形式引入的技术进步被称为劳动增进型或哈罗德中性的。
- 如果知识进入的形式为$Y = F(AK，L)$，则此技术进步是资本增进型的。
- 如果知识进入的形式为$Y = A\,F(K，L)$，则此技术进步为希克斯中性的。

- **A在生产函数中，为什么不能作为独立的生产要素而存在？**

- $$Y(t) = F[K(t), L(t), A(t)]$$

生产要素的划分

- 广义　　　　　　狭 义
- 自然资源：　　土地、森林、矿山
- 人力资源：　　人的体力 —— 劳动、
- 人的智力 —— 知识、
- 企业家才能
- 人造资源：　　资本、厂房、机器、设备

- 知识**A**作为人力资源中——人的智力的典型代表，不能与人的体力*L*相分离。
- **A**在生产函数中的作用是：增加劳动要素的边际产量，或者增加资本要素的边际产量，或者同时增加资本和劳动要素的边际产量。

- 对A进入生产函数的这种设定方式，与该模型的其他假定一起，将意味着资本—产量比 K/Y 最终将稳定下来。
- 实际上，就较长期限来看，资本—产量比并未表现出任何明显的向上或向下的趋势。

- 另外，在建立模型时，若能使这一

比例最终不变，将使得分析远为简单。

因此，假定A与L相乘是很方便的。

《中宏》讲义，张延著。版权所有

- 2、关于生产函数的关键假定是，该生产函数对于其两个自变量资本和有效劳动是规模报酬不变的。
- 这就是说，如果资本和有效劳动的数量加倍(例如，K 和L 加倍而A 不变)，则产量加倍。

- 关于规模报酬的定义是：
- 如果 $F(cK，cAL)= c^r F(K，AL)$，则$F(K，AL)$称为 r 次齐次生产函数。
- 如果 $r > 1$，$c^r > c$，则称为规模报酬递增(对于所有$c \geq 1$)
- 如果 $r = 1$，$c^r = c$，则称为规模报酬不变，或者一次齐次生产函数。
- 如果 $r < 1$，$c^r < c$，则称为规模报酬递减(对于所有$c \geq 1$)

- 更为一般他说，对两个自变量同乘以任意非负常数c 将使产量同比例变动：

$$F(cK, cAL) = c\,F(K, AL)$$

- 对于所有 $c \geq 0$ (1.2)

对c 的要求有所放松，c 的增长可以小于1倍 。

- 3、规模报酬不变的假定可被认为结合了两个假定。
- 第一个假定是：经济足够大，从而从专业化中可得的收益已被穷尽。
- 在一个很小的经济中，进一步专业化很可能有益：资本和劳动数量加倍将使产量比加倍还多 —— 即规模报酬递增。

- 不过，索洛模型假定，经济足够大，从而在资本和劳动加倍时，对新投入品的使用方式实际上与对已有投入品的使用方式一样，因而产量加倍。

- 第二个假定是：资本、劳动和知识以外的投入品是相对不重要的。
- 具体而言，该模型忽视了土地和其他自然资源 —— 广义的生产三要素(自然资源、人力资源、人造资源)之一。

生产要素的划分

- 广义　　　　　　狭 义
- 自然资源：　　土地、森林、矿山
- 人力资源：　　人的体力 —— 劳动、
- 　　　　　　　人的智力 —— 知识、
- 　　　　　　　　　　　　　企业家才能
- 人造资源：　　资本、厂房、机器、设备

《中宏》讲义，张延著。版权所有

- 如果自然资源是重要的，即存在自然资源的约束，那么资本和劳动加倍可能使产量少于加倍 —— 即规模报酬递减。
- 这也是马尔萨斯人口论、世界末日论、增长极限论的前提假定。
- 然而，实际上，自然资源的可得性对于增长似乎不是一个主要的约束。
- 因此，假定仅对资本和劳动规模报酬不变看来就是一个合理的近似。

- 4、规模报酬不变的假定使我们得以使用密集形式(*intensive form*)的生产函数。
- 在方程(1.2)中，令 $c = 1/AL$，得到：
- $F(K/AL, 1)$
- $= F(K, AL)\,1/AL$
- $= Y/AL \qquad (1.3)$

- 其中： K/AL —— 每单位有效劳动的平均资本量。
- $F(K, AL)/AL = Y/AL$ —— 每单位有效劳动的平均产量。
- 定义： $k = K/AL \quad y = Y/AL$
- $F(K/AL, 1) = Y/AL$

- 那么我们可将(1.3)写为：
- $y = F(k，1) = f(k) \qquad (1.4)$
- 也就是说，我们可以把每单位有效劳动的平均产量写成每单位有效劳动的平均资本量的函数。

- 密集的含义：把二元生产函数转化为一元生产函数，从三维立体空间转化到二维平面。
- 求证：如果 $F(K, AL)$ 是一次齐次，则 y 唯一地取决于 k。

- 为了解(1．4)背后的直观含义，考虑将经济分为*AL* 个小经济，每个小经济中有1单位有效劳动和*K*╱*AL*单位的资本。由于生产函数具有规模报酬不变的性质，每一小经济的产量是大的、未分割经济产量的*1*╱*AL*。
- 这样，每单位有效劳动的平均产量仅仅取决于每单位有效劳动的平均资本数量，不取决于经济的总规模。

- 这就是方程(1.4)以数学形式表现出来的东西。
- 如果我们想得到总产量，即与每单位有效劳动的平均产量对应的总产量，对该平均产量乘以有效劳动量即可：
- $Y = AL\,f(k)$

- 生产函数的一个具体例子是：柯布—道格拉斯(*Cobb — Douglas*)生产函数：
- $$F(K, AL) = K^{a}(AL)^{1-a}$$
- $$0 < a < 1 \quad (1.5)$$
- 这一生产函数易于应用，且似乎是对实际生产函数的一个好的初步近似。因此它很有用。

- (1)容易验证，该柯布一道格拉斯生产函数是规模报酬不变的。
- 对两投入品同乘以 c 得：
- $$F(cK, cAL) = (cK)^{a}(cAL)^{1-a}$$
- $$= c\,K^{a}(AL)^{1-a}$$
- $$= c\,F(K, AL) \qquad (1.6)$$

- (2) 对于柯布—道格拉斯生产函数而言，劳动增进型、资本增进型和希克斯中性的技术进步实质上是一样的。
- 要想使得技术进步为希克斯中性的，
- 只要定义$B = A^{1-a}$，就有：$Y = B K^{a} L^{1-a}$
- 要想使得技术进步为资本增进型的，
- 只要定义$B = A^{(1-a)/a}$，就有：$Y = (BK)^{a} L^{1-a}$

- **(3) 要得到该生产函数的密集形式，**
- 对两投入品同除以*AL*，得到：
- $y = F(K, AL) / AL$
- $= K^{a}(AL)^{1-a} / AL$
- $= (K / AL)^{a}$
- $= k^{a}$
- $y = k^{a} = f(k)$

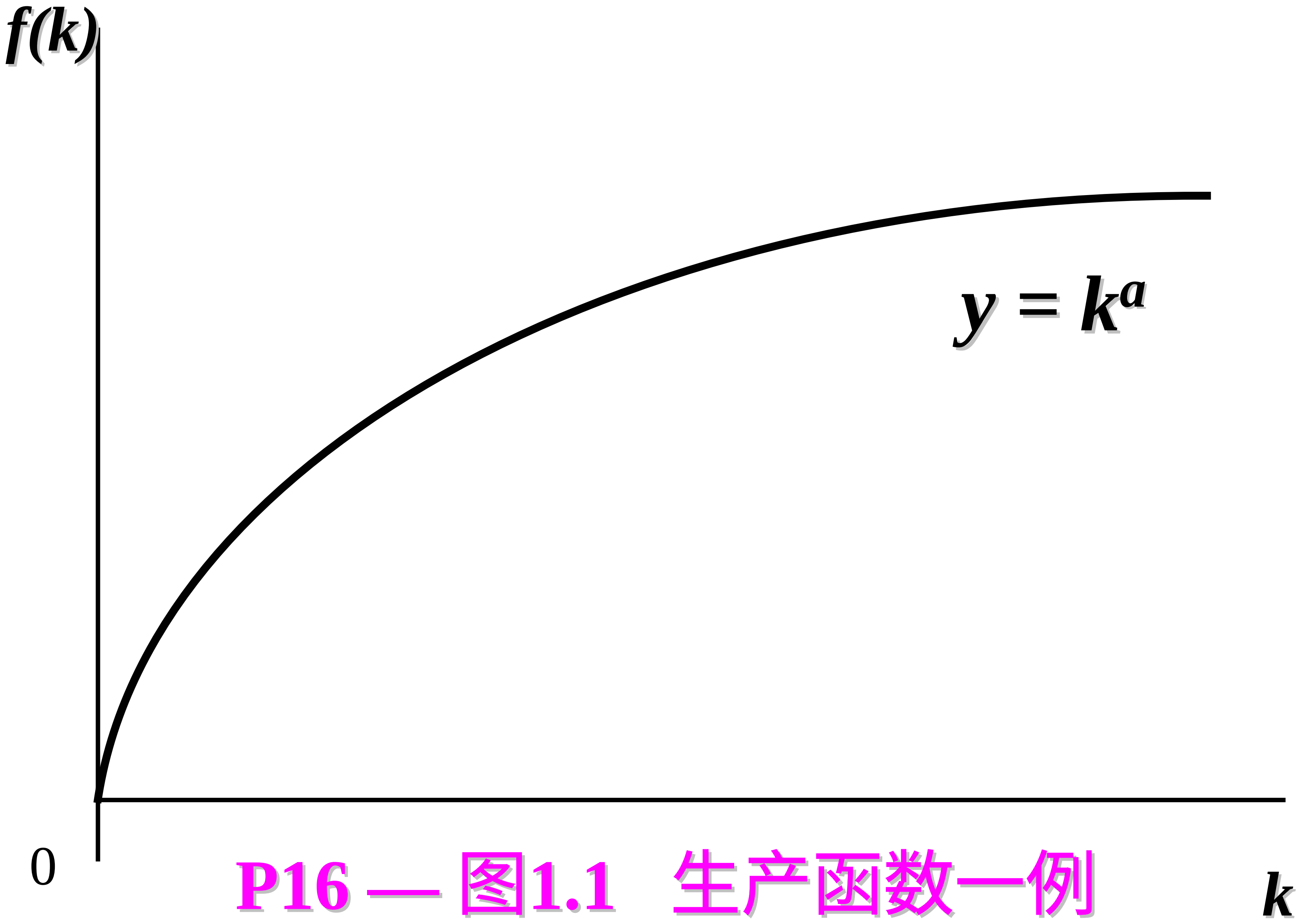
- 对于一个显形的生产函数可以看

到以下特征：

- $f'(k) = ak^{a-1} > 0$
- ——→ $f(k)$ 单调上升。

- $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$，
- 当k 趋于0 时，$f'(k)$ 趋于无穷大
- ——→ $f(k)$ 在原点垂直。
- $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$，
- 当k 趋于无穷大时，$f'(k)$ 趋于0
- —→ $f(k)$在 k 趋于无穷大时水平 。

