

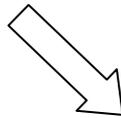
第6章 傅里叶变换光学 与相因子分析方法

- 6.1 衍射系统 波前变换
 - 6.2 相位衍射元件——透镜和棱镜
 - 6.3 波前相因子分析法
 - 6.4 余弦光栅的衍射场
 - 6.5 夫琅禾费衍射实现屏函数的傅里叶变换
 - 6.6 超精细结构的衍射——隐失波
 - 6.7 阿贝成像原理与空间滤波实验
 - 6.8 光学信息处理列举
 - 6.9 泽尼克的相衬法
 - 6.10 相位物可视化的其他光学方法
 - 6.11 夫琅禾费衍射的普遍定义与多种装置
 - 6.12 傅里叶变换和 δ 函数
 - 6.13 准确获得物频谱的三种系统
- 习题 21 道

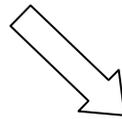
6.1 衍射系统 波前变换

- 引言
 - 衍射系统及其三个波前
 - 衍射屏函数及其三种类型
 - 例题——两个衍射屏相叠
 - 什么是衍射
- 引言

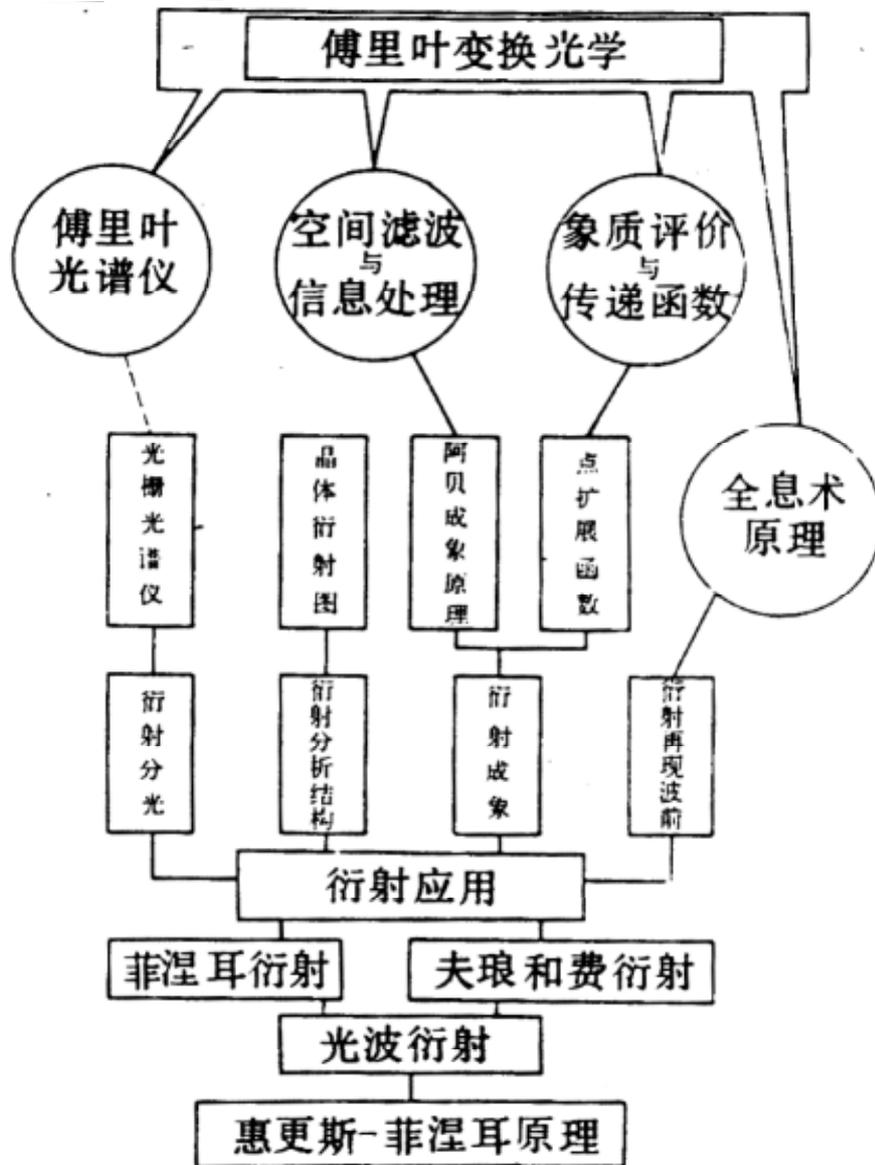
经典波动光学



现代变换光学



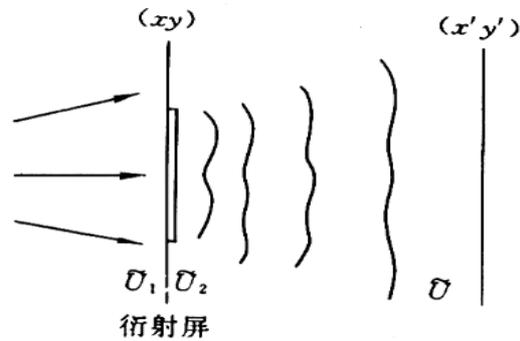
光学信息处理



衍射光学现代发展概貌图

● 衍射系统

▲ 系统的划分



▲ 关注三个场分布

入射场 $\tilde{U}_1(x, y)$, 出射场 $\tilde{U}_2(x, y)$,
衍射场 $\tilde{U}(x', y')$.

▲ 波前变换概念

波前 $\tilde{U}_1(x, y) \rightarrow \tilde{U}_2(x, y)$,
这是衍射屏的作用;

波前 $\tilde{U}_2(x, y) \rightarrow \tilde{U}(x', y')$,
这是波的传播行为

——由 HFK 理论给出,

常见, 傍轴情况

$$\tilde{U}(x', y') \approx \frac{-i}{\lambda r_0} \iint \tilde{U}_2(x, y) \cdot e^{ikr} dx dy .$$

● 衍射屏函数

▲ 定义
$$\tilde{t}(x, y) = \frac{\tilde{U}_2(x, y)}{\tilde{U}_1(x, y)} = t(x, y) \cdot e^{i\varphi(x, y)}$$

▲ 唯象看，三种类型。

振幅型——仅 $t(x, y)$ ，而 φ 与 (x, y) 无关；

相位型——仅 $\varphi(x, y)$ ，而 t 与 (x, y) 无关；

相幅型——有 $t(x, y)$ ，且 $\varphi(x, y)$ ，一般情况。

▲ 于是，衍射场

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x', y') &\approx \frac{-i}{\lambda r_0} \iint \tilde{t}(x, y) \cdot \tilde{U}_1(x, y) \cdot e^{ikr} dx dy \\ &= \frac{-i}{\lambda r_0} \iint \tilde{U}_1(x, y) \cdot e^{ikr} dx dy, \end{aligned}$$

自由传播场

● 什么是波的衍射

▲ 形成对波衍射的普遍表述

先前，曾有过关于“什么是波衍射”的两种说法：（参见书 278 页）

现在，可以这样表述：

当光波在传播中，由于某种因素，使其波前振幅分布或相位分布发生

变化，则其后场不同于自由传播场——发生衍射。这是对“衍射现象

因果关系”普遍概括。

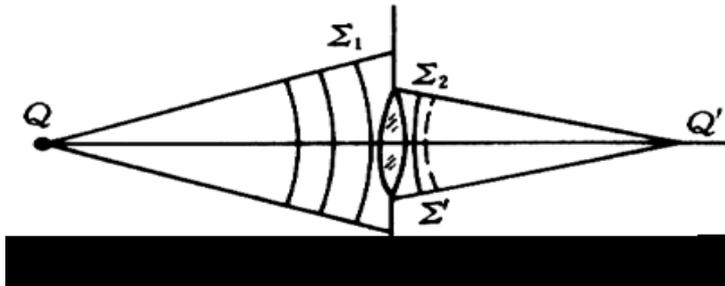
▲ 两个衍射屏相叠

其屏函数 $\tilde{t}(x, y) = \tilde{t}_1 \cdot \tilde{t}_2$ ，相乘

6.2 相位衍射元件——透镜与棱镜

- 透镜的相位变换函数 • 例题 1——导出薄透镜焦距公式
- 例题 2——导出薄透镜傍轴成像公式 • 棱镜的相位变换函数
- 例题 3——导出棱镜傍轴成像公式 • 窗函数

● 透镜的相位变换函数



▲ 在成像系统中，透镜有两个作用

- (1) 限制波前，
- (2) 变换波前——改变聚散中心。

统一地，由其屏函数予以描述，

$$\tilde{t}(x, y) = \begin{cases} \frac{A_2(x, y) \cdot e^{i\varphi_2(x, y)}}{A_1(x, y) \cdot e^{i\varphi_1(x, y)}}, & \text{(瞳内);} \\ 0, & \text{(瞳外).} \end{cases}$$

近似条件——忽略反射、吸收 损耗，

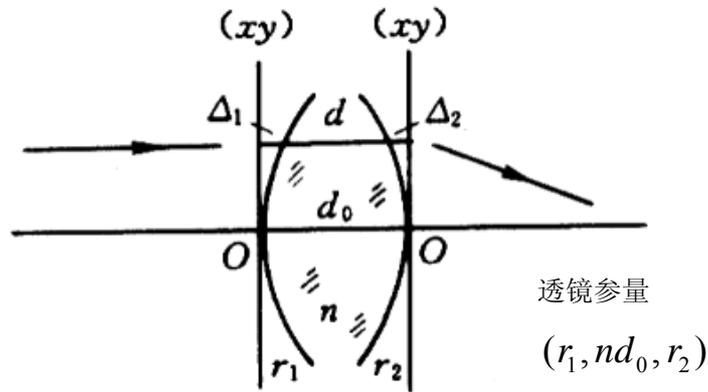
$$\frac{A_2}{A_1} \approx 1,$$

于是，瞳内

$$\tilde{t}_L(x, y) \approx e^{i(\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y))}$$

—— 纯相位型屏函数

▲ 导出 $\tilde{t}_L(x, y)$



近似条件：薄透镜、且傍轴，

有入射点 $P(x, y)$ 与出射点 $Q(x, y)$ ，

坐标相近，“等高出射”；

$L(PQ)$ 可近似地沿 \parallel 光轴 计算：

$$L(PQ) = \Delta_1(x, y) + nd(x, y) + \Delta_2(x, y).$$

其中， $\Delta_1(x, y) \approx \frac{(x^2 + y^2)}{2r_1}$ ，

$$\Delta_2(x, y) \approx \frac{(x^2 + y^2)}{2(-r_2)} = -\frac{(x^2 + y^2)}{2r_2}.$$

注意， r_1 、 r_2 自身含正负号，

改写 $nd = n(d_0 - \Delta_1 - \Delta_2)$

$$= nd_0 - n(\Delta_1 + \Delta_2),$$

于是 $L(x, y) = nd_0 - (n-1)(\Delta_1 + \Delta_2)$ ，

得相位变换函数

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y) &= kL(x, y) \\ &= \varphi_0 - k(n-1)(\Delta_1 + \Delta_2) = -k(n-1) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).\end{aligned}$$

($\varphi_0 = knd_0$, 与 (x, y) 无关, 略而不写)

最后, 薄透镜 作为相位元件

其相位屏函数为

$$\tilde{t}_L = e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2F}},$$

缩写符合
$$F = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}.$$

▲可见

- (1) 薄透镜的相位变换函数具有“二次相因子”。
- (2) 在理论分析时, 若存在“二次相因子”的变换函数, 则其作用等效于一个薄透镜, ——对被作用的波前起聚散作用。

● 例题 1 当平行光正入射于透镜, 求出射光的波前函数及其特征。

解 入射光 $\tilde{U}_1(x, y) = A_1,$

$$\text{出射光 } \tilde{U}_2(x, y) = \tilde{t}_L \cdot \tilde{U}_1 = A_1 e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2F}},$$

这是什么波?

