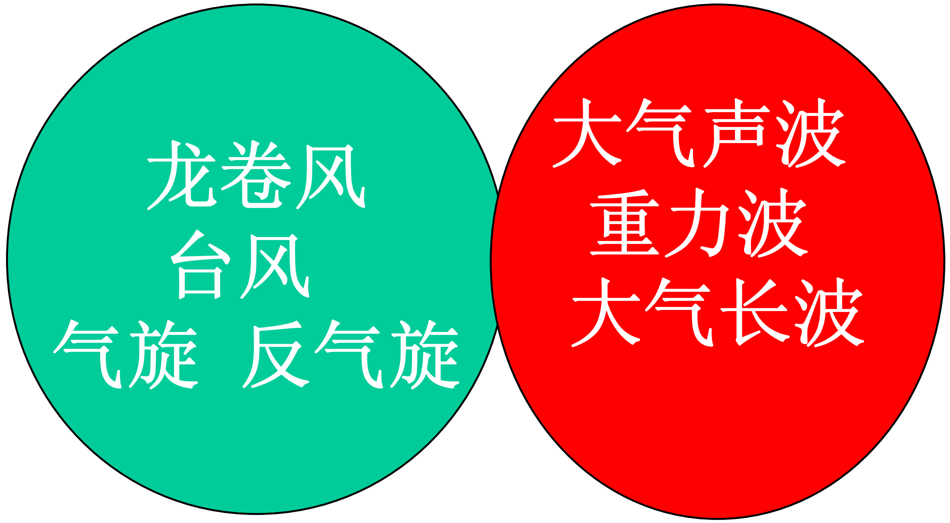
第 7 章 大气中的波动

涡旋与波动是大气运动的两种基本形态. 在大尺度上, 两种形态又难以分开.



波动： **振动在介质中的传播现象，称为波动：**

某种信号（能量）以某种速度从介质的一地传播到另一地。单个质点本身并未随着信号传播，只是在平衡位置附近振荡，有众多质点参与振荡，并将振荡传播出去。

§ 1 波动的基础知识

$$Ml\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -Mg\sin\vartheta$$

1、振动

$d^2\vartheta$ g $\text{in}\,\vartheta$

小ϑ: $\sin\vartheta \approx \vartheta$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \nu^2\vartheta = 0, \qquad \nu = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

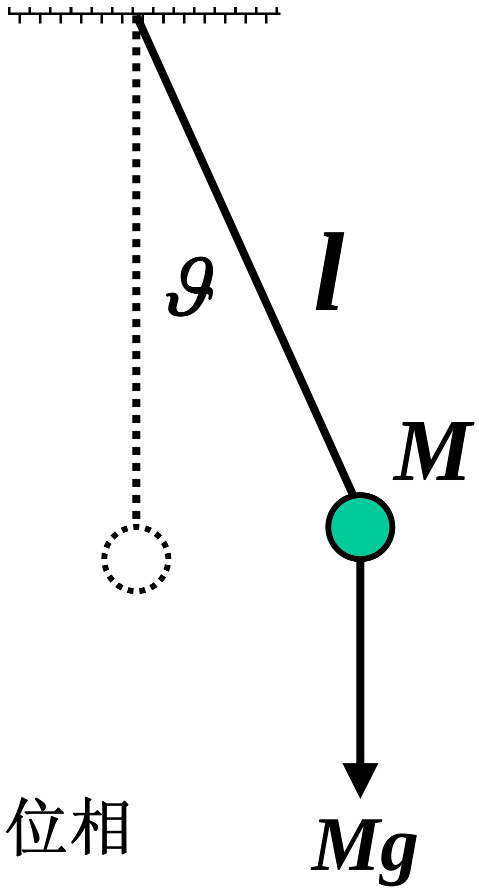
$$\vartheta = \vartheta_0\cos(\nu t - \alpha)$$