- $f''(k) = -a(1-a)k^{a-2} < 0$
- ——→ $f(k)$以 递减的速率单调上升
- ——→ $f(k)$凹向原点。



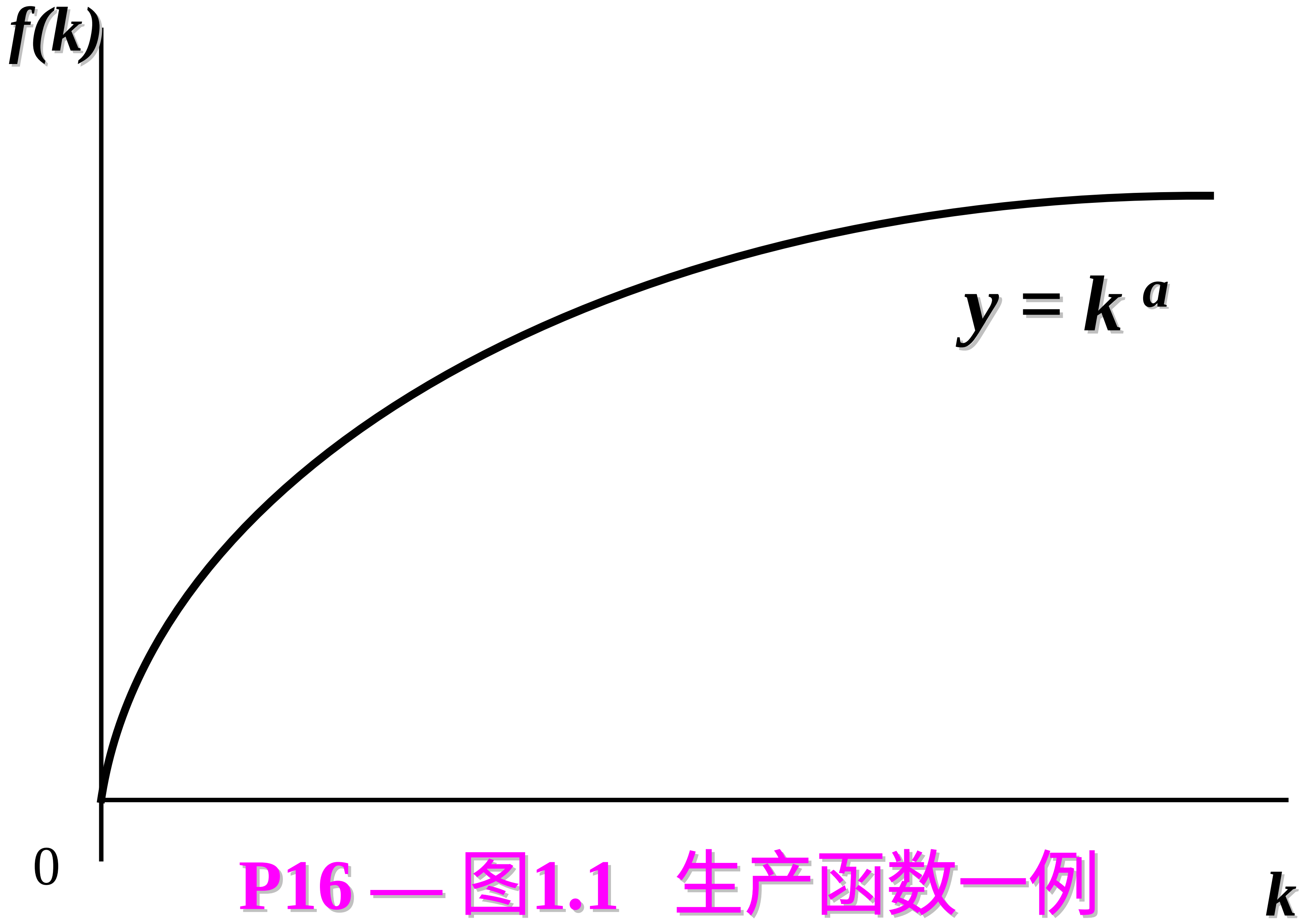
P16 — 图1.1 生产函数一例

- 5、假定密集形式的生产函数 $f(k)$ 满足
- (1) $f(0) = 0$
- ——→ $f(k)$ 从原点出发。
- (2) $f'(k) > 0$
- ——→ $f(k)$ 单调上升。
- (3) $f''(k) < 0$
- ——→ $f(k)$ 以递减的速率单调上升
- ——→ $f(k)$ 凹向原点。

- (4) 稻田条件(*Inada*，1964)：
- $\lim_{k\to 0} f'(k)=\infty$，
- 当 k 趋于0 时，$f'(k)$ 趋于无穷大
- ——→ $f(k)$ 在原点垂直。
- $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$，
- 当 k 趋于无穷大时，$f'(k)$ 趋于0
- ——→ $f(k)$ 在 k 趋于无穷大时水平

- 它们比论述该模型的核心观点所需要的条件要强一些，规定了$f(k)$ 的起点，终点可由(2)、(3)描述。
- 稻田条件的经济含义：当资本存量足够小时，资本的边际产品很大；而当资本存量变得很大时，资本的边际产品变得很小。
- 资本的边际产量递减规律

- 稻田条件的作用是：
- 保证经济的路径不发散 —— 对经济均衡的存在性、稳定性至关重要。
- 图 1.1 所示为一个满足：$f'(\cdot) > 0$，$f''(\cdot) < 0$，和稻田条件的生产函数。



P16 — 图1.1 生产函数一例

- **6、对*A* 进入生产函数的这种设定方式，与该模型的其他假定一起，将意味着资本 — 产量比 *K*／*Y* 最终将稳定下来。**
- 实际上，就较长期限来看，资本 — 产量比并未表现出任何明显的向上或向下的趋势。

- 另外，在建立模型时，若能使这一比例最终不变，将使得分析远为简单。
- $K/Y = (K/AL)/(Y/AL)$
- $= k/y = k/f(k) = 1/v$
- $v = f(k)/k = Y/K$

- 二、关于各种投入品的假定：
- 该模型的其余假定涉及劳动、知识和资本三个存量随时间如何变动。
- 在该模型中，时间是连续的；也就是说，该模型中的各个变量均定义于每一时点上。
- 另一形式为离散时间，此时诸变量仅在特定日期(通常 $t = 0$、1、2、)有定义。

- 在选择连续时间还是离散时间时，常常依据方便性。比如，索洛模型在离散时间下的含意实质上与连续时间时相同，但在连续时间下更易于分析。

- 索洛模型的核心假定涉及生产函数的性质和三种生产投入品(资本、劳动和知识)随时间的变动。我们依次讨论它们。

- 资本、劳动和知识的初始水平被看作是既定的。
- 1、劳动(外生变量)以不变的速度增长
- $L^{\cdot}(t) / L(t) = n$ 或者
- $L^{\cdot}(t) = n L(t)$ (1.8)
- 一个变量上加一点表示其对时间的导数，即：$X^{\cdot}(t) = d X(t) / dt$ 的简写。

- 为证实这一点，注意：
- $L(t) = L(0)e^{nt}$，意味着：
- $L^{\cdot}(t) = L(0)e^{nt}\,n = n\,L(t)$，
- 且L 的初始值为：$L(0)e^{0} = L(0)$ 为既

定的常数。

- 2、知识(外生变量)以不变的速度增长
- $A^{\cdot}(t) / A(t) = g$ 或者
- $A^{\cdot}(t) = g A(t) \qquad (1.9)$
- 其中，n 和 g 为外生参数，方程(1.8)

和(1.9)意味着 L 和 A 是指数增长。

- $A^{\cdot}(t) = g\,A(t) \qquad (1.9)$
- 为证实这一点，注意：
- $A(t) = A(0)e^{gt}$，意味着：
- $A^{\cdot}(t) = A(0)e^{gt}\,g = g\,A(t)$
- 且A 的初始值为：$A(0)e^{0} = A(0)$ 为

既定的常数。

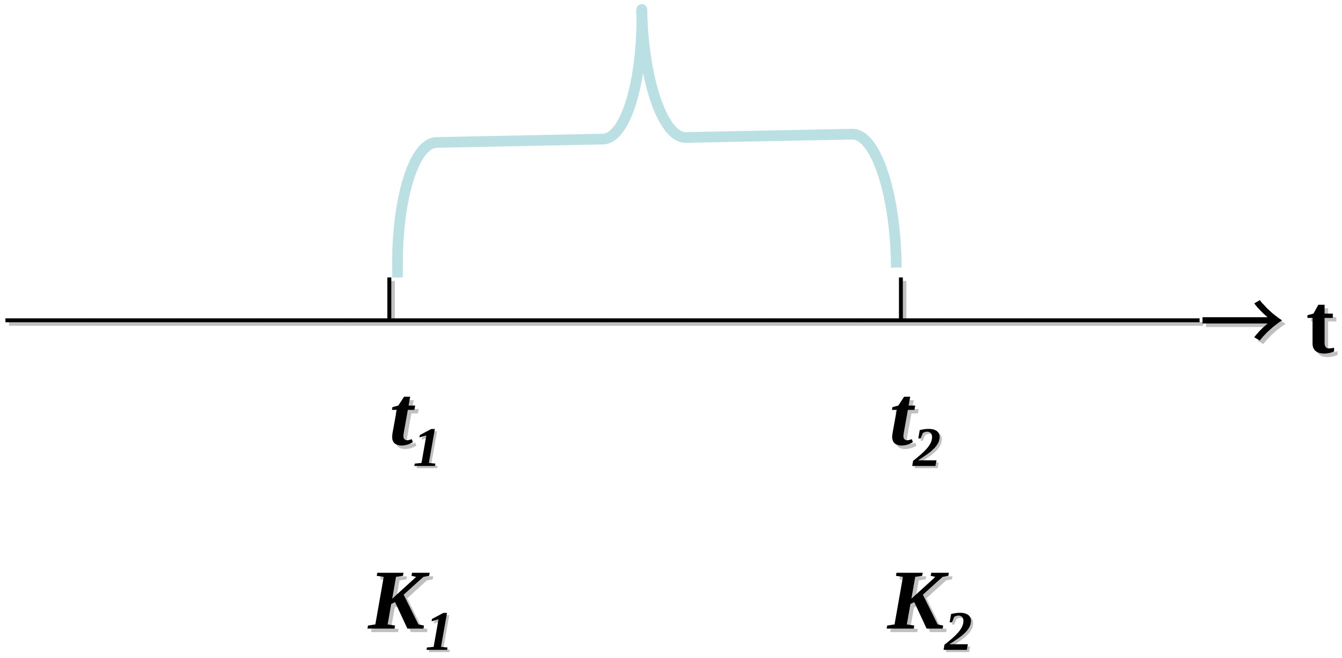
- 3、资本(内生变量)取决于产量水平
- 产量中用于投资的比例s是外生的和不变的。用于投资的一单位产品产生一单位新资本。另外，现存资本的折旧率为δ。这样，
- $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \quad (1.10)$

投资与储蓄：

- 从投资看：
- 总投资 = 净投资 + 重置投资
- 净投资 = $K^{\cdot}(t) = dK(t) \,/\, dt$
- $= (K_2 - K_1) \,/\, (t_2 - t_1)$