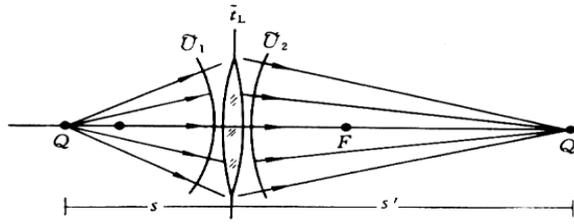
傍轴球面波——聚散中心 $(0, 0, F)$

即 焦距为
$$F = \left[(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]^{-1},$$

可正可负。 $F > 0$, 会聚透镜;

$F < 0$, 发散透镜。

● 例题 2 试用透镜 \tilde{t}_L 导出傍轴成像公式。



解 发散球面波入射，其波前函数为

$$\tilde{U}_1(x, y) \approx A_1 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2S}},$$

于是 出射波前为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{t}_L \cdot \tilde{U}_1 \\ &\approx A_1 e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2F}} \cdot e^{ik \frac{x^2+y^2}{2S}} \\ &= A_1 e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2S'}}, \end{aligned}$$

其中，缩写 $\frac{1}{S'} = \frac{1}{F} - \frac{1}{S}$ 。

\tilde{U}_2 表达式表明，

它代表一列会聚球面波，

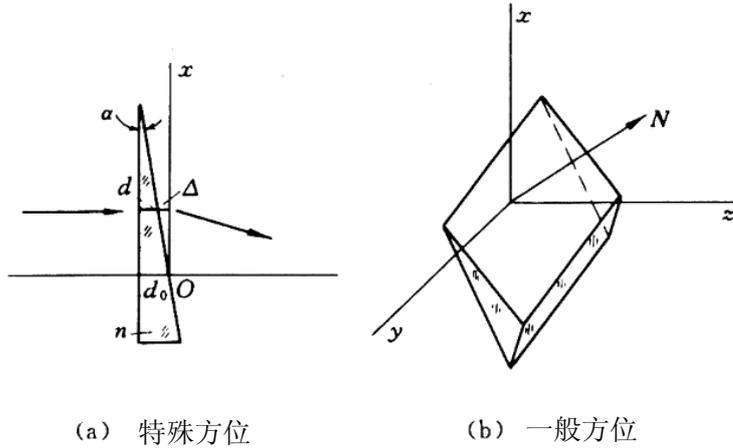
聚（散）中心在 $(0, 0, s')$

—— s' 具有像距的意义。

即 薄透镜傍轴成像、物像距之关系为

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{F}.$$

● 棱镜的相位变换函数 \tilde{t}_p



(a) 特殊方位

(b) 一般方位

在光学系统中，棱镜起偏转作用

——改变光束的传播方向。

可以预测 其 \tilde{t}_p 具有线性相因子（推导从略），
其结果为

$$(1) \tilde{t}_p(x, y) \approx e^{-ik(n-1)\alpha \cdot x}, \quad (\text{特殊})$$

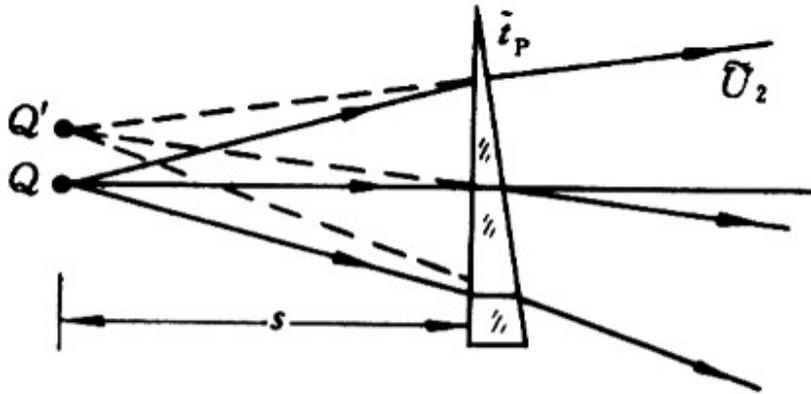
$$(2) \tilde{t}_p(x, y) \approx e^{-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)},$$

其中， (α_1, α_2) 是界面法线方向 \bar{n} 的两个方向余弦角的余角。

可见，

若某种场合出现具有线性相因子的变换函数，
则其作用等效于一个棱镜——“偏转元件”。

- 例题 3 物点 Q 向棱镜发射一傍轴球面波，求通过棱镜后的波场特性。



解 出射波前为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{t}_P \cdot \tilde{U}_1 = A_1 e^{-ik(n-1)\alpha x} \cdot e^{ik \frac{x^2+y^2}{2S}} \\ &= A_1 e^{ik \left[\frac{x^2+y^2}{2S} - \frac{(n-1)s\alpha x}{S} \right]}, \end{aligned}$$

这表明 它是一列轴外发散球面波，其中心位置 Q' ，
坐标为

$$x' = (n-1)s\alpha, \quad y' = 0, \quad z' = s.$$

显然，这种处理方式 较之

几何光学方法（两条光线、两次折射），
要简捷得多！

▲有趣的事——改写 \tilde{u}_2 两个因子的前后位置，

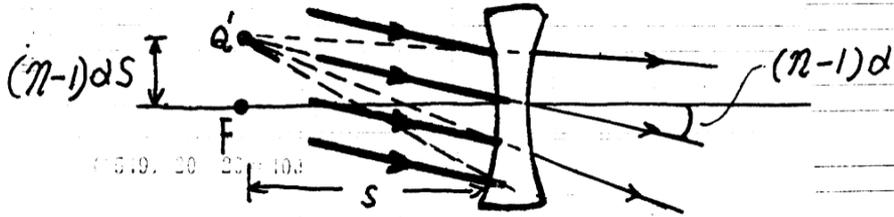
$$\tilde{U}_2(x, y) = e^{ik\frac{x^2+y^2}{2S}} \cdot A_1 e^{-ik(n-1)\alpha x}$$

\uparrow
 元件“变换”

\uparrow
 波函数

这相当于

焦距为 $(-S)$ 的发散透镜，作用于向下斜入射的平面波，最终成为 一系列发散球面波。



可见，照明的球面波，
 在某种场合，
 可以起一个透镜的作用。

6.3 波前相因子分析方法

- 相因子分析法概述 •波前相因子和变换相因子
- 余弦型环状波带片的衍射场 •高斯光束经透镜的变换

● 相因子分析法概述（参见书 283 页）

●要熟悉 两类相因子（Phase factor）

(1) 波前函数的相因子：

平面波前与球面波前
——系可供选择的两种基元成分。

(2) 变换函数的相因子：

透镜与棱镜
——系两种基本的变换元件。

▲相因子判断法大意

根据**波前相因子**，来判断由此波前所决定的波场的类型和特征；

根据**变换相因子**，来判断此变换函数的主要功能，它等效于一种什么光学元件。

▲说明

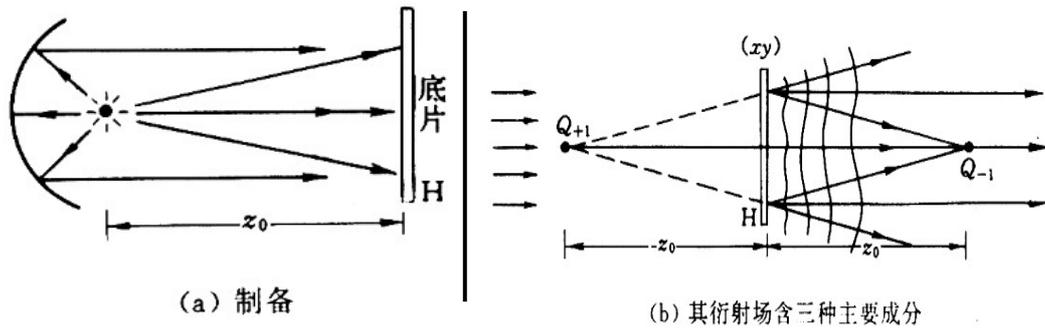
上一节 几个简朴实例 已经体现该方法

基本思想、分析程序及其优越性。

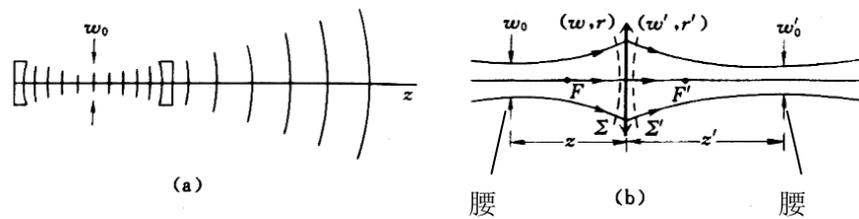
不过，未涉及瞳外 $\tilde{r} = 0$ 的后果。

- (1) 掌握“波场主要特征”，不及“细节”。
- (2) 某些场合，例如“全息再现”场合，掌握“主要特征”就解决问题了。

● 余弦型环状波带片的衍射场 (参见书 284-285 页)



● 高斯光束经透镜的变换 (详见书 285-287 页)



据

$$(\omega_0, z) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega \\ r \end{array} \xrightarrow{\tilde{t}_L} \begin{array}{l} \omega' \\ r' \end{array} \right\} \rightarrow (\omega'_0, z')$$

考虑到 $\omega' = \omega$, $\frac{1}{r'} = \frac{1}{F} - \frac{1}{r}$,

于是 像方的腰粗与腰距 被表达为

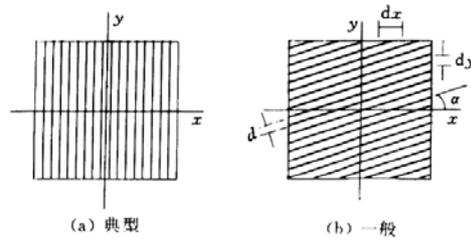
$$\begin{cases} \omega'_0 = \omega' \left(1 + \frac{\pi^2 \omega'^4}{\lambda^2 r'^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ z' = r' \left(1 + \frac{\lambda^2 r'^2}{\pi^2 \omega'^4}\right)^{-1} \end{cases}$$

6.4 余弦光栅的衍射场

- 余弦光栅的屏函数和制备 •余弦光栅的衍射特性
- 余弦光栅的组合 •释疑——余弦光栅衍射的实数处理

● 其屏函数和制备

▲ 空间频率概念



(1) 二维性

空间周期 (d_x, d_y) ,

$$\text{空间频率 } (f_x, f_y) = \left(\frac{1}{d_x}, \frac{1}{d_y} \right)$$

(2) 有正负

如上图, 取向一、三象限, $\frac{f_y}{f_x} < 0$;

取向二、四象限, $\frac{f_y}{f_x} > 0$.