初位相

振幅

$\nu t - \alpha$ → 位相

$\nu T = 2\pi$, $T = \dfrac{2\pi}{\nu}$ ---周期;



2、简

$$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \nu t + \alpha)$$

固定点： φ 随时间振荡，时间波 **Temporal wave**

φ_0 ---振幅；　　　α ---点**x = 0** 的初位相

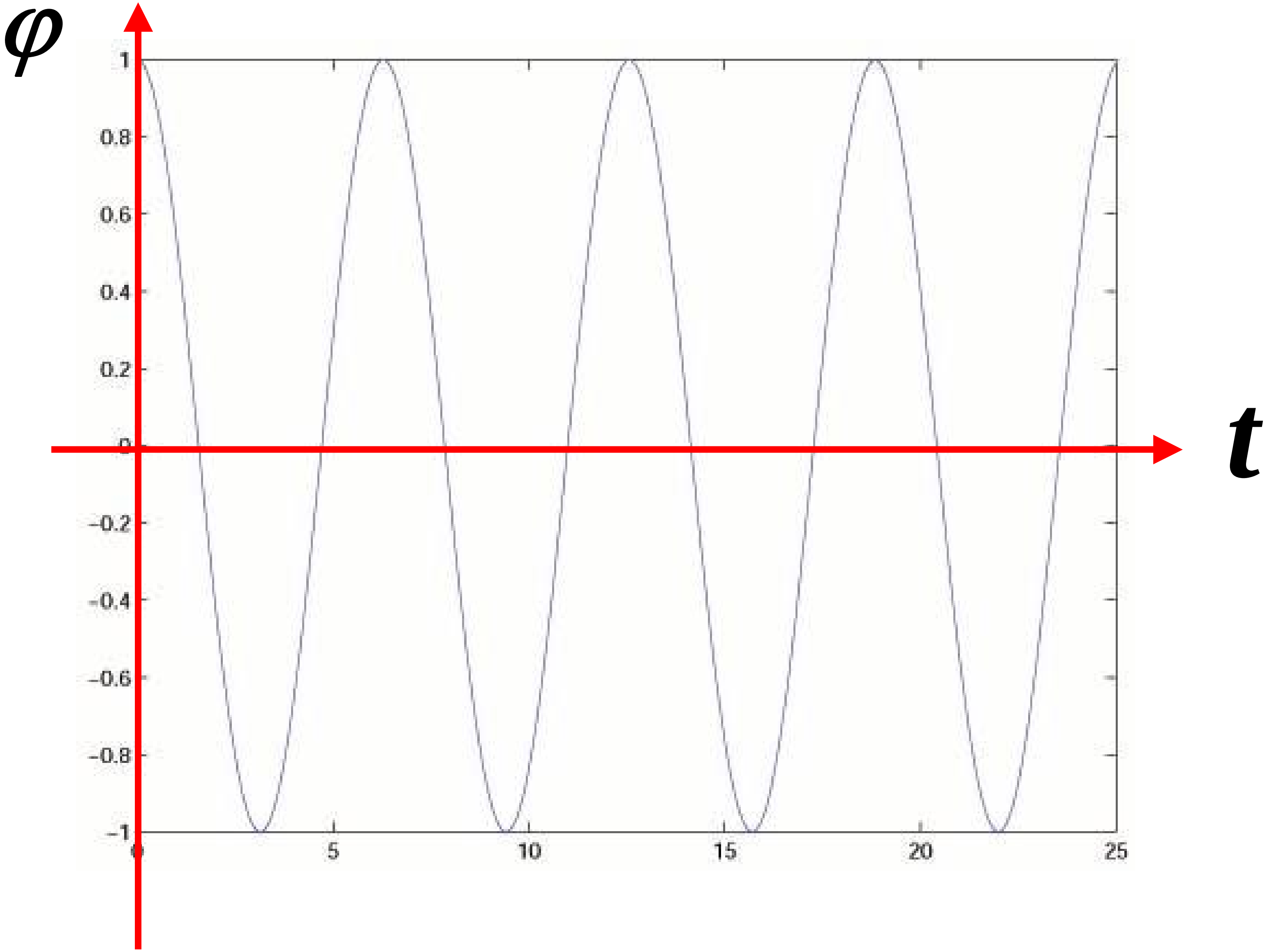
$$\nu T = 2\pi,\ T = \frac{2\pi}{\nu} - -\text{周期}$$　　ν ---频率；