《中宏》讲义，张延著。版权所有

- 净投资是流量。流量是在一定时期内变量变动的数值。



- 重置投资 = 折旧 = $\delta K(t)$
- 重置投资是存量。存量是在某一时点上存在的变量的数值。
- K
- $\longrightarrow$ t
- t
- 总投资 = 净投资 + 重置投资
- $= \dot{K}(t) + \delta K(t)$

- 从储蓄看：
- 短期储蓄函数：$S = -C_0 + sY$
- (无政府 $Y = Yd$)
- 长期储蓄函数：$S = sY$
- (无政府 $Y = Yd$)
- 储蓄转化为投资： $S = I \quad \longrightarrow$
- $sY = \dot{K}(t) + \delta K(t)$

- 尽管对n、g、δ没有单独给予约束，但三者之和被假定为正(保证持平投资曲线是单调上升的)。
- 这就完成了对该模型的描述。

- 三、简评
- 由于这是我们将遇到的第一个模型，这种模型有许多，故对建模应有一点儿一般性评论。
- 索洛模型被以多种方式简化过。这里仅给出几个例子：只有一种产品；没有政府；就业的波动被忽略；用一个只有三种投入品的总量生产函数描述生产过程；储蓄率、折旧率、人口增长率和技术进步率均不变。

《中宏》讲义，张延著。版权所有

- 自然可以认为该模型的这些特征是其缺点：该模型忽视了这个世界的许多明显特征，对于增长而言，其中某些特征肯定是重要的。
- 但一个模型的目的不是接近现实。归根到底，我们已经拥有一个完全现实的模型——这个世界本身。但这一“ 模型 ”的问题是它大复杂，复杂得难以理解。一个模型的目的在于为理解这个世界的特定特征提供见解。

- 如果一个简化性假定使得一个模型对所探讨的问题给出了不正确的答案，那么缺乏现实性可能是一个缺点(即使在这种情况下，这种简化也可能是一个有用的参照点，因为它在一个理想情境中明确展现了这个世界的这些特征的后果)。

- 然而，如果这种简化并未使得该模型对所探讨的问题给出不正确的答案，那么缺乏现实性是一个优点：通过更为清楚地隔离所关注的效应，这种简化使得问题更易于理解。

- 世界是复杂的，用复杂的理论去解释世界的机会是零。而简单的理论要经过复杂的蹂躏。
- —————— 张五常

- # 9.3 索洛模型的动态学

- 动态学 —— 就是考虑变量（k）随着时间的变动有无趋向均衡的趋势？均衡是否存在？是否稳定？在均衡的路径上存在哪些经济现象？

- 一、*k* 的动态学 —— 均衡的存在性
- 1、均衡的定义
- 三种投入品中的两个，即劳动和知识的变动是外生的。这样，为描述该经济的行为特征，我们必须分析第三个投入品即资本的行为。

- （1）求均衡解的方法之一 —— 链式法
- 由于经济可能随时间增长，那么着重考虑每单位有效劳动的平均资本存量k 而非未经调整的资本存量K 就较为方便了。
- 由于$k = K/AL$，用链式法则可得。链式法即，由于k是K、L和A的一个函数，其中每一个又是t的函数，那么存在：

$\because \quad t \longrightarrow A、K、L \longrightarrow k$

- $\therefore\ \partial k / \partial t = (\partial k / \partial K)(dK / dt)$ +
- $(\partial k / \partial L)(dL / dt)$ +
- $(\partial k / \partial A)(dA / dt)$
- —— 隐函数求导法
- $k^{\cdot} = (\partial k / \partial K) K^{\cdot} + (\partial k / \partial L) L^{\cdot}$
- $+ (\partial k / \partial A) A^{\cdot}$ —— 链式法则

- （2）求均衡解的方法之二 —— 定式法
- ∵ $k = K / AL$
- ∴ 两边取 ln，得到：$\ln k = \ln K - \ln L - \ln A$
- 两边对 t 求导，得到：
- $(1/k)(dk/dt)$
- $= (1/K)(dK/dt) - (1/L)(dL/dt)$
- $- (1/A)(dA/dt)$
- 即：$\dot{k}/k = \dot{K}/K - \dot{L}/L - \dot{A}/A$

- 一个变量的增长率指的是其变动率：
- $X^{\cdot} / X$。易于证实：
- 两变量之积的增长率等于其增长率之和 —— 定式1
- $(X_1 X_2)^{\cdot} / (X_1 X_2)$
- $= X_1^{\cdot} / X_1 + X_2^{\cdot} / X_2$

- 两个变量之比的增长率等于其增长率之差 —— 定式 2

- $$\dot{(X_1/X_2)}/(X_1/X_2)$$

- $$= \dot{X_1}/X_1 - \dot{X_2}/X_2$$

- 根据已知条件：$\dot{K} = sY - \delta K$
- $\dot{L} / L = n$ ； $\dot{A} / A = g$
- $\dot{k} / k = \dot{K} / K - \dot{L} / L - \dot{A} / A$
- $= (sY - \delta K) / K - n - g$
- $= sY / K - \delta - n - g$

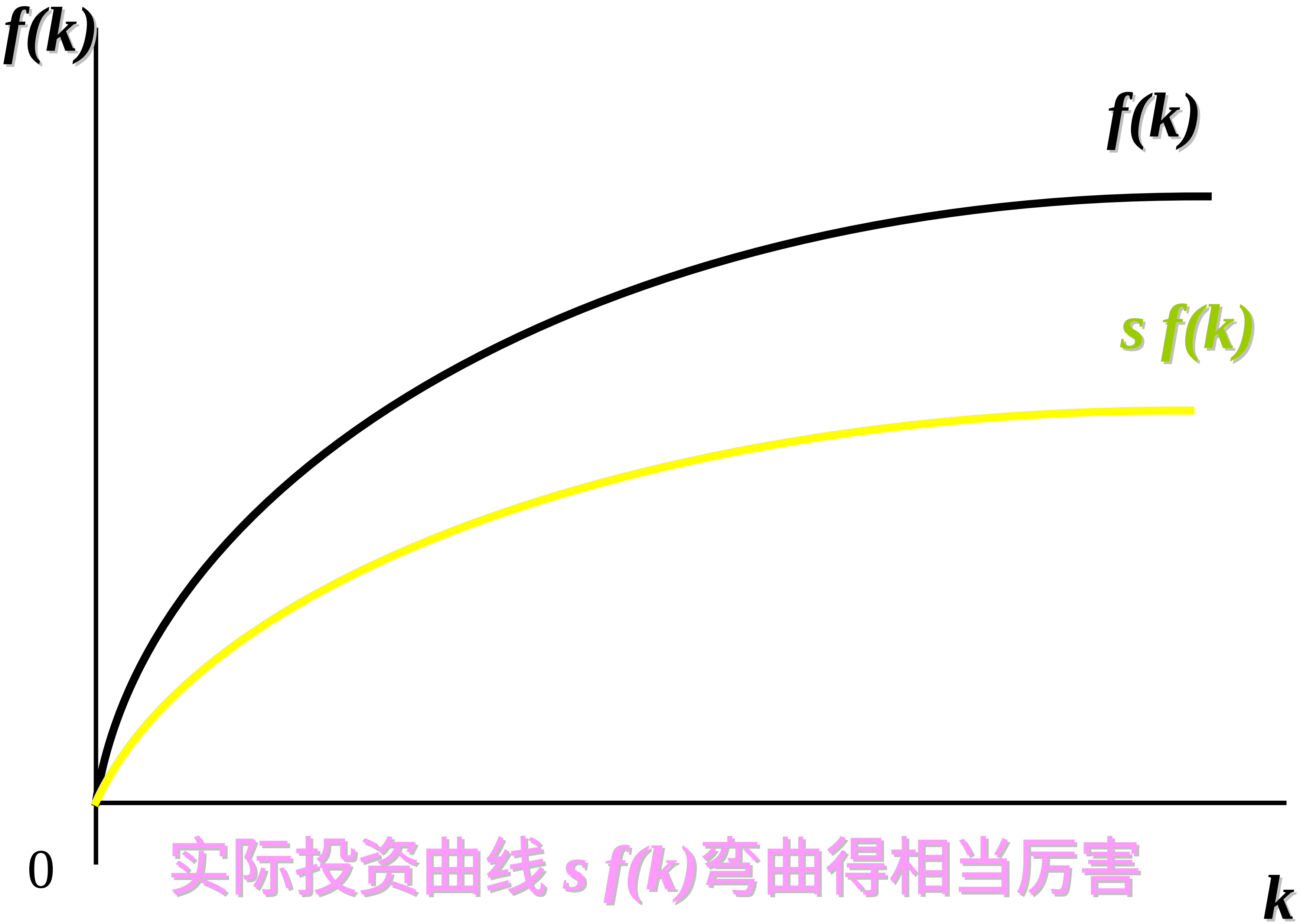
- $\dot{k} = (sY/K - \delta - n - g)\,k$
- $\quad = [s(Y/AL)/(K/AL)]\,k$
- $\quad - (n + g + \delta)k$
- $\quad = [sy/k]\,k - (n + g + \delta)\,k$
- $\quad = s\,f(k) - (n + g + \delta)\,k$

- 根据均衡的定义，均衡是对立的、变动着的经济变量处于一种力量相当、相对静止、不再变动的境界。均衡是一种不再变动的境界。
- 如果均衡存在，应该有：
- $\dot{k} = dk/dt = 0$
- $\dot{k} = s\,f(k) - (n+g+\delta)k = 0 \qquad (1.13)$
- 方程(1.13)是索洛模型的关键方程。

- 是否必定存在一个 k 满足方程(1.13)
- $s f(k) - (n+g+\delta)k = 0$
- 以Cobb — Douglas 生产函数为例：
- $f(k)= k^{a} \qquad 0 < a < 1$
- 很难判断：
- $s k^{a} - (n+g+\delta)k = 0$ 是否一定有解。

- **2、均衡的存在性**
- 怎么办？把方程(1.13)变形为：
- $$s\,f(k) = (n + g + \delta)k$$
- 方程两边都是k 的函数，分别从等式的两边看：

- 左边 = $s\,f(k)$，$f(k)$是k 的函数，满足 $f'(k)>0$，$f''(k)<0$ 和稻田条件。
- s 为一个固定的常数，则 $s\,f(k)$也是k 的函数，并且是一条满足 $s\,f'(k)>0$，$s\,f''(k)<0$ 和稻田条件的曲线。