(3) 光学中, 二维平面上的空间周期性,

常指 光强 $I(x, y)$ 分布,

或 复振幅 $\tilde{U}(x, y)$ 分布。

后者 典型一例 ——

平面波前函数 $\tilde{U}(x, y) = Ae^{ik(\sin\theta_1 \cdot x + \sin\theta_2 \cdot y)}$,

可见, 其空间角频率为

$$(P_x, P_y) = (k \sin \theta_1, k \sin \theta_2)$$

其空间频率为

$$(f_x, f_y) = \left(\frac{\sin \theta_1}{\lambda}, \frac{\sin \theta_2}{\lambda} \right).$$

▲ 正弦光栅定义为其复振幅透过率函数

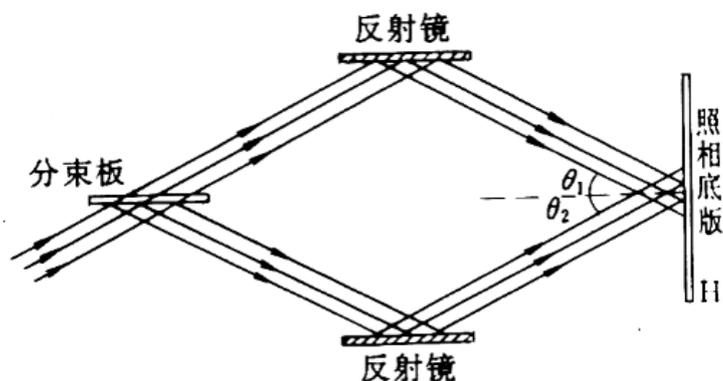
——屏函数具有以下形式,

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1 \cos(2\pi f x + \varphi_0), \quad (\text{典型})$$

一般,

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1 \cos(2\pi f_x x + 2\pi f_y y + \varphi_0).$$

▲制备——两束平行光干涉记录；线性洗印。



双光束 干涉强度分布为

$$I(x, y) = I_0(1 + \gamma \cos(2\pi fx + \varphi_0))$$

$$f = \frac{1}{d} = \frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}{\lambda}$$

“暗室” 线性洗印，以获得

$$t(x, y) \propto I(x, y),$$

写成 $t(x, y) = \alpha + \beta I(x, y)$

$$= t_0 + t_1 \cos(2\pi fx + \varphi_0),$$

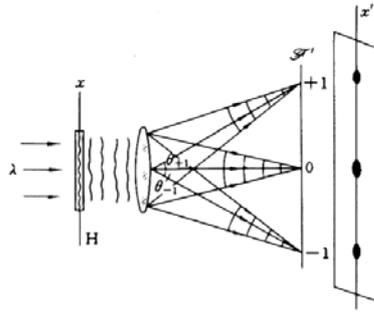
由“光密度计” 鉴别。

其中 $\beta > 0$ ，正片； $\beta < 0$ ，负片。

α 雾底，系 $I = 0$ 时底片的振幅透过率。

这里涉及“光化学”——记录介质乳胶特性研究。

● 余弦光栅的衍射特征



这表明，

经正弦光栅，后场主要成分是

三列平面衍射波。

▲ 理论说明——波长 λ 平行光正入射

$$\begin{aligned}
 \text{出射场 } \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{t} \cdot \tilde{U}_1 \\
 &= (t_0 + t_1 \cos 2\pi f x) A_1, \quad (\text{设 } \varphi_0 = 0) \\
 &= A_1 t_0 + \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{i2\pi f x} + \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{-i2\pi f x} \\
 &= \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1},
 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{U}_0(x, y) = A_1 t_0$ —— 正出射平面衍射波；

$$\tilde{U}_{+1}(x, y) = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{i2\pi f x} = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{ik(f\lambda)x}$$

—— 斜出射平面衍射波，其方向角满足

$$\sin \theta_{+1} = f\lambda;$$

$$\tilde{U}_{-1}(x, y) = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{-i2\pi f x} = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{-ik(f\lambda)x}$$

—— 又一系列斜出射平面衍射波，方向角

$$\sin \theta_{-1} = -f\lambda.$$

我们运用“相因子判断法”十分简洁地揭示了余弦光栅的衍射特征——三个衍射斑。

更具意义的是

衍射斑的光学特征 反映了

余弦光栅作为一种典型结构的特征。

▲特征表

单频光学信息	夫琅禾费衍射斑			
	级别	方向角	中心相对光强	半角宽度
$A_1(t_0 + t_1 \cos(2\pi f x + \varphi_0))$	0级	$\theta_0 = 0$	$\propto t_0^2$	λ/D
空间频率 f	+1级	$\sin \theta_{+1} = f\lambda$	$\propto (t_1/2)^2$	$\lambda/D \cos \theta_{+1}$
直流成分 $A_1 t_0$	-1级	$\sin \theta_{-1} = -f\lambda$	$\propto (t_1/2)^2$	$\lambda/D \cos \theta_{-1}$
交流成分 $A_1 t_1$				
空间宽度 D				

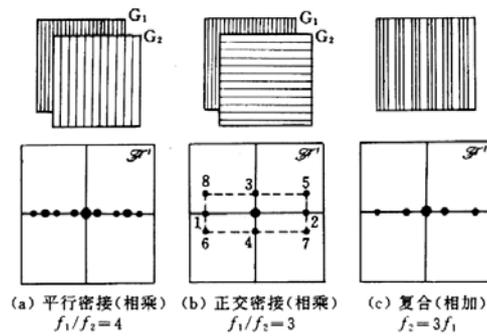
其中最重要的一点是

其 ± 1 级衍射斑的角方位与余弦光栅的空间频率

一一对应：

$$\underline{\sin \theta_{\pm 1} = \pm f\lambda}$$

● 余弦光栅的组合



(1) 平行密接

$$G_1: t(x) = t_{01} + t_1 \cos 2\pi f_1 x, \quad (\text{高频})$$

$$G_2: t'(x) = t_{02} + t_2 \cos 2\pi f_2 x, \quad (\text{低频})$$

组合 $G_1 \cdot G_2$:

$$t_{12}(x) = t \cdot t' \quad (\text{注意“相乘”})$$

$$= t_{01} \cdot t_{02} + t_{02} t_1 \cos 2\pi f_1 x$$

$$+ t_{01} t_2 \cos 2\pi f_2 x$$

$$+ \frac{1}{2} t_1 t_2 \cos 2\pi (f_1 + f_2) x$$

$$+ \frac{1}{2} t_1 t_2 \cos 2\pi (f_1 - f_2) x$$

共有 9 个衍射斑，分布于 x' 轴上，方向角分别为

$$\sin \theta = 0, \pm f_1 \lambda, \pm f_2 \lambda, \pm (f_1 - f_2) \lambda$$

和 $\pm (f_1 + f_2) \lambda$.

(2) 正交密接

$$G_1: t(x) = t_{01} + t_1 \cos(2\pi f_1 x), \quad (\text{高频})$$

$$G_2: t'(y) = t_{02} + t_2 \cos(2\pi f_2 y), \quad (\text{低频})$$

组合 $G_1 \cdot G_2$:

$$t_{12}(x, y) = t(x) \cdot t'(y) \quad \text{谱斑 } No.$$

$$= t_{01} \cdot t_{02} \quad \longrightarrow \quad (0)$$

$$+ t_{02} t_1 \cos 2\pi f_1 x \quad \longrightarrow \quad (1),(2)$$

$$+ t_{01} t_2 \cos 2\pi f_2 y \quad \longrightarrow \quad (3),(4)$$

$$+ \frac{1}{2} t_1 t_2 \cos 2\pi(f_1 x + f_2 y) \longrightarrow (5),(6)$$

$$+ \frac{1}{2} t_1 t_2 \cos 2\pi(f_1 x - f_2 y) \longrightarrow (7),(8)$$

普遍表示 谱斑衍射角 $(\sin \theta_1, \sin \theta_2)$

与空间频率 (f_x, f_y) 之关系

$$\underline{(\sin \theta_1, \sin \theta_2) = \pm(f_x \lambda, f_y \lambda).}$$

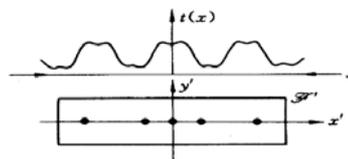
(3) 光栅之和 (符合光栅)

设 某光栅

$$\tilde{t}(x) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f_1 x + t_2 \cos 2\pi f_2 x,$$

其衍射场主要特征

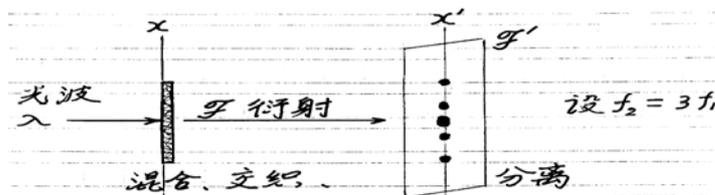
有 5 个谱斑



基频 f_1 \longrightarrow $\sin \theta_{\pm 1} = \pm f_1 \lambda,$

倍频 f_2 \longrightarrow $\sin \theta'_{\pm 1} = \pm f_2 \lambda,$

还有 t_0 \longrightarrow $\sin \theta_0 = 0.$



这种光栅 怎么来?

理论上 来自

周期结构的 Fourier 级数展开,

其中每个 \mathcal{F} 氏成分,

便是一个“余弦光栅”。

实验上, 可采取“二次曝光”以获之。

● 释疑——余弦光栅衍射的实数处理(参见书 292 页)。

6.5 夫琅禾费衍射实现屏函数的傅里叶变换

- 任意栅函数的傅里叶级数展开 •例题——矩形光栅衍射场的傅里叶分析
- 傅里叶光学的基本思想 •约瑟夫 •傅里叶

● 任意栅函数的傅氏级数展开

▲以一维空间周期函数为基础

$$\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x + Nd), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其傅氏级数展开式，有三种形式可供选用。

(1) 余弦正弦式

$$\tilde{t}(x) = t_0 + \sum_{n>0} a_n \cos 2\pi f_n x + \sum_{n>0} b_n \sin 2\pi f_n x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{2}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tilde{t}(x) \cdot \cos 2\pi f_n x dx, \\ b_n = \frac{2}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tilde{t}(x) \cdot \sin 2\pi f_n x dx, \end{array} \right. \quad \underline{f_n = n f_1 = n \frac{1}{d}}$$

(2) 余弦相移式

$$\tilde{t}(x) = t_0 + \sum_{n>0} C_n \cos(2\pi f_n x - \varphi_n)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

(3) 指数式

$$\tilde{t}(x) = t_0 + \sum_{n \neq 0} \tilde{t}_n e^{i2\pi f_n x},$$

$$\tilde{t}_n = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tilde{t}(x) \cdot e^{-i2\pi f_n x} dx,$$

$$t_0 = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tilde{t}(x) dx.$$

▲ 频谱概念

傅里叶系数 \tilde{t}_n 的集合，反映了原函数 $\tilde{t}(x)$ 中各种空间频率成分所占的分量，通常称其为傅里叶频谱，简称频谱 (frequency spectrum)。一般而言，频谱可以是连续谱，即频率可连续取值；也可以是离散谱，即频率只取特定的离散值。从周期函数的傅里叶级数展开中看出，周期函数的频谱是离散谱；以后将证明，非周期函数的频谱是连续谱。而对于实际光栅，总宽度 D 是有限的，故严格意义上它是个非周期函数；不过，它包含的单元总数很大，即宽度 D 远远地大于光栅空间周期 d 。因之，可称实际栅函数为准周期函数，其频谱介于连续谱与离散谱之间，而更具离散谱的特性，我们称其为准离散谱。多缝光栅其夫琅禾费衍射强度分布曲线所显示出的若干离散的主峰（主极强），就是一种准离散谱。

▲ 二维周期函数的傅里叶级数展开

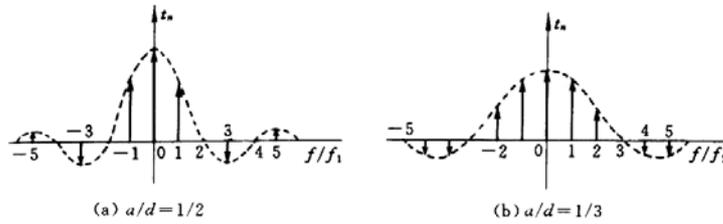
$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + \sum_{n, m \neq 0} \tilde{t}_{nm} e^{i2\pi(nf_x x + mf_y y)},$$

$$\tilde{t}_{nm} = \frac{1}{d_x d_y} \int_{-\frac{d_x}{2}}^{\frac{d_x}{2}} \int_{-\frac{d_y}{2}}^{\frac{d_y}{2}} \tilde{t}(x, y) e^{-i2\pi(nf_x x + mf_y y)} dx dy,$$

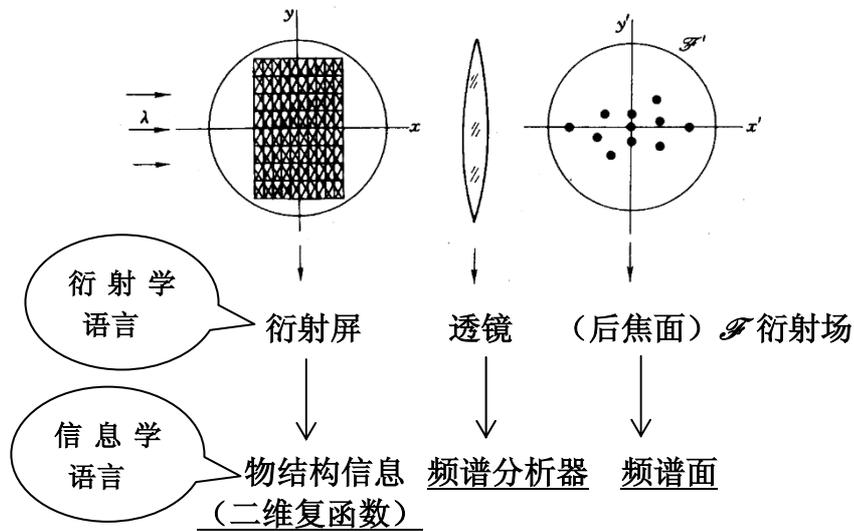
$$t_0 = \tilde{t}_{00} = \frac{1}{d_x d_y} \int_{-\frac{d_x}{2}}^{\frac{d_x}{2}} \int_{-\frac{d_y}{2}}^{\frac{d_y}{2}} \tilde{t}(x, y) dx dy.$$