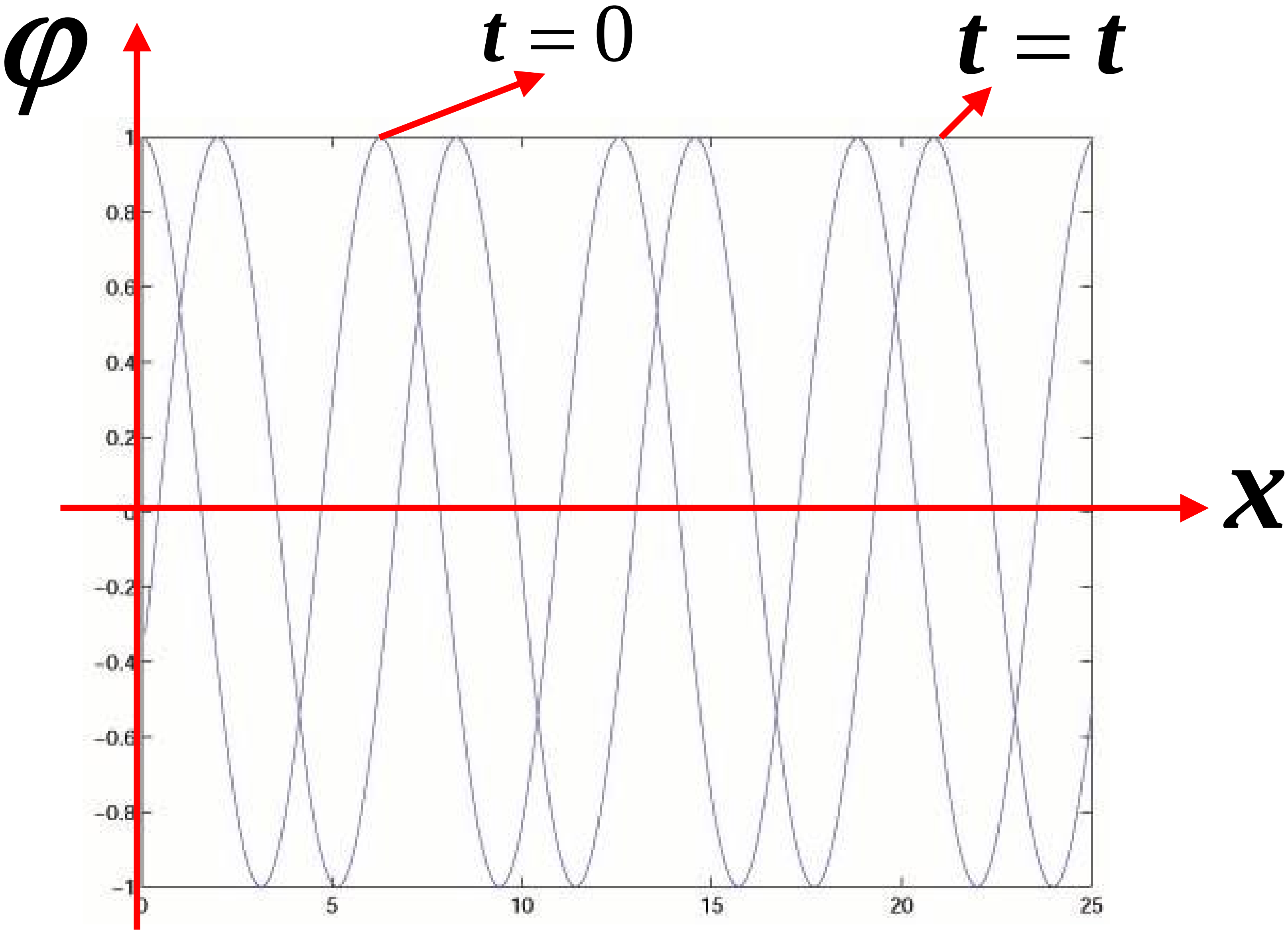
固定时刻： φ 随 **x** 振荡，空间波 。**Spatial wave**