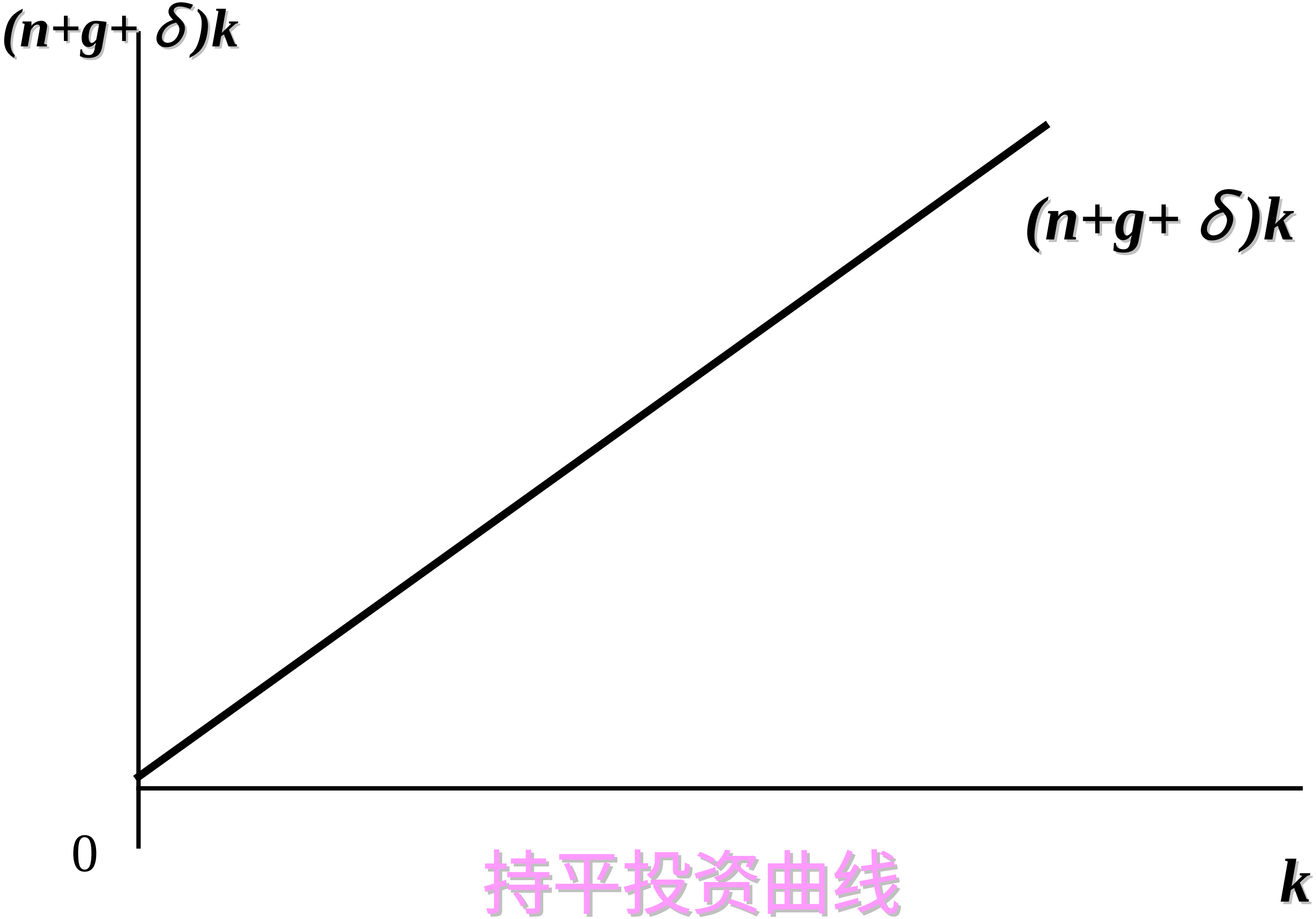


实际投资曲线 $s\ f(k)$ 弯曲得相当厉害

（变得更加平坦）

- 右边 = $(n+g+\delta)k$ 也是 k 的函数
- ∵ 根据前提假设：$n+g+\delta>0$
- ∴ $(n+g+\delta)k$ 是一条斜率为：$(n+g+\delta)$，

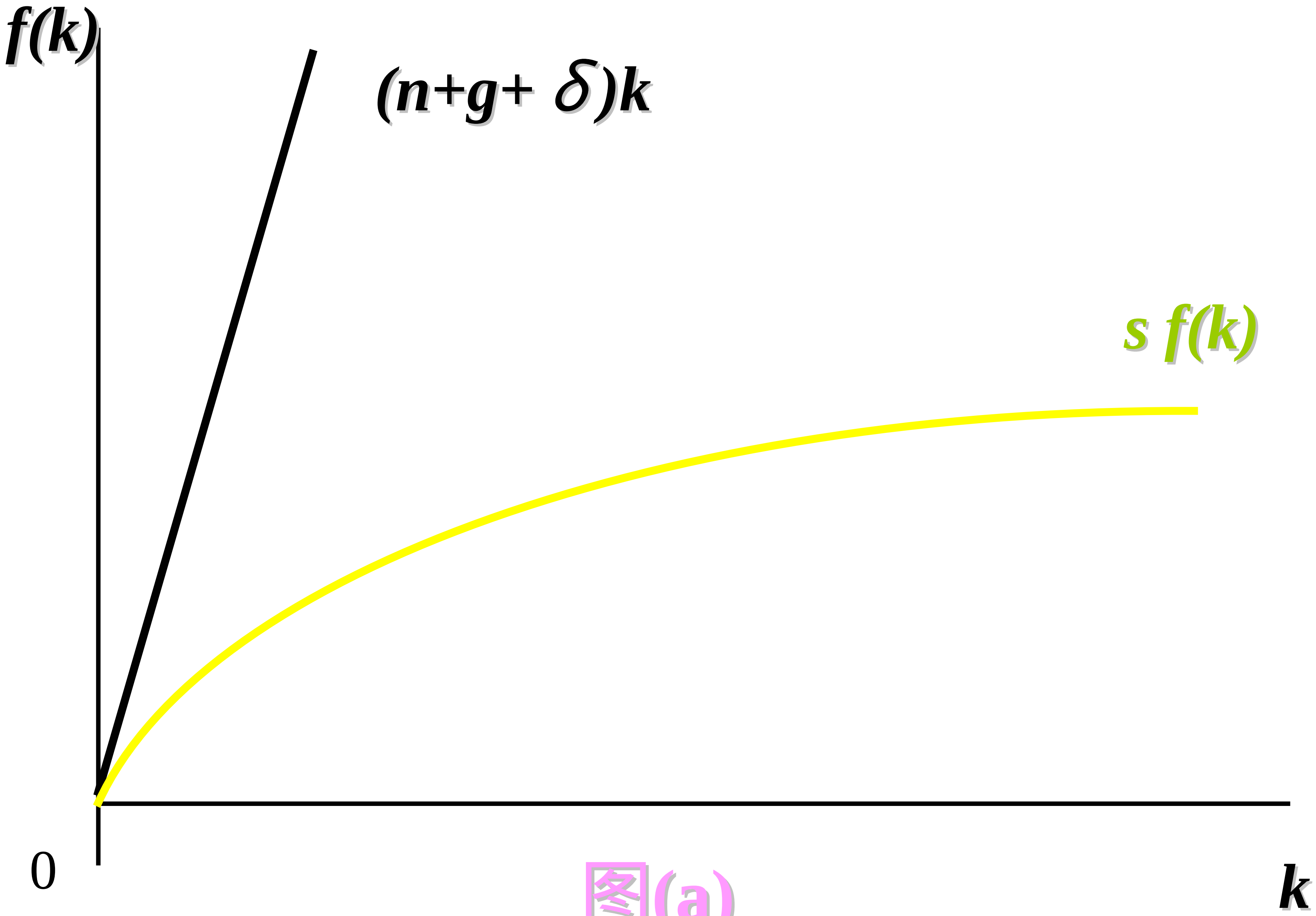
单调上升的直线。



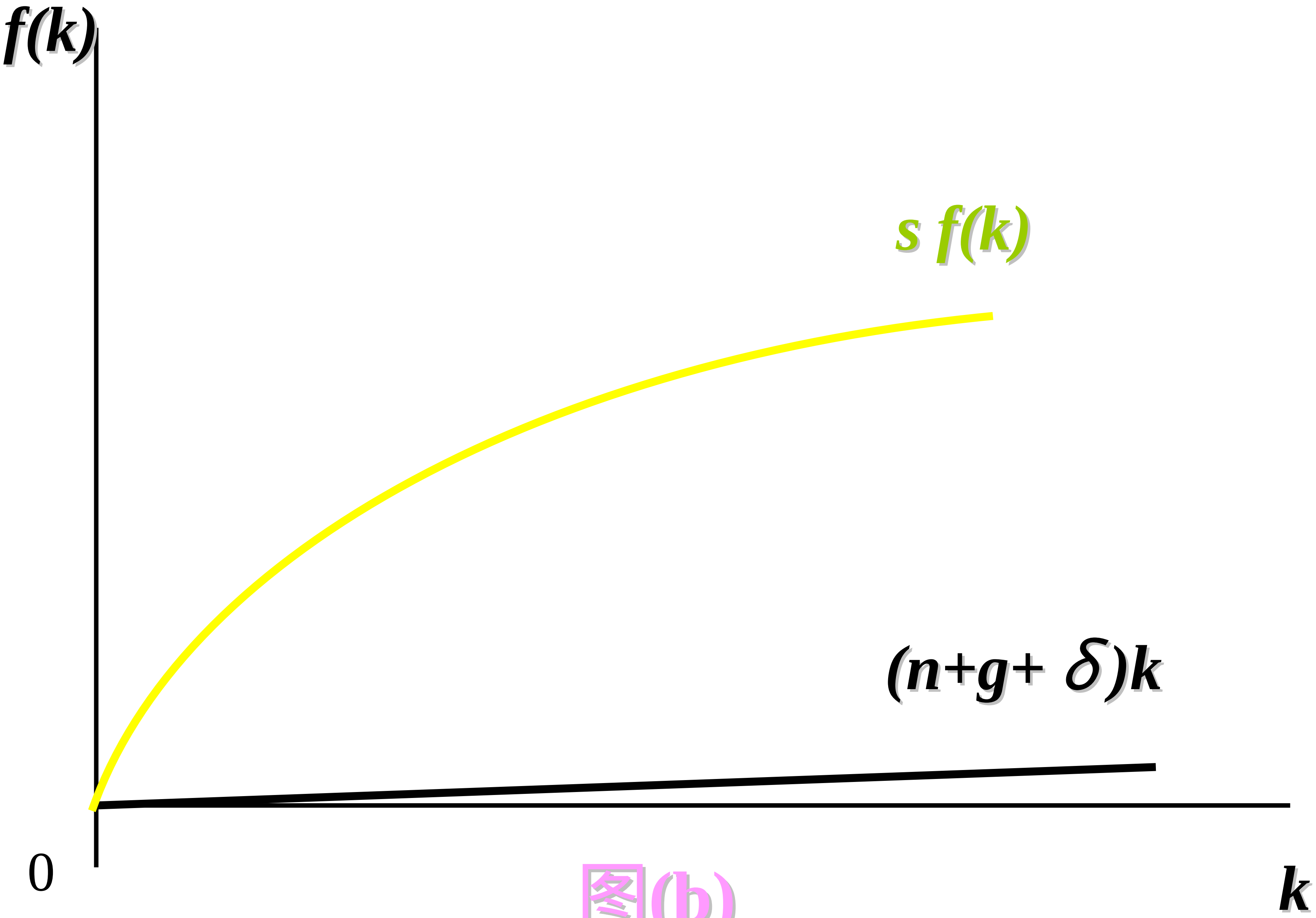
持平投资曲线

《中宏》讲义，张延著。版权所有

- 由于$f(0)=0$，因此，当$k=0$时，在原点，曲线 $s\,f(k)$ 和直线$(n+g+\delta)k$ 一定有交点 —— 视为特例。
- 除原点以外，随着k 的增长，即：$k>0$ 时，曲线$s\,f(k)$和直线$(n+g+\delta)k$ 是否一定有交点？有无可能出现以下情况：



图(a)