● 例题——矩形光栅衍射场的傅里叶分析

(参见书 295 页)



● 傅里叶光学的基本思想



凝聚为一个表述:

▲ 夫琅禾费衍射实现了屏函数的**傅里叶变换**。

▲ 衍射场点位置与空间频率成分一一对应,

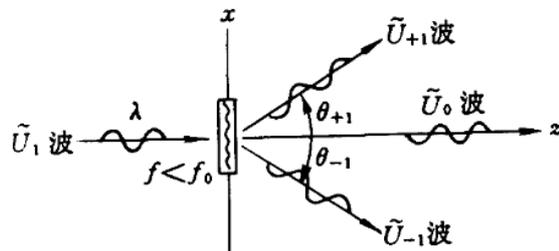
角方位 $(\sin \theta_1, \sin \theta_2) = (f_x \lambda, f_y \lambda),$

线坐标 $(x', y') = (F \sin \theta_1, F \sin \theta_2)$

$= (F f_x \lambda, F f_y \lambda).$

6.6 超精细结构的衍射——隐失波

● 结构按空间频率分级



载波——平面衍射波，

其空间周期为波长 λ ，或其空间频率 $f_0 = \frac{1}{\lambda}$ ；

信息——物结构，其空间周期 d ，相应的空间频率

$$f = \frac{1}{d}；$$

载波携带信息，

$$\sin \theta_{\pm 1} = \pm f \lambda .$$

▲注意， f 、 f_0 彼此独立，

分级 $f \ll f_0$ ，低频结构，

$f \lesssim f_0$ ，高频结构

$f > f_0$ ，超高频（超精细）结构。

▲数量级，

$$\lambda \sim 550\text{nm}, \quad \text{即 } f_0 = \frac{1}{550\text{nm}} \approx 1800 / \text{mm}$$

● 衍射隐失波的出现

当 $f > f_0$ 时, 有

$$\sin \theta_{+1} = f\lambda = \frac{f}{f_0} > 1, \quad ? !$$

转向三维波场中去考察:

$$\text{平面衍射波 } \tilde{U}_{+1}(x, y, z) \propto e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)},$$

为满足边界条件, 即 $z = 0$ 时,

$$\text{被屏结构限定为 } \tilde{U}_{+1}(x, y, 0) \propto e^{i2\pi f x},$$

于是 $k_x = 2\pi f$, $k_y = 0$, $k_z = ?$

为满足波动方程, 波矢 k 值被限定,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi f_0,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } k_z &= \sqrt{k^2 - k_x^2} = 2\pi \sqrt{f_0^2 - f^2} \\ &= 2\pi f_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}, \quad \text{为“虚数”, 当 } f > f_0 \\ &= ik'_z, \quad k'_z = 2\pi f_0 \sqrt{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 - 1}, \quad (\text{实数}) \end{aligned}$$

最终导致

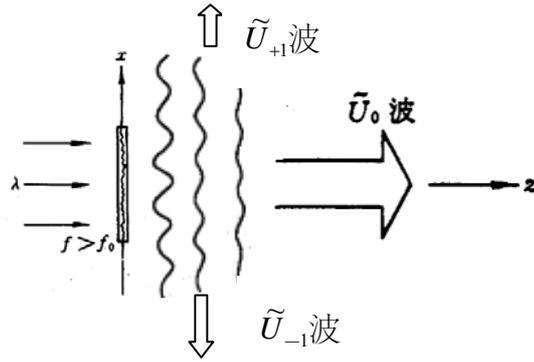
$$\tilde{U}_{+1}(x, y, z) \propto e^{-k'_z \cdot z} \cdot e^{i2\pi f x}, \quad \text{这是一种非常波,}$$

evanescent wave,

是非传播波, 无法到达远场。

这意味着, 超高频的结构信息无法被平面衍射波携带到频谱面上。即衍射

分析结构极限 $f_{Max} = f_0$, 或 $d_{min} \approx \lambda$ 。



● 与超临界角时透射产生的隐失波比较，

它在近场区有两列隐失波， \tilde{u}_{+} 波沿(+x)方向，

\tilde{u}_{-} 波沿(-x)方向；

同时存在 \tilde{u}_0 波，它是通常的行波，可传输至远方。

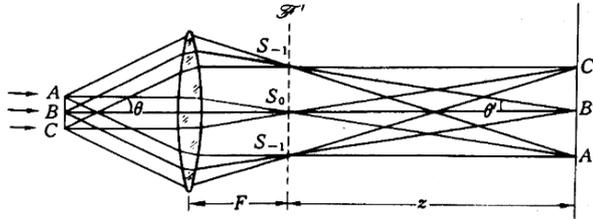
⊛而“近场光学显微镜”对物结构信息的探测方式，从根本上突破了“远场频谱”理论，因而其精度不受波长限制；

然而，近场扫描光学显微镜的探针，已接近样品距离 $\Delta z \approx \lambda/10$ ，即已进入隐失驻波场，故对这里介绍的衍射隐失波的了解，有助于对近场扫描探测数据的分析。

6.7 阿贝成像原理与空间滤波实验

- 阿贝成像原理——相干系统两步成像
- 证明阿贝成像原理——三孔干涉场
- 阿贝成像原理的意义和价值
- 空间滤波概念和空间滤波器
- 空间滤波实验

● Abbe 成像原理



准单色平行光照明 物平面

其上各点成为次波源 发射球面波 充满系统，
彼此是相干的——相干成像系统。

如何看待该系统成像过程？

▲传统眼光：

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow A' \\ B \rightarrow B' \\ C \rightarrow C' \end{array} \right\} \text{像 (点集)}$$

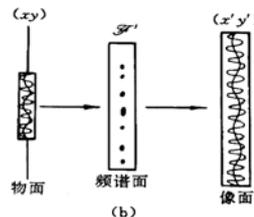
(点集) 物

着眼于“点对点”，一次成像，无频谱概念。

▲Abbe 眼光



(a)



(b)

他将物或像看成

一系列不同空间频率信息的集合；

成像过程被分为两步：

第一步，衍射——入射光经物面发生夫琅禾费衍射，在后焦面上出现一系列谱斑，即物频谱。

第二步，干涉——谱斑作为新的次波源，即物频谱作为新的波前，发出次波而到达像面，它们相干叠加而形成像。

这是关于 相干成像的两步成像理论，

它着眼于 频谱及频谱的变换——第一步“分频”，第二步“合成”。

● Abbe 原理的证明——三孔干涉场

基于

任何图像 = 一系列余弦光栅之和，

即 余弦单频信息是衍射的基元信息。

故 以单频余弦信息为对象，

论证 Abbe 原理，具有普遍性价值。

设 物光波前

$$\tilde{U}_{ob}(x, y) = A_1(t_0 + t_1 \cos 2\pi fx),$$

它产生三个衍射斑 \mathbf{S}_0 、 \mathbf{S}_{+1} 、 \mathbf{S}_{-1} ,

被看作三个点源, 在像面上相干叠加

$$\tilde{U}_I(x', y') = \tilde{U}_0(x', y') + \tilde{U}_{+1}(x', y') + \tilde{U}_{-1}(x', y'),$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{U}_0(x', y') = \tilde{A}_0 e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}} \cdot e^{ikL(S_0 B')}, \\ \tilde{U}_{+1}(x', y') = \tilde{A}_{+1} e^{ik \left(\frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \sin \theta'_{+1} \cdot x' \right)} \cdot e^{ikL(S_{+1} B')}, \\ \tilde{U}_{-1}(x', y') = \tilde{A}_{-1} e^{ik \left(\frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \sin \theta'_{-1} \cdot x' \right)} \cdot e^{ikL(S_{-1} B')}, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 \propto A_1 t_0 e^{ikL(BS_0)} \\ \tilde{A}_{\pm 1} \propto \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{ikL(BS_{\pm 1})}. \end{cases}$$

代入, 并注意到“物像等光程性”,

$$L(BS_0 B') = L(BS_{+1} B') = L(BS_{-1} B').$$

$$\text{于是 } \tilde{U}_I(x', y') \propto e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}} \cdot A_1 \left(t_0 + \frac{t_1}{2} e^{-ik \sin \theta'_1 \cdot x'} + \frac{t_1}{2} e^{-ik \sin \theta'_{-1} \cdot x'} \right).$$

引入传播系数 P , 并注意到 $\sin \theta'_{-1} = -\sin \theta_1$,

$$\text{有 } \tilde{U}_I(x', y') = P e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}} A_1 (t_0 + t_1 \cos(k \sin \theta'_1 \cdot x'))$$

再应用 Abbe 正弦条件

$$y \sin \theta_{+1} = y' \cdot \sin \theta'_{+1},$$

和正弦光栅衍射角公式 $\sin \theta_{+1} = f\lambda$,

化简 $k \sin \theta'_{+1} x' = 2\pi \frac{f}{V} x' = 2\pi f' x'$,

$$f' = \frac{f}{V}, \quad V = \frac{y'}{y} \quad \text{横向线放大率。}$$

最后结果

$$\tilde{U}_I(x', y') = P e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}} A_1(t_0 + t_1 \cos 2\pi f' x').$$

可见:

(1) 单频信息 $f \xrightarrow[\text{两步成像}]{\text{Abbe's}} f'$ 依然是单频信息

而 $f' \neq f$, 那只是几何上的缩放,

这不影响像质。

(2) 影响像质的是“反衬度 γ ”

——复振幅反衬度, 而目前

$$\gamma_{ob} = \frac{t_1}{t_0} = \gamma_I = \frac{t_1}{t_0}.$$

(3) 其中, 二次相因子系数, 可以暂且不管, 它不影响强度分布, 何况可用适当的光路予以消除。

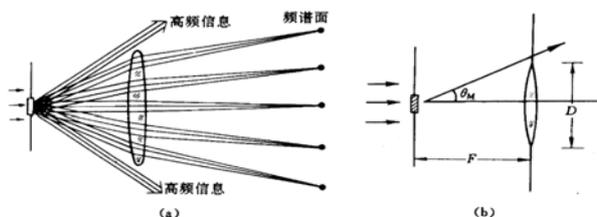
● Abbe 成像原理的意义和价值

▲ 其原意是为了

提高显微镜（相干照明）分辨本领。

研究表明——物镜口径有限，丢失高频信息，因而像面上不能显示物的细节，像变模糊了；为使像场准确地反映物场，当尽量扩大物镜口径——这与非相干照明的结论是一致的。

▲ 截止频率 f_M （估算）



据 $\sin \theta_{\pm 1} = \pm f \lambda$

有 $f_M \approx \frac{\sin \theta_M}{\lambda} \approx 0.5 \frac{D}{F \lambda}$,

例 $\lambda = 600 \text{ nm}$, 相对孔径 $(\frac{D}{F}) \approx \frac{1}{3}$,

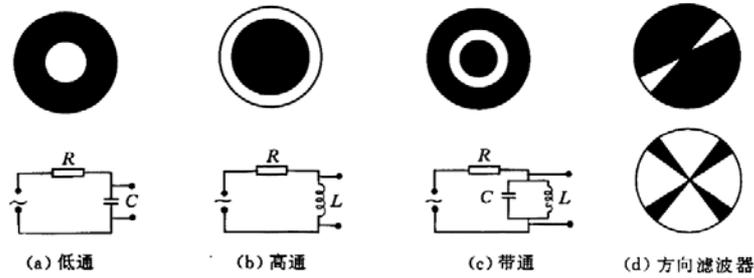
有 $f_M \approx 0.2 \frac{1}{\lambda} \approx 300 (\text{mm}^{-1})$.