φ_0 ---空间波的振幅；

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$ ---空间波的波长；　　$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ ---圆波数

固定点： φ 随时间振荡，时间波 。**Temporal wave**





φ
t = 0
t = t
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
5
10
15
20
25

$$c=\frac{\lambda}{T}=\frac{2\pi}{k}/\frac{2\pi}{\nu}=\frac{\nu}{k}$$

t=0： $$\varphi=\varphi_0\cos k\left(x+\frac{\alpha}{k}\right)$$

t=t： $$\varphi=\varphi_0\cos k\left(x-\frac{\nu}{k}t+\frac{\alpha}{k}\right)$$

它是t = 0 时刻的空间波向右移动 $\frac{\nu}{k}t$ 的距离的结果：

这就是波的传播，其传播速度 $\frac{\nu}{k}$。

$$\theta=kx-\nu t+\alpha$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt}=0$$

$$c\equiv\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial\theta}{\partial t}/\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\nu}{k}$$

波速就是等位相面的传播速度

二维平面波

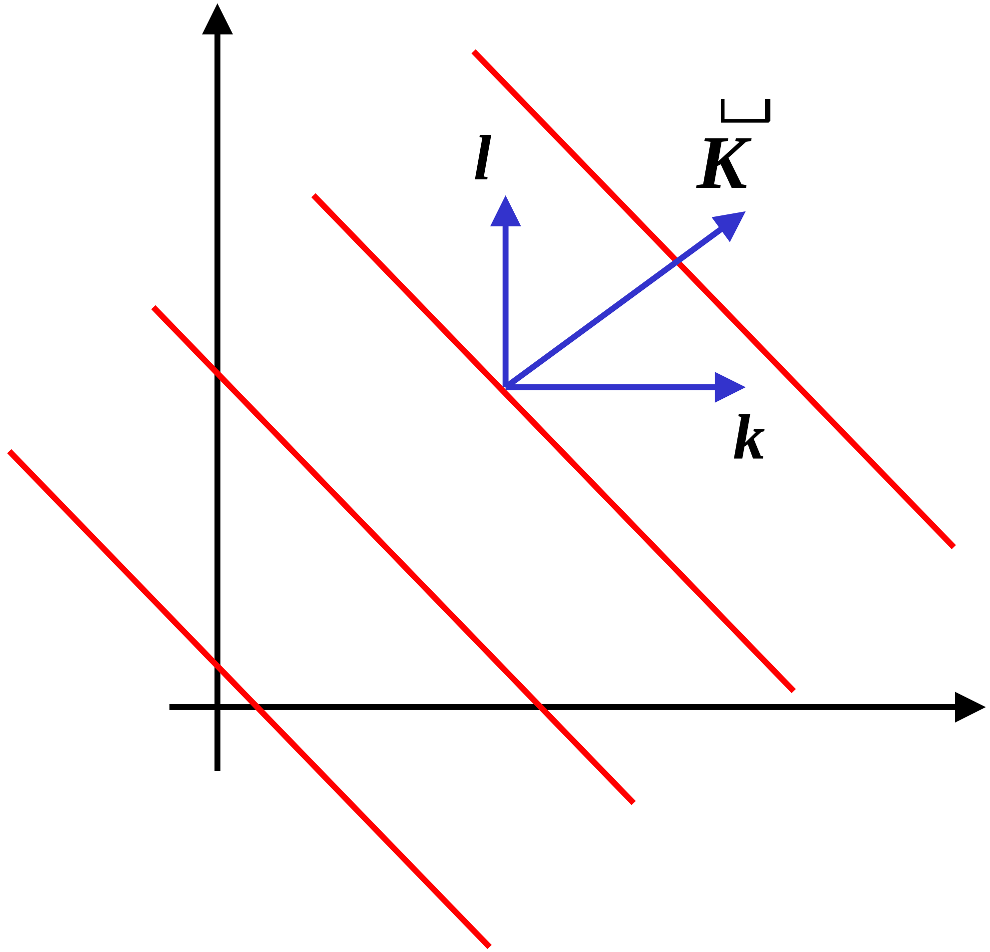
$$\varphi(x,y,t)=\varphi_0\cos(kx+ly-\nu t+\alpha)$$