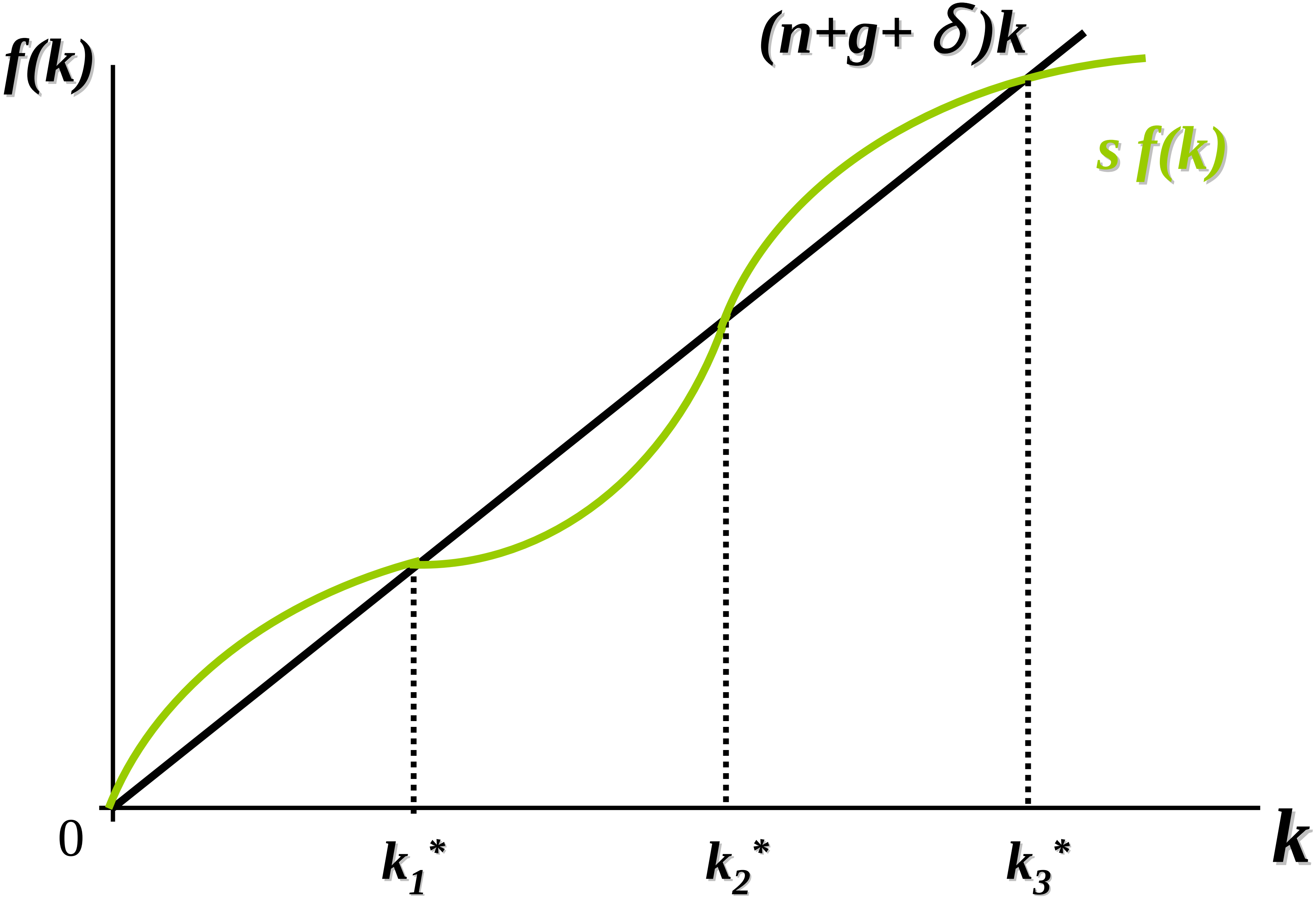
图(b)

- 根据稻田条件：
- (1) $\lim_{k\to 0} s f'(k) = \infty$，
- 当k趋于0 时，$s f'(k)$ 趋于无穷大
- ⟶ $s f(k)$在原点垂直
- ⟶ $s f'(k) > (n+g+\delta)$
- ⟶ 曲线 $s f(k)$比直线$(n+g+\delta)k$ 陡峭 。
- 在开始的时候，如果满足：$k > 0$ 不会出现图(a)的情况。

- (2) $\lim_{k\to\infty} s f'(k) = 0$ ，
- 当k 趋于无穷大时， $s f'(k)$ 趋于0
- ——→ $s f(k)$ 在k 趋于无穷大时水平
- ——→ $s f'(k) < (n+g+\delta)$
- ——→ 曲线 $s f(k)$比直线$(n+g+\delta)k$ 平坦 。
- 最后，在k 趋于无穷大时，不会出现图(b)的情况。

- ∴　开始的时候，曲线 $s\,f(k)$先比直线 $(n+g+\delta)k$ 陡峭，然后随着k 的上升，曲线 $s\,f(k)$逐渐变得比直线$(n+g+\delta)k$平坦 —→ 这两条线最终肯定会相交 —→ 必定存在一个交点。

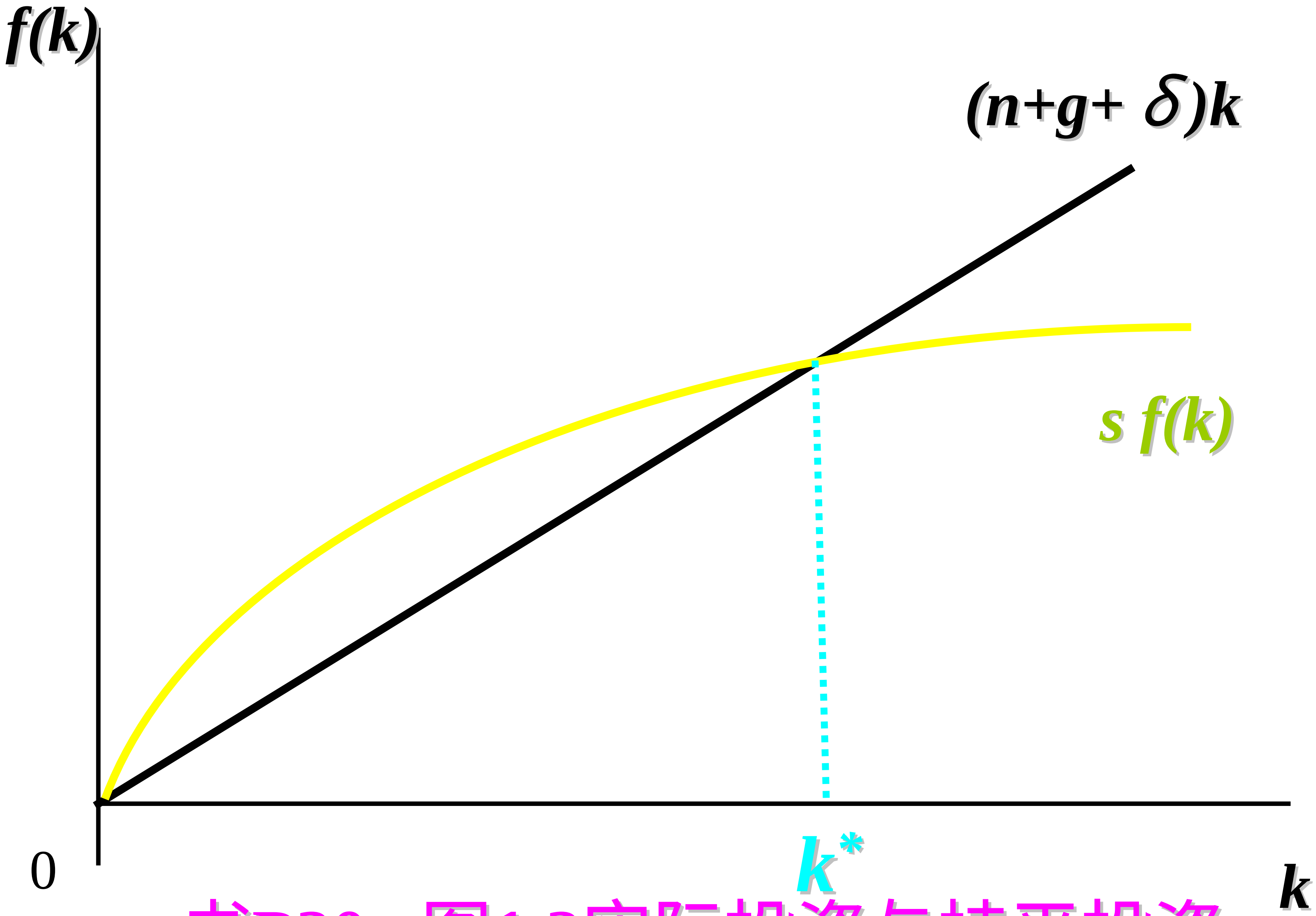
- 最后，$f''(k) < 0$，意味着： $s f(k)$ 不会从以递减的速率上升，变成以递增的速率上升，不会从抛物线式上升，变成火箭式上升，在$k > 0$ 时，这两条线只相交一次。



• 图2.13 $s\,f(k)$ 和 k 间关系的多种可能

- 我们用k^*表示当两条线相交时的k值，满足方程(1.13)，即：

- $$s\,f(k^*) = (n+g+\delta)\,k^*$$



书P20 图1.2实际投资与持平投资

- 3、均衡点的经济含义
- $k^{\cdot} = s\, f(k^*) - (n+g+\delta)k^* = 0$ (1.13)
- 它表明，每单位有效劳动的平均资本存量的变动率是两项之差。
- 第一项$s\,f(k)$是每单位有效劳动的平均实际投资：每单位有效劳动的平均产量为$f(k)$，该产量中用于投资的比例为s。

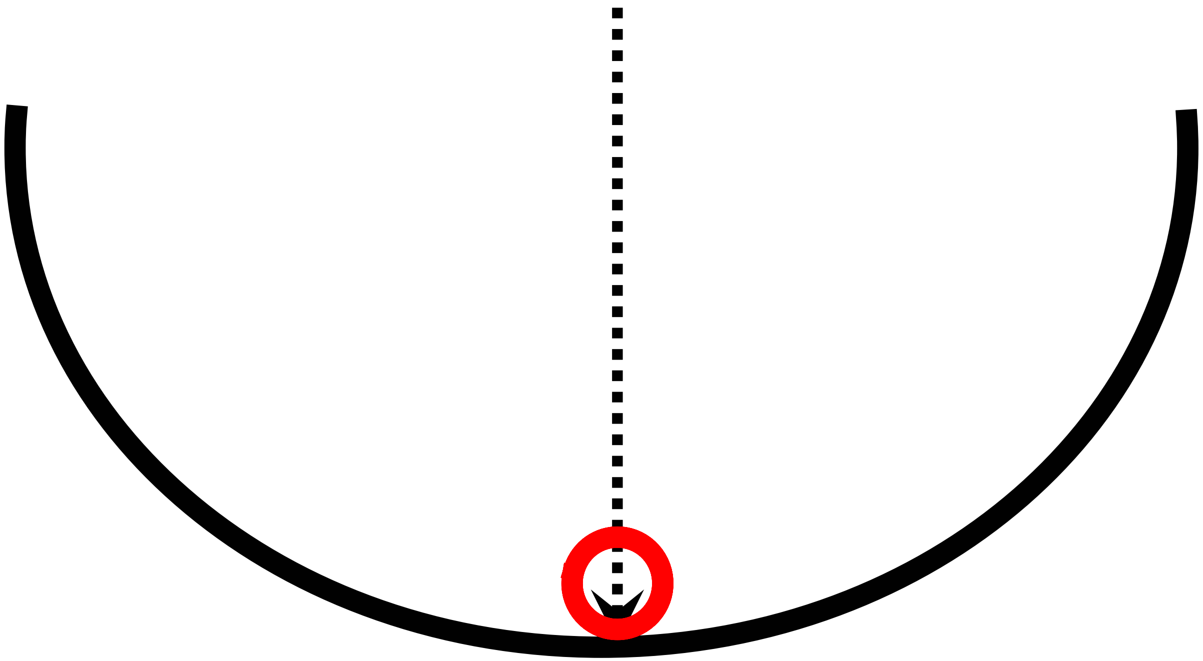
- 第二项$(n+g+\delta)k$ 是持平投资(*break - even investment*)，即使得k保持在其现有水平上所必须的投资量。为防止k下降，必须进行一些投资。其原因有二。
- 第一，现有资本有折旧；这一部分资本必须予以补足以防止资本存量下降。这就是(1.13)中的 δk 项。