▲ 其真正价值在于

为空间滤波——光学信息处理技术开辟了一条理论途径，启发人们从改变频谱入手以改变输出信息。

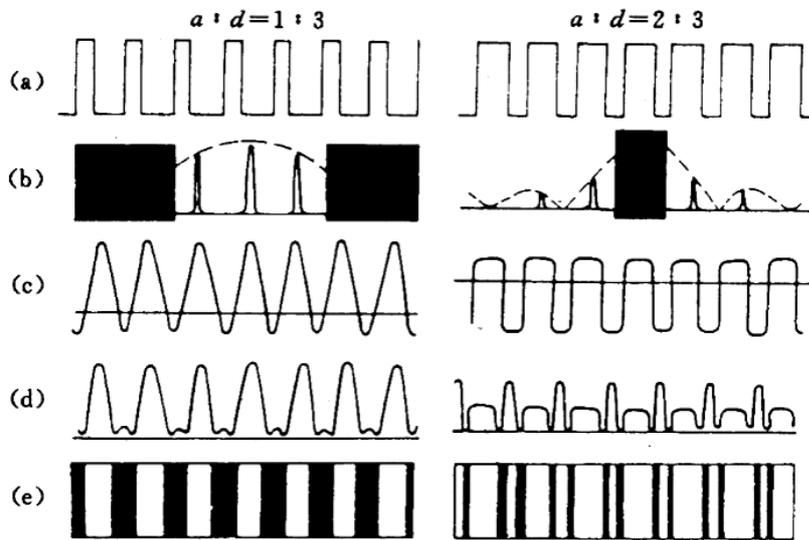
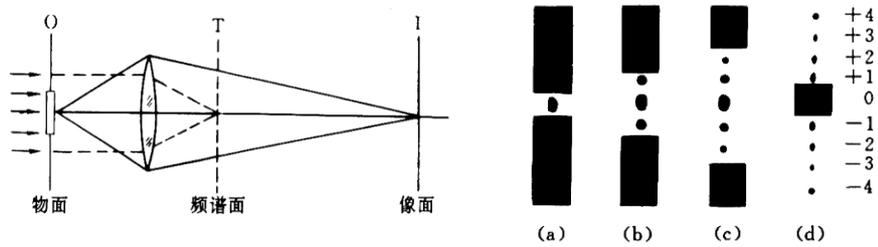
● 空间滤波概念和空间滤波器（参见书 303 页）

简单的空间滤波器——低通、高通、带通。



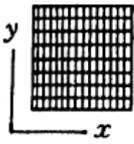
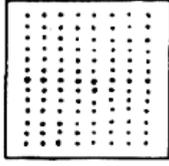
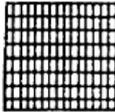
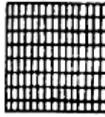
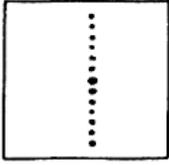
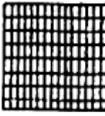
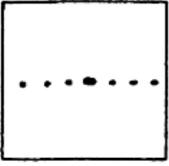
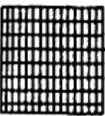
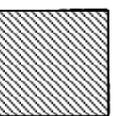
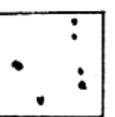
● 空间滤波实验

▲ 物为一维矩形光栅滤波器为一可调单狭缝



▲物为二维正交网格 滤波器为一可转动单缝

Abbe-Porter 实验

	输入图像 O	变换平面 T	输出图像 I	说明
(a)				全通
(b)				保留 f_y 频谱
(c)				保留 f_x 频谱
(d)				保留 f_0 频谱
(e)				小孔滤波器

6.8 光学信息处理列举

- 4F 图像处理系统
- 对波前变换的数学描写
- 图像加减
- 图像微分
- 显色滤波
- 黑白胶卷显示彩色图像

● 从显微镜阿贝成像发展为

4F 系统光信息处理

Abbe 原理 两步成像，先衍射后干涉。

《显微镜的像是衍射现象的干涉效应》

Abbe's theory has been summarized in this sentence: The microscope image is the interference effect of a diffraction phenomenon.

$$\tilde{U}_{ob}(x, y) \longrightarrow \tilde{U}_i(x', y')$$

$$\text{即 } A_1(t_0 + t_1 \cos 2\pi fx) \longrightarrow PA_1 e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}} (t_0 + t_1 \cos 2\pi f'x').$$

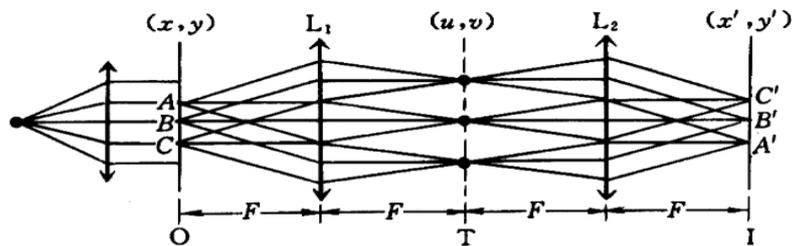
为了消除 二次相因子，令 $z \rightarrow \infty$ ，有

$$\exp\left(ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \rightarrow 1,$$

实现了 物场复振幅分布与像场之间的**纯净**转换（仅存几何放大），

这意味着 输入的物平面应当设定于透镜的前焦面，

于是形成 “4F 系统”，一切空间滤波与信息处理均可在 4F 系统中操作。



● 理解 4F 系统——对波前变换的数学描写

▲ 物场 $\tilde{U}_o(x, y)$

透镜 L_1 \swarrow 实现第一次 \mathcal{F} 变换

频谱 $\tilde{U}_1(u, v) = \mathcal{F} \{ \tilde{U}_o(x, y) \}, (u, v) = F\lambda(f_x, f_y)$

滤波器 \swarrow 实现空间滤波

滤波函数 $\tilde{H}(u, v),$

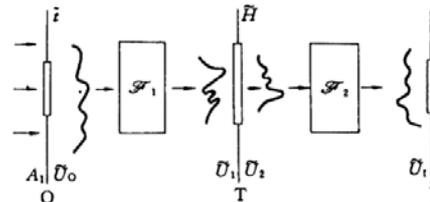
新频谱 (新波前)

$$\tilde{U}_2(u, v) = \tilde{H}\tilde{U}_1(u, v)$$

透镜 L_2 \swarrow 实现第二次 \mathcal{F} 变换

像场 $\tilde{U}_1(x', y') = \mathcal{F} \{ \tilde{U}_2(u, v) \}, (x', y') = F\lambda(f_u, f_v)$

于是, 完成了 Optical information processing



▲ 推演

$$\begin{aligned} \text{输出 } \tilde{U}_1 &= \mathcal{F} \{ \tilde{U}_2 \} = \mathcal{F} \{ \tilde{H}\tilde{U}_1 \} \\ &= \mathcal{F} \{ \tilde{H} \cdot \mathcal{F} \{ \tilde{U}_o \} \}. \end{aligned}$$

当滤波函数 $\tilde{H}(u, v) = 1$, 即“无滤波器”,

$$\tilde{U}_1(x', y') = \mathcal{F}\mathcal{F} \{ \tilde{U}_o \} = \tilde{U}_o(-x, -y)$$

即 横向放大率 $V = -1$, 确实如此。

▲相干成像的像质评价

——相干光学传递函数 (OTF)

人们关心输出图像相对输入图像的变化

$$OTF \equiv \frac{\mathcal{F}\{\tilde{U}_1\}}{\mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}}$$

——以“频谱”眼光评价成像系统的传输性能,

可以证明, $OTF = \tilde{H}$. 证明如下

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1 &= \mathcal{F}\{\tilde{H} \cdot \mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}\} \\ &= \mathcal{F}\{\tilde{H}\} * \mathcal{F}\mathcal{F}\{\tilde{U}_0\} \quad (\text{乘积-卷积定理}) \\ &= \mathcal{F}\{\tilde{H}\} * \tilde{U}_0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } \mathcal{F}\{\tilde{U}_1\} &= \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{\tilde{H}\} * \tilde{U}_0\} \\ &= \mathcal{F}\mathcal{F}\{\tilde{H}\} \cdot \mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}\end{aligned}$$

所以 $OTF = \mathcal{F}\mathcal{F}\{\tilde{H}\} = \tilde{H}$, (不计较坐标反向)

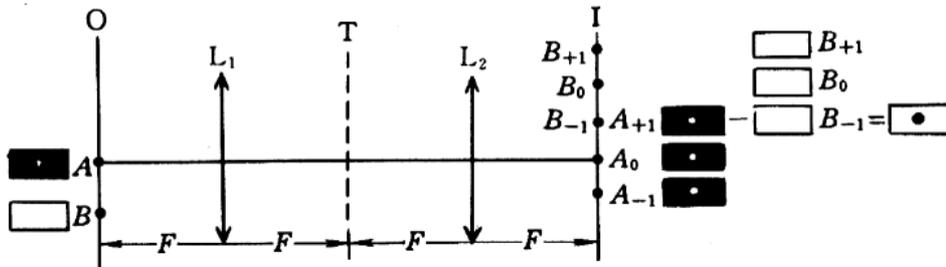
这为图像处理提供了一种理论指导。

▲介绍几种可供选择的光学信息处理系统

(详见书 344 - 346 页)

● 图像加减 (参见书 309—310 页)

其空间滤波器为一余弦光栅。



● 图像微分 (参见书 311—312 页)

其空间滤波器为一复合余弦光栅。



▲ 图像微分的数学描写

(1) 设图像函数为 $\tilde{t}(x, y)$,

则其微分运算为

$$\Delta \tilde{t} = \tilde{t}(x + \Delta x, y + \Delta y) - \tilde{t}(x, y),$$

从光学眼光看,

$$\tilde{t}(x + \Delta x, y + \Delta y) \quad \text{图像微移} \quad -(\Delta x, \Delta y);$$

“-”号, 两幅像场相位差 π .

(2) 选择复合光栅为滤波器, 实现上述“两步”。

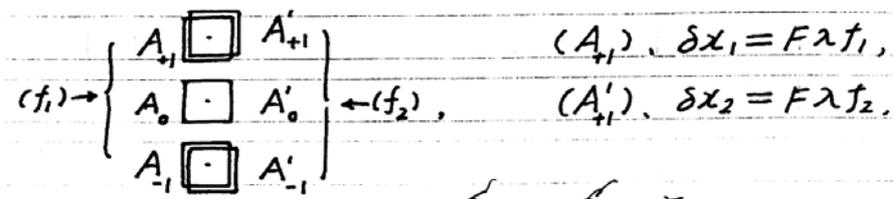
$$\tilde{H}(u, v) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f_1 u + t_2 \cos 2\pi f_2 u,$$

一般 $t_1 = t_2$,

当有 $\Delta f = (f_2 - f_1) \ll f_1, f_2$,

例如 $f_1 = 50 \text{ mm}^{-1}, f_2 = 52 \text{ mm}^{-1}, \Delta f = 2 \text{ mm}^{-1}$.

于是, 在 4F 系统中便输出 5 幅“原像”:



这实现了“微移”——位错

$$\text{其位错量} \quad \Delta x = F \lambda \Delta f = 200 \text{ mm} \times 600 \text{ nm} \times 2 \text{ mm}^{-1}$$

$$\approx 0.24 \text{ mm}.$$

(3) 再位移复合光栅（滤波器）、 Δu ，以至
 (A_{+1}) 图像与 (A'_{+1}) 图像分别响应不同的相移量：

$$\delta\varphi_1 = 2\pi f_1 \Delta u, \quad \delta\varphi_2 = 2\pi f_2 \Delta u,$$

故 两幅像场的相位差

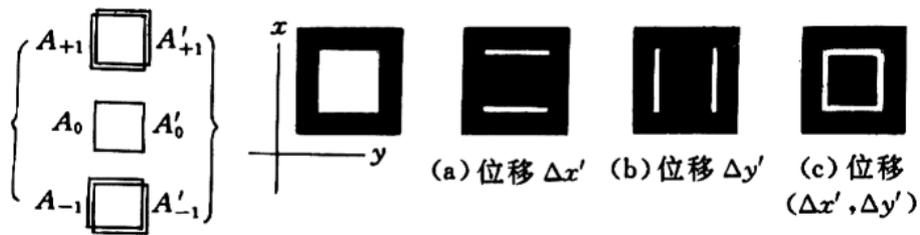
$$\Delta\varphi = 2\pi \Delta f \Delta u$$

令 $\Delta\varphi = \pi$ 以实现第二步 相减，

$$\text{估算 } \Delta u_\pi \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta f} \approx 0.25 \text{mm}.$$

——这提供了“位移系统定位精度”的根据。

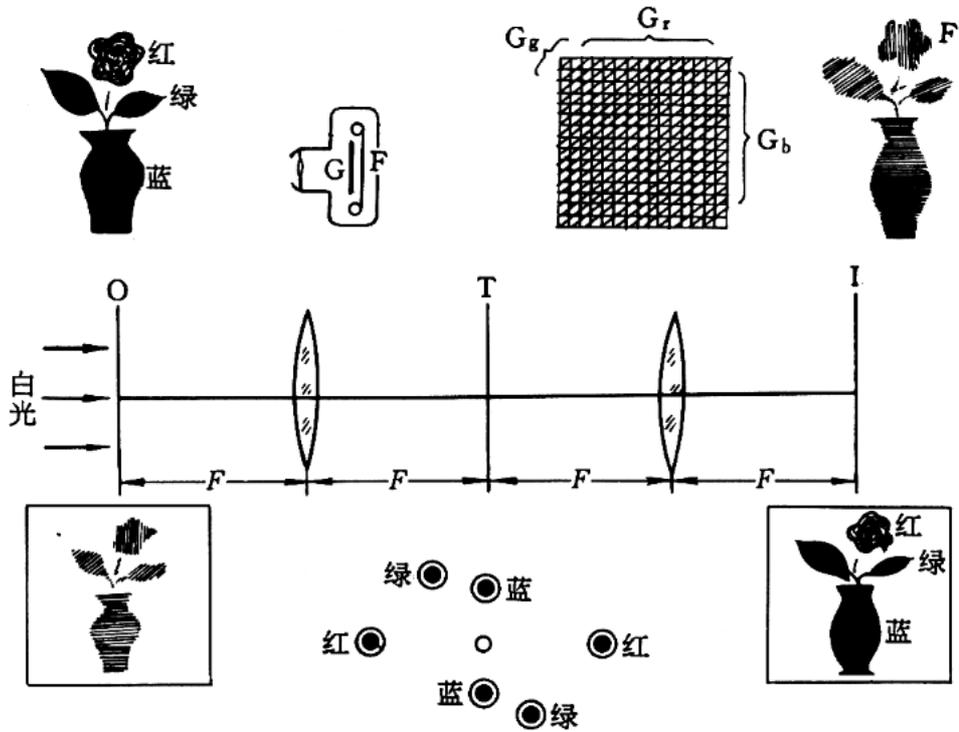
▲ 标准测试实验



● 显色滤波 (θ 调制实验)

输入图像	频谱面			输出图像
	\bar{U}_1	滤波器	\bar{U}_2	

● 黑白胶卷显示彩色图像（参见书 313—314 页）



- 蓝 G , 水平;
- 红 G , 垂直;
- 绿 G , 斜向。

魔片 G : 调制光栅

三原色、三个不同取向,

“三三栅” 编码

6.9 泽尼克的相衬法

- 相位物 •相衬法原理 •相衬原理的实验演示
- 弱相位条件下的线性调制 •相衬法内涵双光场干涉
- 相衬法的数值模拟 •历史注记 •两点改进

相衬法 Phase contrast method, 1935 年提出;
相衬显微镜, 第一台诞生, 1941 年;
获 Nobel 物理奖, 1953 年, Frits Zernike.

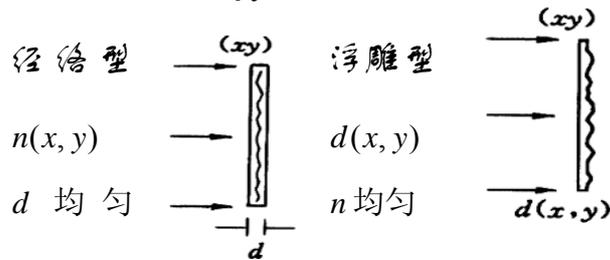
● 相位物 Phase objects.

高度透明物 $\tilde{t}(x, y) \approx e^{i\varphi(x, y)}$,

其物性信息, 集中被反映在相位函数 $\varphi(x, y)$.

两种基本类型:

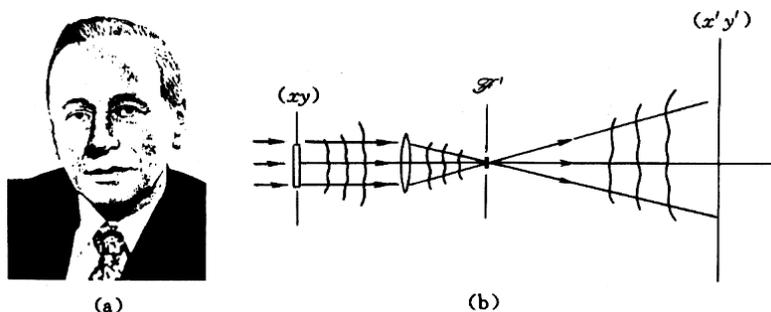
$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} nd,$$



自然还有 混和型 $n(x, y) \cdot d(x, y)$.

- 相位物广泛地存在于
生物切片, 晶体切片, 凝聚态薄膜, ...
- 一台相衬显微镜 已经成为 医学研究、生物学研究
具有现代实验水平 一种标识。
- 注意 实际样品多少有点吸收, 含微弱的振幅分布,
不可能是“纯相位物”。

● 相衬法原理



(1) 若不添加任何滤波器, 则

$$\text{物场 } \tilde{U}_0(x, y) = A_1 \tilde{t}(x, y) = A_1 e^{i\varphi(x, y)}$$

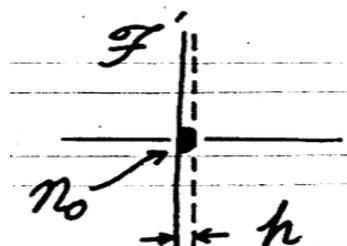
$$\text{像场 } \tilde{U}_i(x', y') \propto \tilde{U}_0(x', y') = A_1 e^{i\varphi(x', y')}$$

$$\text{光场分布 } I(x', y') = \tilde{U}_i \cdot \tilde{U}_i^* \propto A_1^2, \quad (\text{设 } V = 1).$$

均匀一片, 无强度起伏, 丢失相位信息。

(2) 若在后焦点 (零级谱斑) 添加相移滴,

$$\text{相移量 } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_0 - 1)h$$



则像场 (干涉场) 内部的相位关系发生了变化。让我们分析其变化及后果:

展开物函数

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0(x, y) &= A_1 e^{i\varphi(x, y)} \\ &= A_1 \left[1 + i\varphi(x, y) - \frac{1}{2}\varphi^2(x, y) - \frac{i}{6}\varphi^3 + \dots \right] \\ &= A_1 + A_1 \left[i\varphi(x, y) - \frac{1}{2}\varphi^2(x, y) - \dots \right],\end{aligned}$$

反映在谱面上
↓
↓

0 级谱斑，
强谱斑，
(本底)。
弥漫于谱面，
弱谱分布，
(信息)。

- (3) 计及 0 级谱斑的相移——须知，点源的相移将波及整个像面，可谓牵一发而动全身。换句话说，谱面上的点相移将导致与其相应的空间频率信息的相移。数学描写：

$$\text{本底 } A_1 \text{ 项} \longrightarrow A_1 e^{i\delta},$$

$$\text{于是, 新的物场 } \tilde{U}'_0 = A_1 e^{i\delta} + A_1 \left[i\tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\tilde{\varphi}^2 + \dots \right],$$

$$\text{即 新的像场 } \tilde{U}'_i(x', y') \propto \tilde{U}'_0(x', y')$$

$$= A_1 (e^{i\delta} - 1) + A_1 + A_1 \left[i\tilde{\varphi} - \frac{1}{2}\tilde{\varphi}^2 + \dots \right]$$

$$= A_1 [(e^{i\delta} - 1) + e^{i\varphi(x', y')}],$$

有 像面光强分布为

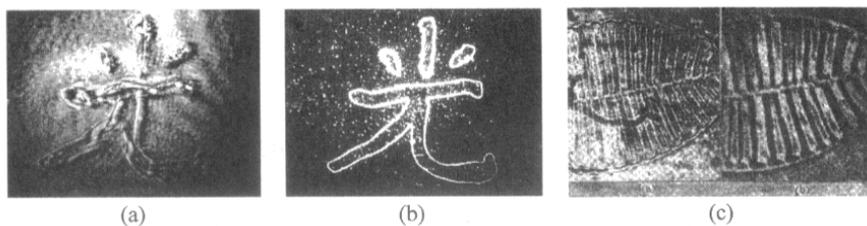
$$I'(x', y') = \tilde{U}'_i \cdot \tilde{U}'_i^*$$

$$\propto A_1^2 [3 + 2(\sin \delta \cdot \sin \tilde{\varphi} + \cos \delta \cdot \cos \tilde{\varphi} - \cos \tilde{\varphi} - \cos \delta)],$$

$$\text{该高兴了, } I'_i(x', y') \text{ —— } \tilde{\varphi}(x', y'),$$

物相位信息已经反映到可观测的光强分布上了。

● 相衬原理的实验演示



● 弱相位条件下的近似，为了线性调制

即 考虑近似条件 $\tilde{\varphi} < 0.4rad$,

有 $\cos \tilde{\varphi} \approx 1$, $\sin \tilde{\varphi} \approx \tilde{\varphi}$,

于是 $I'(x', y') \propto A_1^2(1 + 2 \sin \delta \cdot \varphi(x', y'))$

这说明 两者之间呈线性关系，

样品上的相位信息，线性地调制了像面上的光强分布。这有利于实验结果分析。

▲ 调制灵敏度——取决于系数 $2 \sin \delta$,

可谓之相衬度（相移引来反衬度）

$$\gamma = 2 \sin \delta$$

δ	:	$\frac{\pi}{2}$,	$\frac{\pi}{3}$,	$\frac{\pi}{6}$,	$\frac{3}{2}\pi$,	π
γ	:	+2 ,	$\sqrt{3}$,	1 ,	-2 ,	0
		正相衬			负相衬	

▲ 综上所述，

• 一般情况下，即使不满足 $\tilde{\varphi} < 0.4rad$ 条件，也能在像面上出现强度起伏。
只不过，这时呈非线性关系，不便于实验分析。

• 不必苛求相位滴（板）的相移量 $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, 其它取值也行，例如