- 第二，有效劳动的数量是增长的。这样，恰好足以使得资本存量(K)不变的投资并不足以保持每单位有效劳动的平均资本存量(k)不变。相反，由于有效劳动的数量以 $n+g$ 增长，资本存量也必须以$n+g$ 增长以保持k 稳定。这是(1.13)中的$(n+g)k$ 项。

- 二、k的动态学 —— 均衡的稳定性

- 不管k 从何处开始，它是否都在向k^*收敛？ 均衡k^*是否稳定，一旦偏离k^*是否有力量使之回复均衡？经济学中只对稳定性均衡感兴趣。—— 可重复发生的、有规律性的事情。非稳定性均衡意味着可遇不可求的事情

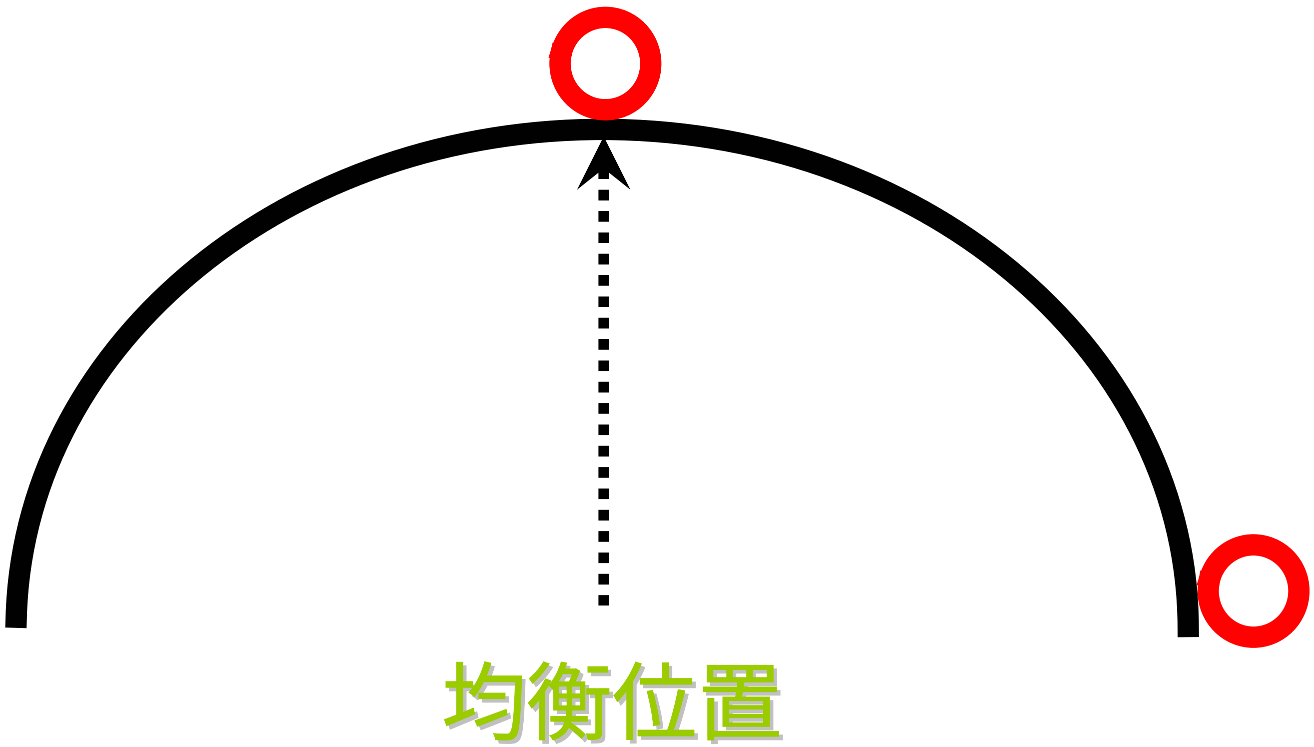
均衡位置



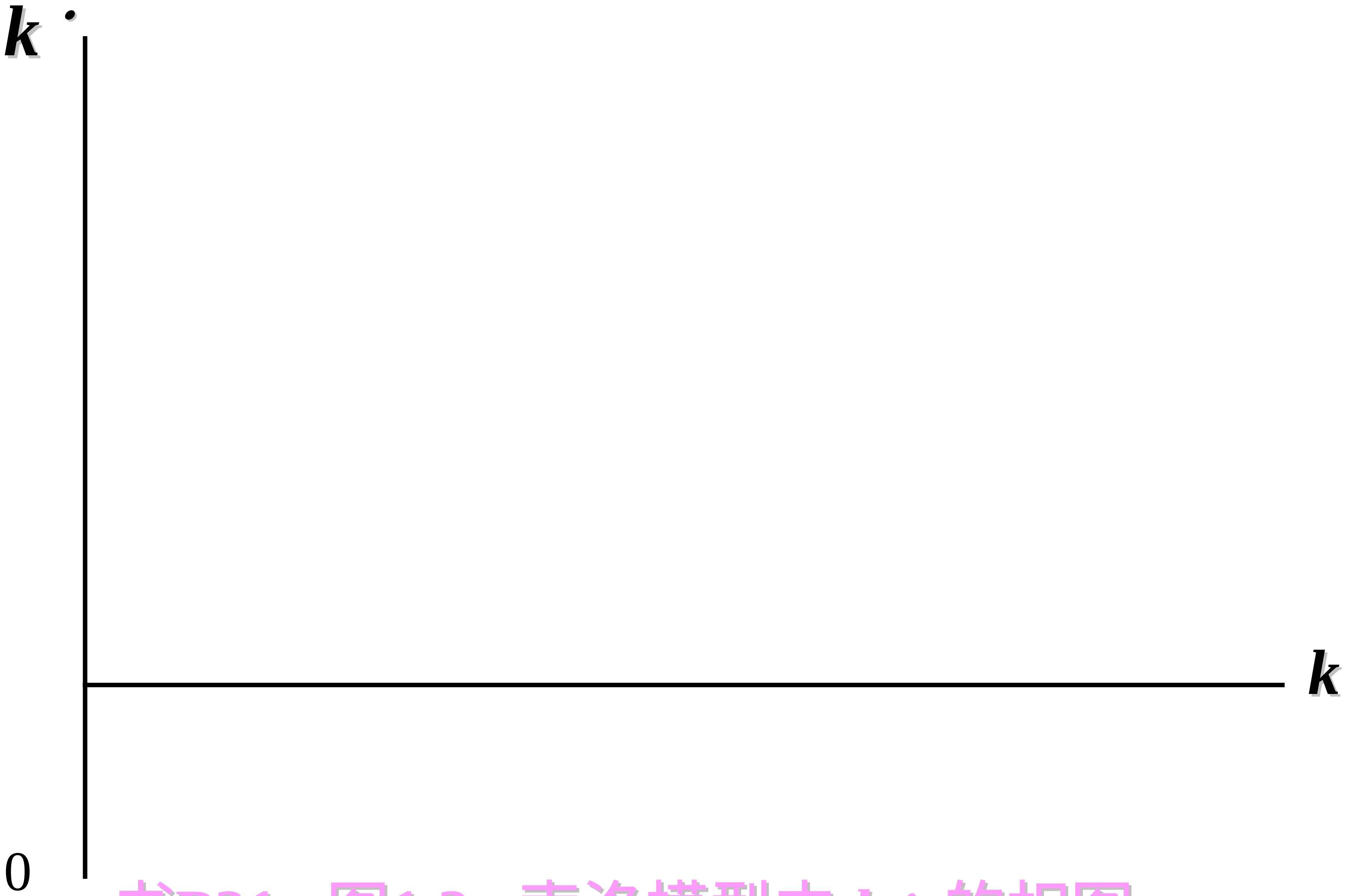
稳定性均衡：可重复出现、具有规律性的状态

非稳定性均衡：

可遇不可求的、没有规律的状态。



- ∵方程(1.13)是索洛模型的关键方程
- $\dot{k} = s\,f(k) - (n+g+\delta)k = 0 \quad (1.13)$
- ∴ $\dot{k}$是k的函数，$\dot{k} = \phi(k)$
- 我们可以画出 $\dot{k}$ 随 k 变化的相图。