$\delta = \frac{\pi}{3}$, 只不过 γ 值稍有下降。

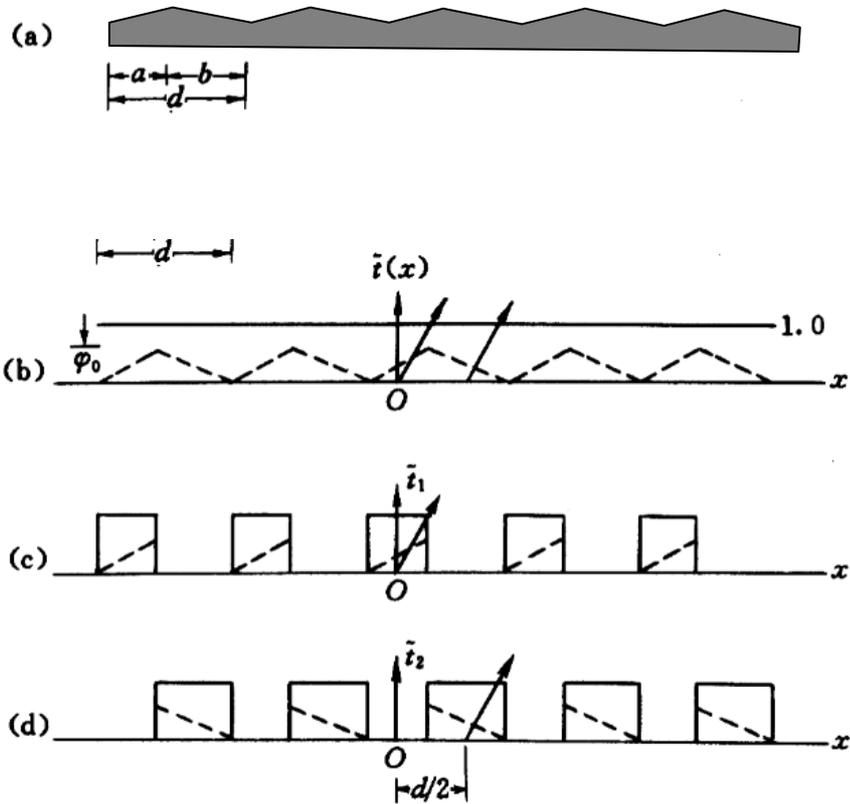
● 相衬法内涵双光场干涉

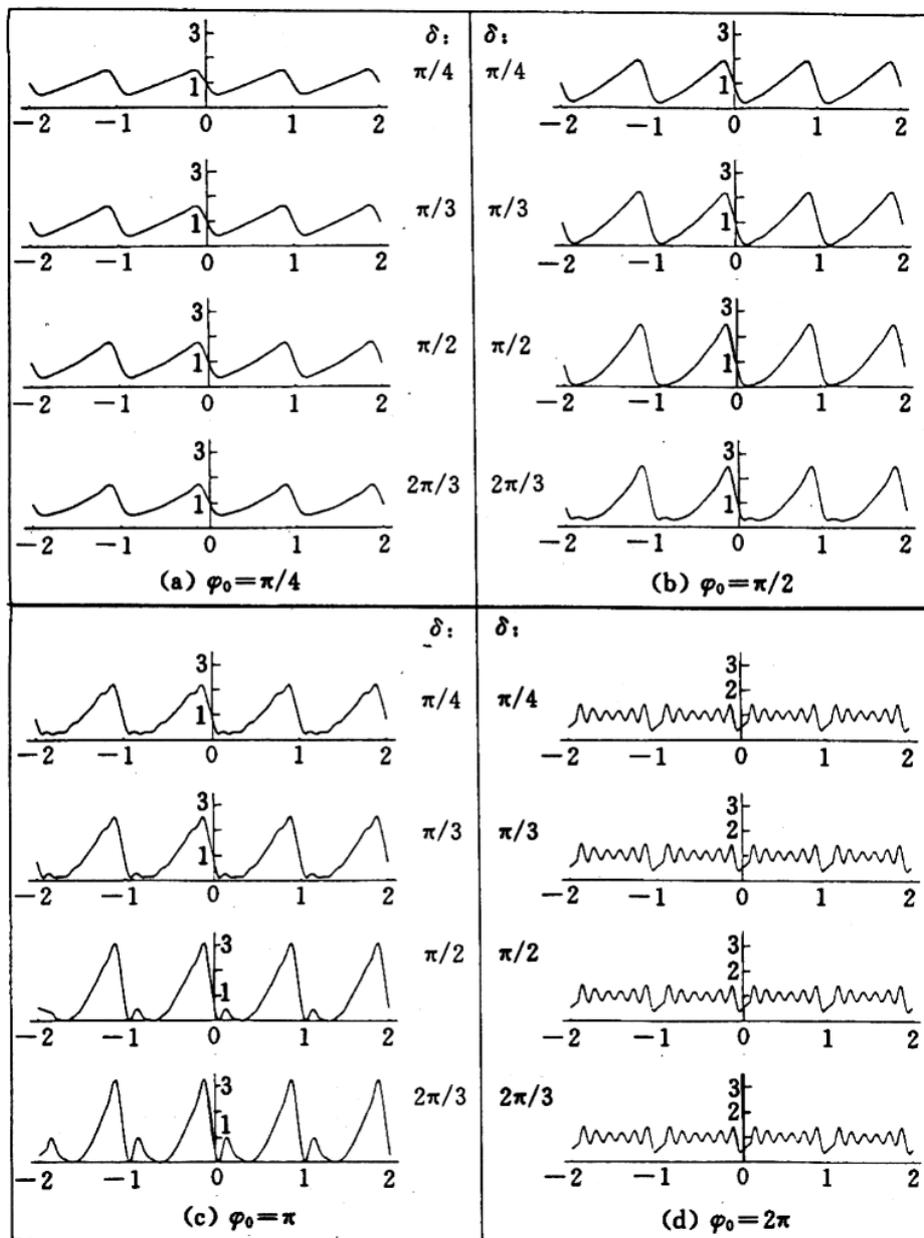
$$\begin{aligned}\tilde{U}_I(x', y') &= A'_1(e^{i\delta} - 1) + A'_1 e^{i\varphi(x', y')} \\ &= \tilde{U}_r + \tilde{U}_0(x', y'),\end{aligned}$$

其中，原物光波 \tilde{u}_0 ，自生参考光波 \tilde{u}_r ，

$$\tilde{U}_r = A'_1(e^{i\delta} - 1) = A'_1 \cdot 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot e^{i(\frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2})}.$$

● 相衬法的数值模拟





● 历史注记（参见书 321、322 页）

- ▲(1) 泽尼克于 1935 年提出相衬法，他发明的第一台相衬显微镜于 1941 年问世，1942 年他又发表了关于相衬法的一总结性论文，题目是——

Phase Contrast, A New Method for the Microscopic Observation of Transparent Objects.

(相衬，一种新的观察透明物的显微镜方法。)

——Frits Zernike, *Physica*, 1942.

- (2) 泽尼克获 1953 年诺贝尔物理学奖，给予他诺贝尔奖的授辞是这样表述的：

Professor Zernike. The Royal Academy of Science has awarded you the Nobel Prize in Physics for your eminent *method of phase contrast* and especially for your invention of the *Phase-contrast microscope*. (泽尼克教授，皇家科学学会为你杰出的“相衬法”，特别是为你发明了“相衬显微镜”，而已授予你诺贝尔物理学奖。)

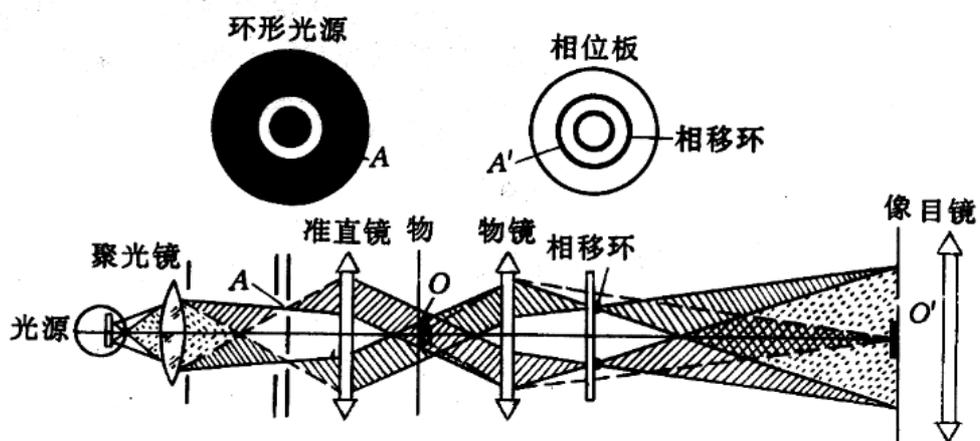
I now ask you to receive the prize from the hand of His Majesty. (我现在请你从陛下手中接受这个奖赏。)

- (3) 获奖后，按惯例泽尼克向公众作了一个长长的演讲，其题目为
How I discovered phase contrast? (我怎样发现相衬?)

——*Nobel Lecture*, December 11, 1953

- ▲ On looking back to this event, I am impressed by the great limitations of the human mind. How quick are we to learn, that is, to imitate what others have done or thought before. And how slow to understand, that is, to see the deeper connections. Slowest of all, however, are we in inventing new connections or even in applying old ideas in a new field.