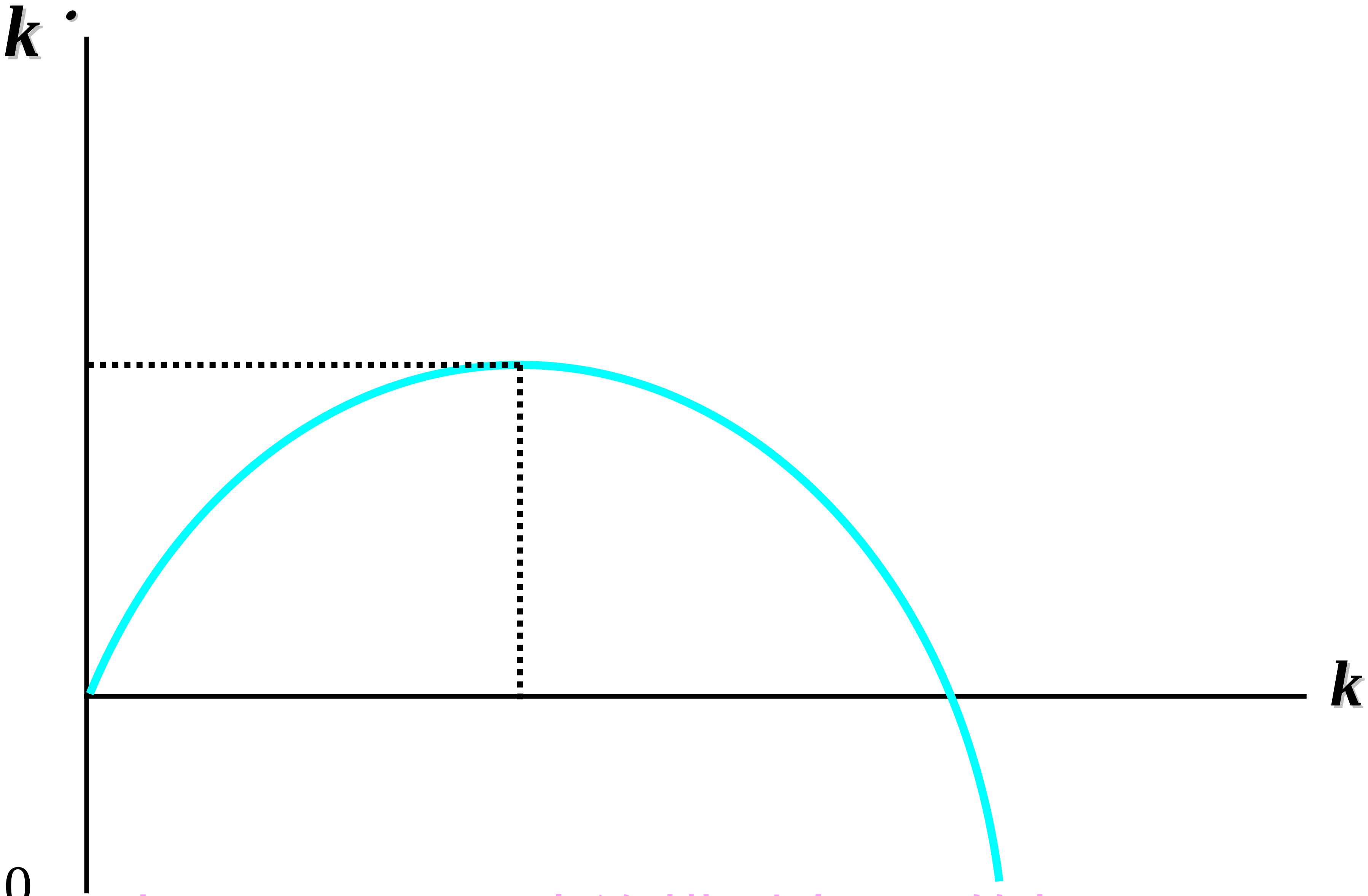
书P21 图1.3 索洛模型中 $\dot{k}$ 的相图

- 1、一阶导 $d\dot{k}/dk$ 决定 $\dot{k}$ 的单调性
- $d\dot{k}/dk = sf'(k) - (n+g+\delta)$
- 一阶导 $d\dot{k}/dk$ 的变化分三种情况讨论：
- 如果 $d\dot{k}/dk$
- $= sf'(k) - (n+g+\delta) > 0$
- $\longrightarrow \dot{k}$ 随 $k\uparrow$ 而单调上升。

- 如果$dk^{\cdot}/dk$
- $= s f'(k) - (n+g+\delta) = 0$
- ——→$k^{\cdot}$ 达到极值。
- 如果 $dk^{\cdot}/dk$
- $= s f'(k) - (n+g+\delta) < 0$
- ——→$k^{\cdot}$ 随 k ↑而单调下降。

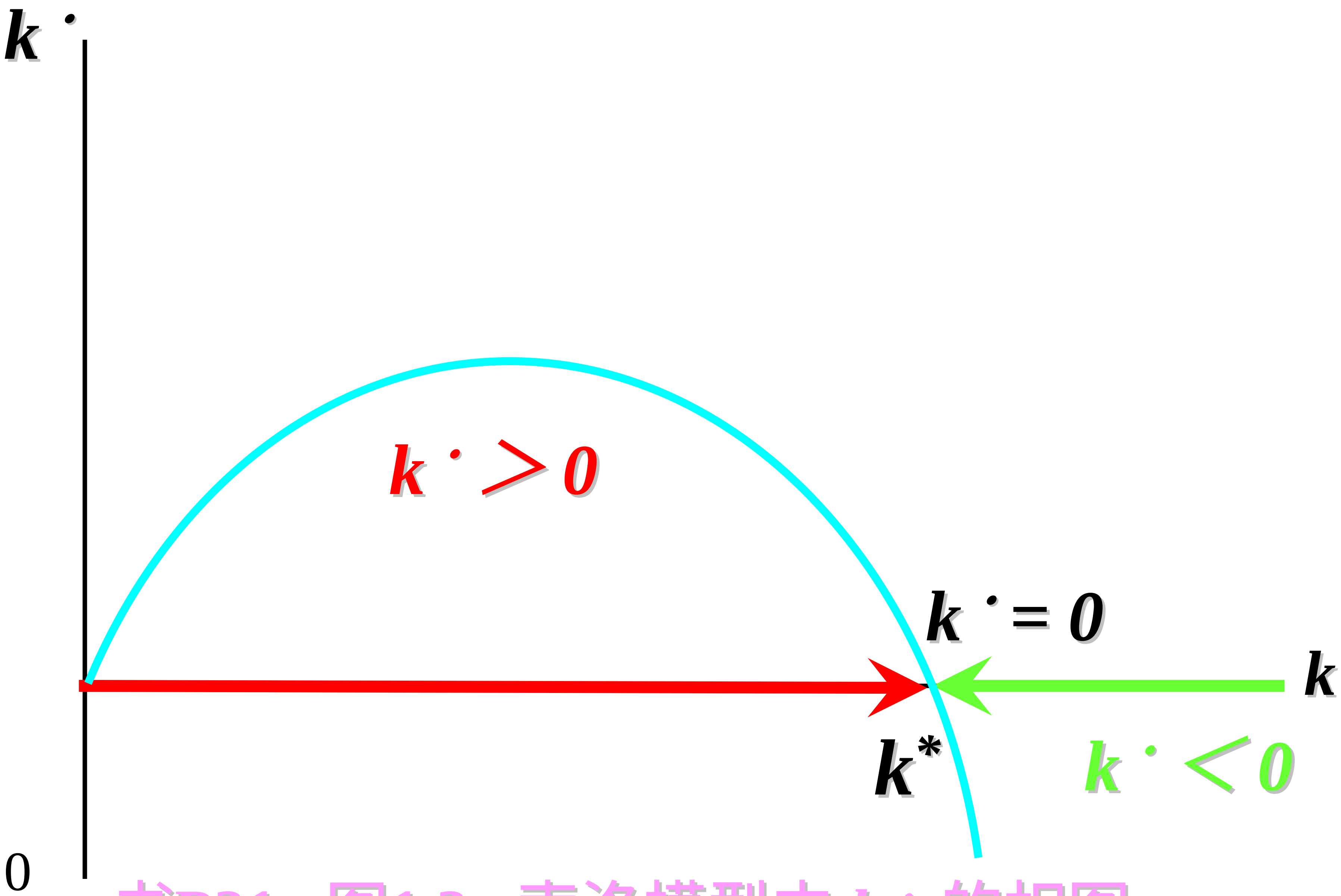
《中宏》讲义，张延著。版权所有

- 2、二阶导 $d^2 \dot{k} ／ dk^2$ 决定 $\dot{k}$ 的凹凸性
- $d^2 \dot{k} ／ dk^2 = s f''(k) < 0$
- ⟶ $\dot{k}$ 以递减的速率单调上升
- ⟶ $\dot{k}$ 随 k ↑而凹向原点。



书P21　图1.3　索洛模型中 $\dot{k}$ 的相图

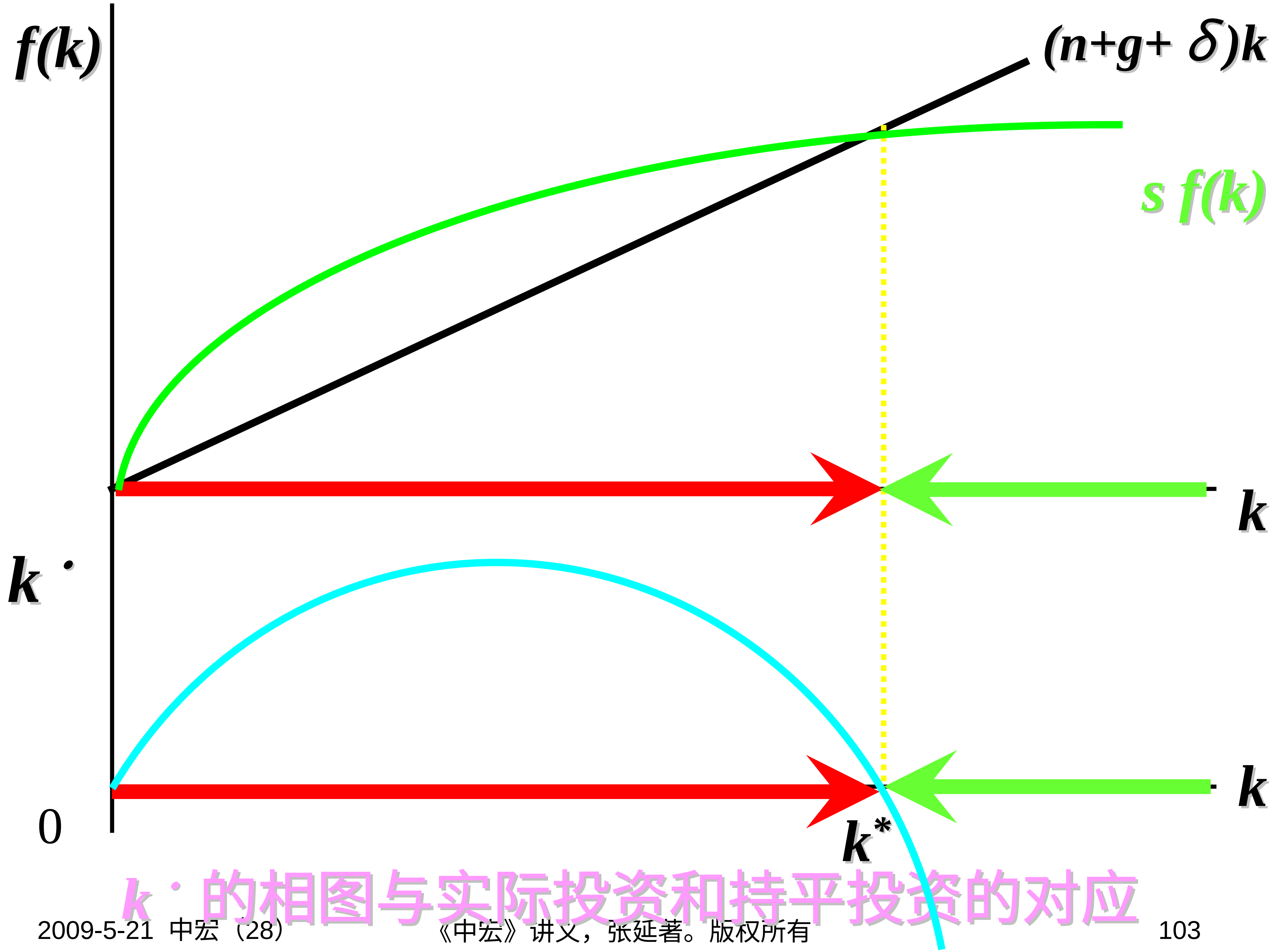
- 图1.3以相图的形式对此作了总结。在相图中，$\dot{k}$ 被表示为k 的一个函数。
- ∵ 存在一个k ，使得：
- $\dot{k} = \phi(k) = 0$
- ∴ 定义使得 $\dot{k} = \phi(k) = 0$ 的 k 为 k^*
- 可能存在三种情况：