▲一台实际相衬显微镜的光学系统



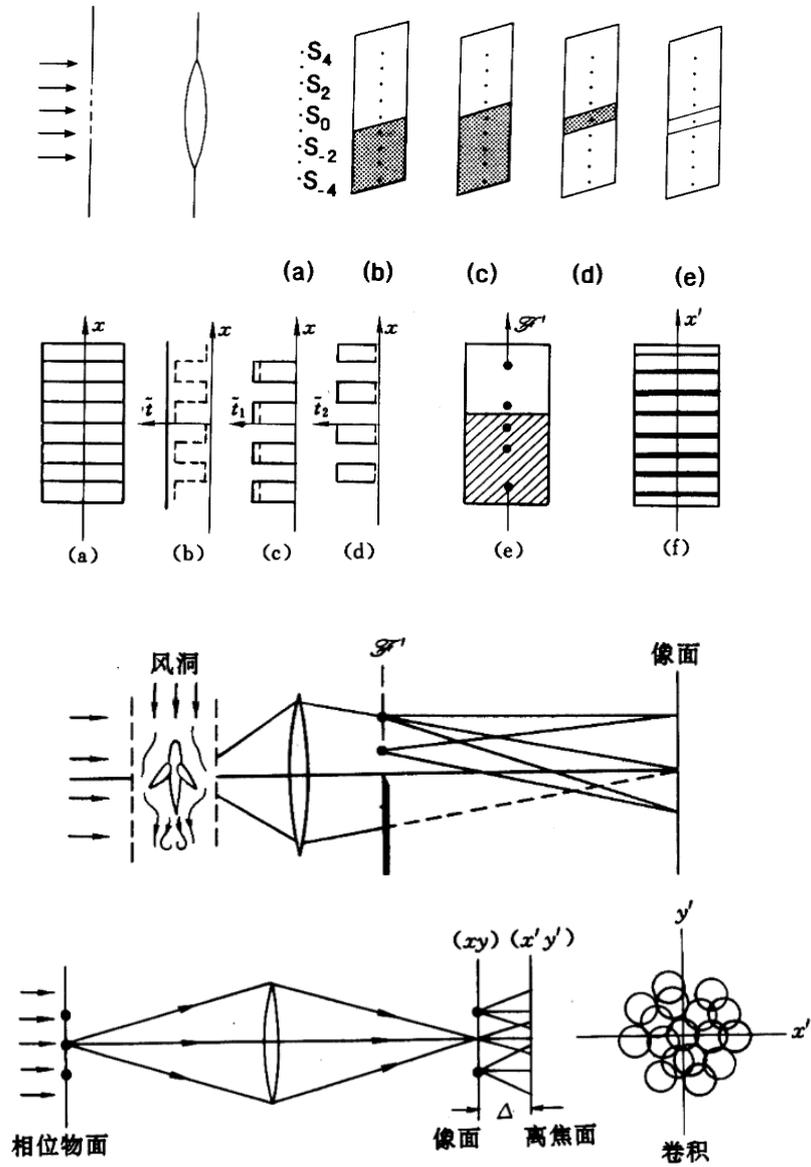
环状光源

相移环

6.10 相位物可视化的其它光学方法

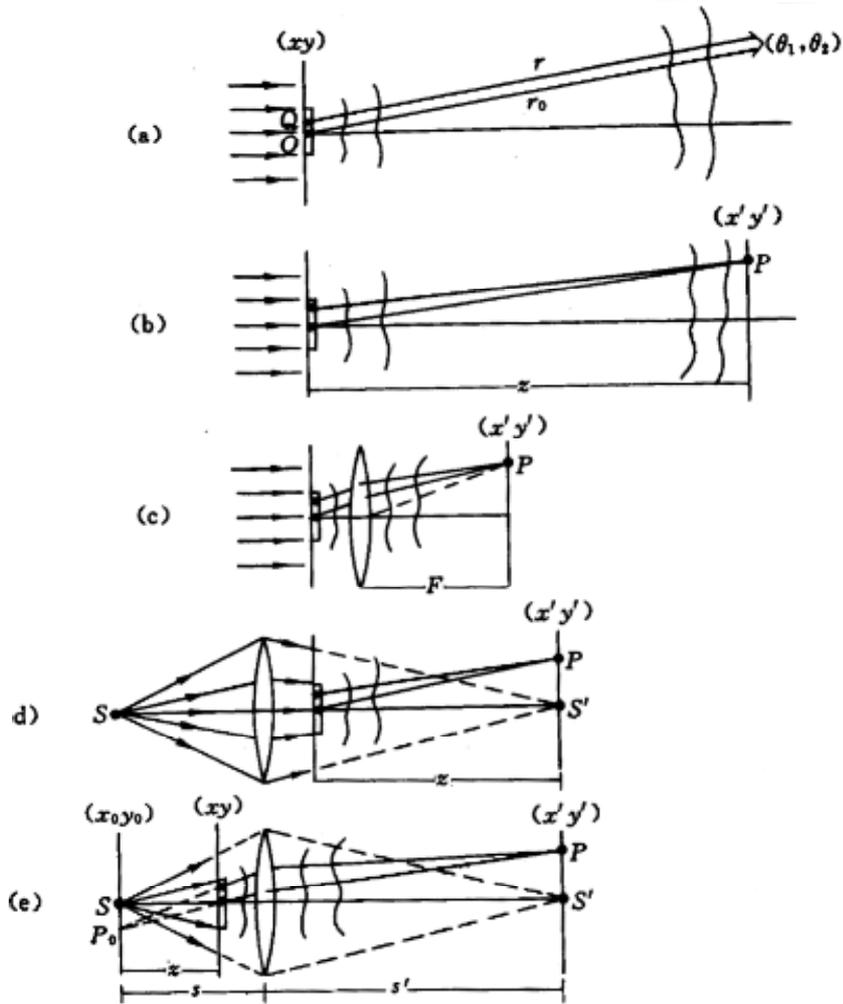
•暗场法 •纹影法 •微分法 •离焦法

(详见书 323 - 326 页)



6.11 夫琅禾费衍射的普遍定义与多种装置

- 引言 • 五种装置 • \mathcal{F} 衍射场的标准形式 • 无透镜远场接收
- 透镜后焦面接收 • 会聚球面波照明而像面接收
- 发散球面波照明而像面接收 • 小结



1. 夫琅禾费衍射场的标准形式

——来自定义装置 平面波照明，无穷远接收：

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) \approx \frac{-i}{\lambda r_0} \iint A_1 \tilde{t}(x, y) e^{ikr} dx dy$$

$$\begin{aligned} \text{改写 } e^{ikr} &= e^{ikr_0} \cdot e^{ik(r-r_0)} \\ &= e^{ikr_0} \cdot e^{-ik(\sin\theta_1 x + \sin\theta_2 y)} \end{aligned}$$

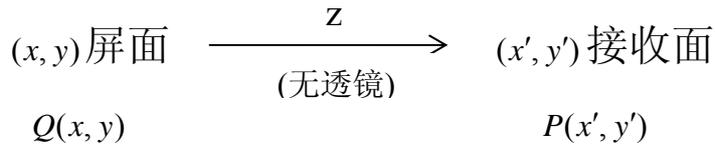
于是

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) \approx \frac{-i}{\lambda r_0} e^{ikr_0(\theta_1, \theta_2)} A_1 \iint \tilde{t}(x, y) \cdot e^{-ik(\sin\theta_1 x + \sin\theta_2 y)} dx dy$$

- 它以 (屏函数 × 线性相因子) 作为衍射积分的被积函数，给出了夫琅禾费衍射场的标准形式；
- 与费涅耳衍射积分——含二次相因子、非线性相因子，从理论上划清了界限。

$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2)$ —— 衍射场的角分布， **角谱**

2. 远场接收装置



平面波照明，远场接收：

$$\tilde{U}(x', y') \approx \frac{-i}{\lambda r_0} \iint A_1 \tilde{t}(x, y) e^{ikr} dx dy$$

其中，傍轴条件下，

$$r \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z}$$

再其中， $r_0(x', y') \approx z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z}$

于是 $\tilde{U}(x', y') \approx \frac{-i}{\lambda r_0} A_1 e^{ikr_0(x', y')} \iint \tilde{t} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{x'x+yy'}{z}\right)} dx dy$

费涅耳衍射

当远场条件被满足，

即 $\lambda z \gg (x^2 + y^2)$ ，许可略去二次相因子，

$$\tilde{U}(x', y') \approx \frac{-i}{\lambda r_0} A_1 e^{ikr_0(x', y')} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-ik\frac{x'x+yy'}{z}} dx dy$$

夫琅禾费衍射

这是无透镜远场系统。省了一个透镜自有优点，倘若实验室长度空间允许的话。

3. 会聚球面波照明，而像面接收

$$\text{衍射场} \quad \tilde{U}(x', y') \approx \frac{-i}{\lambda r_0} \iint \tilde{t} \cdot \tilde{U}_1 \cdot e^{ikr} dx dy$$

入射于屏的光场是会聚于 S' 点的球面波前函数，为

$$\tilde{U}_1(x, y) \approx A_1 e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}} \quad \leftarrow \text{恰巧抵消}$$

$$\text{衍射积分核} \quad e^{ikr} \approx e^{ik \left(\frac{x^2+y^2}{2z} + \frac{x'^2+y'^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z} \right)} e^{ikz},$$

又注意到，其中参考光程：

$$r_0(x', y') \approx z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z},$$

于是

$$\tilde{U}(x', y') \approx \frac{-i}{\lambda r_0} A_1 e^{ikr_0(x', y')} \cdot \iint \tilde{t}(x, y) e^{-ik \frac{x'x+y'y}{z}} dx dy,$$

这符合夫琅禾费衍射场标准形式。

教材、文献中的夫琅禾费照片多数来自此类装置。

其优点是：仅要求傍轴条件，且便于调节图样大小。

强调“**像面**”条件。

4. 发散球面波照明，像面接收：

发散傍轴球面波前函数 $\tilde{U}_1(x, y) \approx A_1 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$ ，

衍射场 $\tilde{U}(x', y') \approx \frac{-i}{\lambda z} \iint \tilde{t} A_1 e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}} e^{ikL(QP)} dx dy$

换算： $L(QP) = L(P_0QP) - L(P_0Q)$ 。 $\left. \begin{array}{l} P_0(x_0, y_0) \\ P(x', y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{一对} \\ \text{共轭点} \end{array}$

物像等光程性， $L(P_0QP) = L(P_0OP) = L(P_0P)$ ，

傍轴近似，

$$-L(P_0Q) \approx -\left(z + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z} + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{x_0x + y_0y}{z} \right),$$

结果，被积函数中，先后有 $e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$ ， $e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$ ，

恰巧抵消。

这衍射场被简化为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x', y') &\approx \frac{-i}{\lambda z} A_1 e^{-ik(z + \frac{x_0^2+y_0^2}{2z})} \iint \tilde{t} \cdot e^{ik \frac{x_0x + y_0y}{z}} dx dy \\ &= \frac{-i}{\lambda z} A_1 e^{-ik(z + \frac{x_0^2+y_0^2}{2z})} \iint \tilde{t}(x, y) e^{ik \frac{x'x + y'y}{Vz}} dx dy \end{aligned}$$

符合夫琅禾费衍射场标准形式。

直观理解：光的可逆性图像。

$$\text{横向放大率 } V = \frac{x'}{x_0}, \frac{y'}{y_0}$$

5. 平面波照明，后焦面接收。

(十分熟悉，结论显然，满足夫琅禾费衍射场标准形式)。

6. 函数 $\tilde{t}(x, y)$ 的 *Fourier* 积分变换

$$\tilde{t}(x, y) \longleftrightarrow \tilde{T}(f_x, f_y)$$

$$\tilde{T}(f_x, f_y) = \iint \tilde{t}(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

对比

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) \approx C e^{ik \cdot r_0(\theta_1, \theta_2)} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-ik(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)} dx dy$$

可见，两者具有相同的积分结构。

若 令 $(2\pi f_x, 2\pi f_y) = (k \sin \theta_1, k \sin \theta_2)$ (*)

则有 $\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) \approx C e^{ikr_0} \cdot \mathcal{F} \{ \tilde{t}(x, y) \}$,

改写 (*) 式, $(\sin \theta_1, \sin \theta_2) = (\lambda f_x, \lambda f_y)$,

即 夫琅禾费衍射场点位置与空间频率一一对应;

或者 $(x', y') = (\lambda z f_x, \lambda z f_y)$

这就普遍地论证了夫琅禾费衍射实现了屏函数的傅里叶变换。

6.12 傅里叶变换 & δ 函数

- 引言 • 傅里叶积分变换 • 若干典型函数的频谱
- 傅里叶变换的性质和定理 • δ 函数
- δ 函数的性质及其傅里叶变换
- 例题——测定 OTF 的一种方法

引言

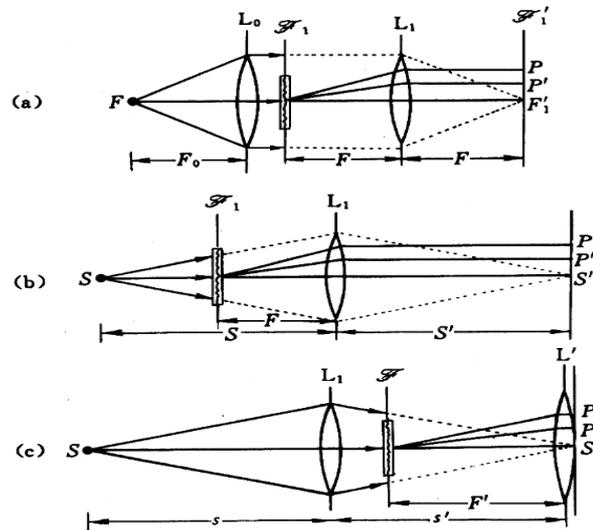
在这一节，我们将以简明的格式，全面地罗列傅里叶变换和 δ 函数及其主要性质，着重于从光学眼光看待那些公式和数学定理，给出相应的光学显示或光学模拟，这无疑有助于生动地理解、掌握傅里叶变换和 δ 函数，其意义那就不仅仅限于光学领域了。至于那些公式的推导和定理的证明，本书并未全部给出，读者可进一步查阅有关的数学书籍，如果必要的话。当然，那些公式或定理之间是互相关联的，若确认了前者也有可能导出后者。

可详阅 书 331—343 页。

6.13 准确获得物频谱的三种系统

● 三种等光程系统

在相干成像系统或相干光学信息处理系统中，直接关注的是衍射场的复振幅分布。为了使像面接收的 \mathcal{F} 衍射场是纯粹的屏函数傅里叶频谱，就应设法让(6.211)式中的系数 \tilde{P} 成为与 (x', y') 无关的常数。为此，设计了三种等光程的光路，如图6.64所示。



于是， \mathcal{F} 衍射场

$$\tilde{U}(x', y') = \tilde{P}(x', y') \cdot \mathcal{F} \{ \tilde{t}(x, y) \}$$

$$\tilde{U}(x', y') = \tilde{c} \cdot \mathcal{F} \{ \tilde{t}(x, y) \}, \quad \text{准确的物频谱}$$

$$(f_x, f_y) = \left(\frac{x'}{\lambda z}, \frac{y'}{\lambda z} \right),$$

$$\tilde{c} = \frac{-iA}{\lambda z}.$$

● 三种相干光学信息处理系统

一个用于信息处理的相干光学系统，是以空间滤波器为界而分为前后两部分，以实现两次光学傅里叶变换。人们可以选择图 6.64 中之一种作为系统的前一部分；由于第二次变换没有特设的照明光波，自然地选中图 6.64(a)作为系统的后一部分。于是，构成了三种可供选择的相干光学信息处理系统，如图 6.65 所示。