书P21　图1.3　索洛模型中 $\dot{k}$ 的相图

- (1) 如果 k 最初小于k^*， $k_1 < k^*$
- 从相图可见，在k^* 以左的k_1 存在：
- $\dot{k} > 0$
- 其数学含义为：k_1 不稳定，还要继续增长，向k^* 趋近。

- 并且：
- $k^{\cdot} = s\,f(k_1) - (n+g+\delta)k_1 > 0$
- $s\,f(k_1) > (n+g+\delta)k_1$
- 经济含义：
- 如果每单位有效劳动的平均实际投资大于所需的持平投资，则*k* 上升。



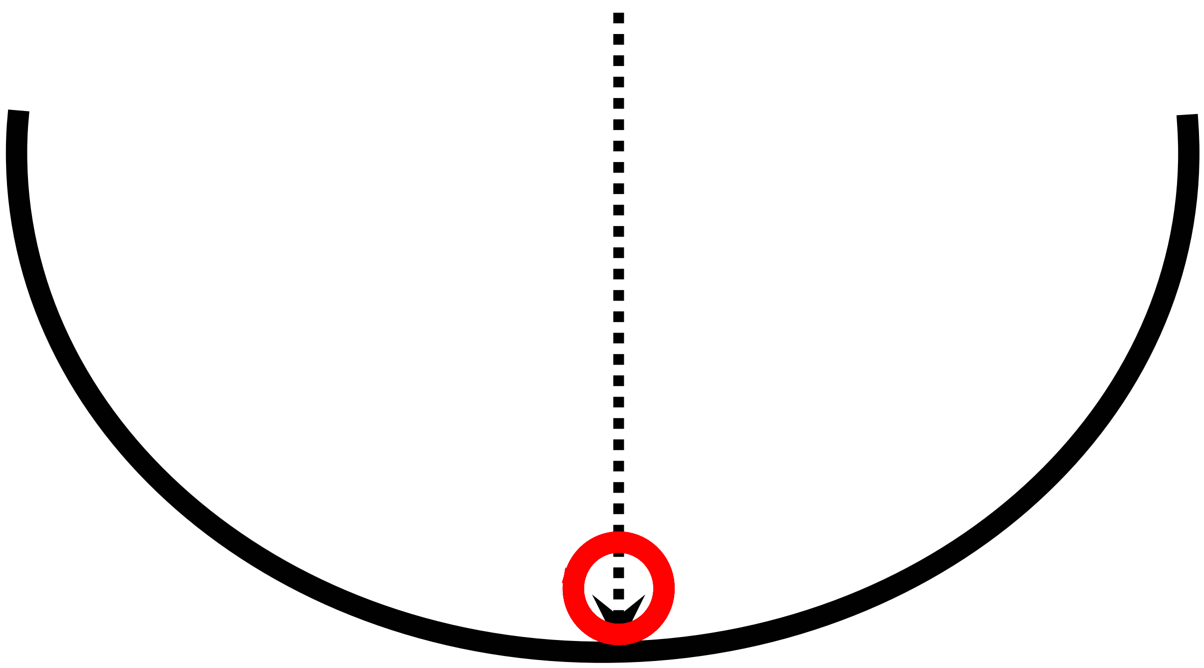
k ·的相图与实际投资和持平投资的对应

- (2) 如果k 最初大于k^*， $k_2 > k^*$
- 从相图可见，在k^*以右的k_2，存在：
- $\dot{k} < 0$
- 其数学含义为：k_2 不稳定，还要继续下降，向 k^* 趋近。并且：
- $\dot{k} = s\,f(k) - (n+g+\delta)k < 0$
- $s\,f(k) < (n+g+\delta)k$
- 经济含义：
- 如果每单位有效劳动的平均实际投资小于所需的持平投资，则k 下降。

- (3) 如果k 最初恰好等于k^*，$k = k^*$
- 从相图可见，存在：$\dot{k} = 0$
- 其数学含义为：k^* 稳定、不变。
- $\dot{k} = s\, f(k^*) - (n+g+\delta)k^* = 0$
- $s\, f(k^*) = (n+g+\delta)k^*$
- 经济含义：
- 如果每单位有效劳动的平均实际投资等于所需的持平投资，则k 不变。

- 结论：
- 不管k 从何处开始，它都向k^* 收敛。

均衡位置



稳定性均衡：可重复出现、具有规律性的状态

- 满足前提条件的国家，必然会踏上经济的平衡增长路径。*

- 特殊点：

- 如果k 最初为0，根据已知条件：
- $f(0)= 0$，则满足方程(1.13)：
- $\dot{k} = s f(0) - (n+g+\delta)0 = 0$
- k 就会停留在那儿。
- 我们忽略这种可能性。

- 3、k 上升或者下降的经济含义：

- (1) 为什么 $\dot{k}<0$ 时，k 不稳定，还要继续下降，向k^*趋近？

- 如何解释，如果每单位有效劳动的平均实际投资小于所需的持平投资，则k下降？

- 如果存在 $s\,f(k) < (n+g+\delta)k$
- 即：$\dot{k} = s\,f(k) - (n+g+\delta)k < 0$
- 两边同除以 k（$k > 0$），得到：
- $\dot{k}/k = s\,f(k)/k - (n+g+\delta) < 0$
- 即：$\dot{k}/k$
- $= \dot{K}/K - \dot{L}/L - \dot{A}/A < 0$
- 即：$\dot{K}/K < \dot{L}/L + \dot{A}/A$

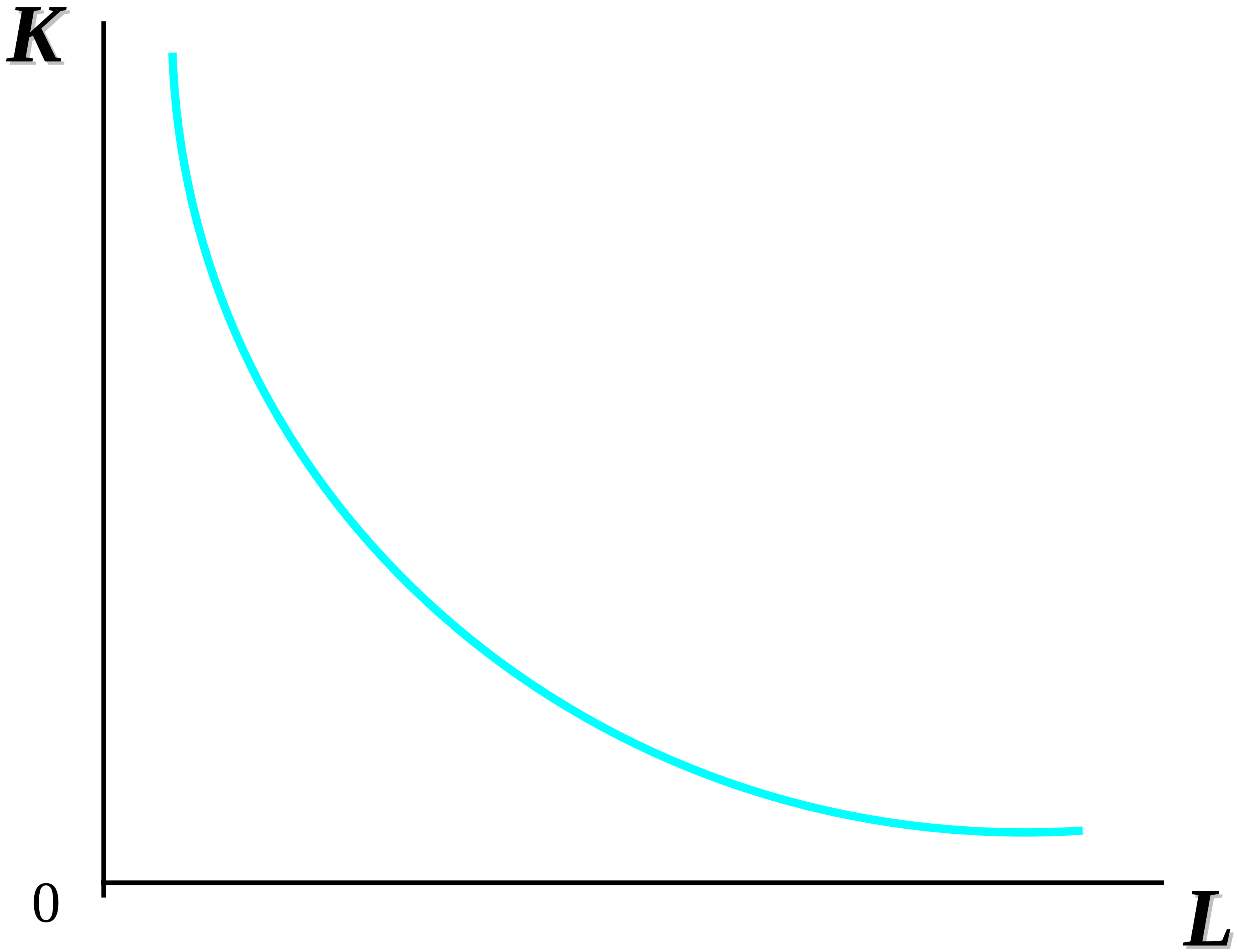
- 如果资本的增长率小于劳动力和知识的增长率
- ——→ 劳动力对资本来讲，变得越富裕
- ——→ 劳动力市场供给 ＞ 需求
- ——→ 劳动力的价格(工资)下降
- ——→ 劳动力的边际成本下降
- ——→ 发生替代，厂商用劳动力替代资本
- ——→ $L\uparrow$的同时$K\downarrow$ ——→ $(K/L)\downarrow$
- ——→ $(K/AL)\downarrow \rightarrow k\downarrow$

- (2) 为什么 $\dot{k} > 0$ 时，k不稳定，还要继续上升，向k^* 趋近？
- 如何解释，如果每单位有效劳动的平均实际投资大于所需的持平投资，则k上升？
- 如果存在 $s f(k) > (n+g+\delta)k$
- *即*：$\dot{k} = s f(k) - (n+g+\delta)k > 0$
- 两边同除以 k ($k > 0$)，得到：
- $\dot{k} / k = s f(k) / k - (n+g+\delta) > 0$
- *即*：$\dot{k} / k$
- $= \dot{K} / K - \dot{L} / L - \dot{A} / A > 0$

- 即：$\dot{K}/K > \dot{L}/L + \dot{A}/A$
- 如果资本的增长率大于劳动力和知识的增长率。
- ——→ 资本对劳动力来讲，变得越来越富裕
- ——→ 资本市场供给 ＞ 需求
- ——→ 资本的价格(利率)下降
- ——→ 资本的边际成本下降
- ——→ 发生替代，厂商用资本替代劳动力
- ——→ $L\downarrow$的同时$K\uparrow$ ——→ $(K/L)\uparrow$
- ——→ $(K/AL)\uparrow \rightarrow k\uparrow$

- 索洛模型的隐含前提：

- 要素之间可以自由替代、自发调节。K 与 L 可替代。



- 正常的等产量曲线

- 索洛模型的结论：
- 只要市场机制是完善的，经济依靠自身的力量就可以实现稳定增长。