$$c_x=\frac{L_x}{T}=\frac{2\pi}{k}/\frac{2\pi}{\nu}=\frac{\nu}{k};$$

$$c_y=\frac{L_y}{T}=\frac{2\pi}{l}/\frac{2\pi}{\nu}=\frac{\nu}{l};$$

$$C=\frac{L}{T}=\frac{2\pi}{K}/\frac{2\pi}{\nu}=\frac{\nu}{K};$$

$$C\neq\sqrt{c_x{}^2+c_y{}^2}$$



二维平面波：

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0 \cos(kx + ly - \nu t + \alpha)$$

$$kL_x = 2\pi, \; L_x - x\text{向波长}, \; k = \frac{2\pi}{L_x}, \; x\text{向波数}$$

$$lL_y = 2\pi, \; L_y - y\text{向波长}, \; l = \frac{2\pi}{L_x}, \; y\text{向波数}$$

$$\nu T = 2\pi, \; T - \text{周期}, \; \nu = \frac{2\pi}{T}, \text{圆频率}$$

波数矢量：

$$\vec{K} = k\vec{i} + l\vec{j} = \nabla\theta, \qquad K = \sqrt{k^2 + l^2} = |\nabla\theta|$$

$$KL = 2\pi, \; L - \vec{K}\text{向波长}, \; K\text{为}\vec{K}\text{向波数}$$

3、波动方程与色散关系

波动方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

平面波解

$$\varphi_k = A \exp\left[i\left(kx - \nu t\right)\right]$$

色散关系

$$\nu = -i\delta k^2$$

总解

$$\varphi = \int A(k) \exp[i(kx - \nu t)] dk$$

4. 色散波与耗散波

$$\nu = -i\delta k^2$$

当 $\delta = i$ 时，波动是色散的：
即波的相速与波长有关。

$$\nu = -k^2,$$

$$c = \frac{\nu}{k} = -k,$$

$$c_g = -2k$$

当 $\delta = 1$ 时，波动是耗散型的：

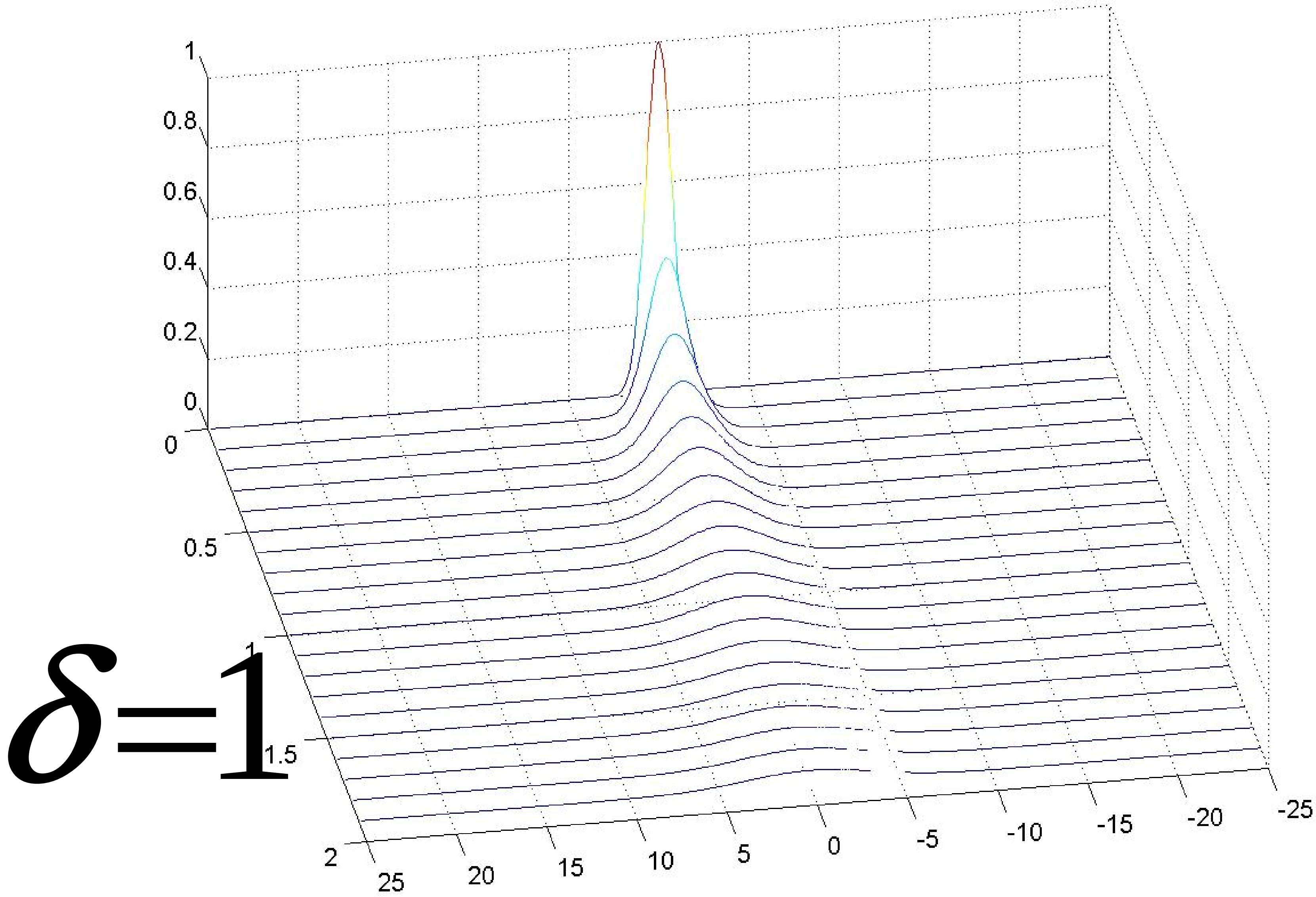
$$\varphi = Ae^{-k^2 t} e^{ikx}$$

$$\delta = i$$

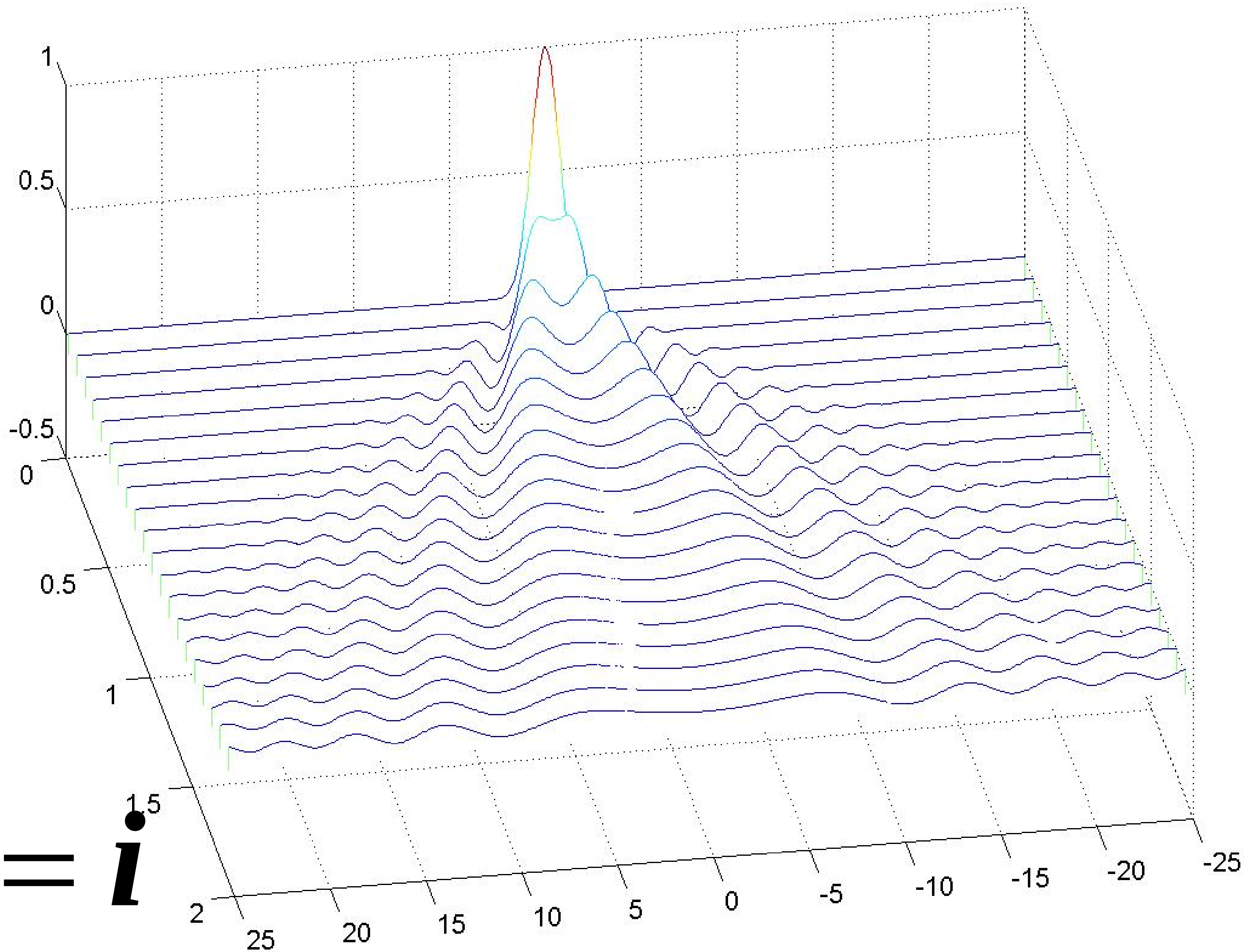
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\varphi(x,0) = \exp\left(-x^2\right)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi\delta t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4\pi\delta t}\right)$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
δ=1



$$\delta = i$$

5、群速度:

例子：两个振幅相同，但波数和频率略为不同的波的叠加

$$\varphi = e^{i[(k+\Delta k)x-(\nu+\Delta\nu)t]} + e^{i[(k-\Delta k)x-(\nu-\Delta\nu)t]}$$

$$= e^{i(kx-\nu t)}\left(e^{i(\Delta kx-\Delta\nu t)} + e^{-i(\Delta kx-\Delta\nu t)}\right)$$

$$= 2\cos(\Delta kx - \Delta\nu t)\exp i(kx - \nu t)$$

调幅波，包络　　　　载波

$$c = \frac{\nu}{k}$$ ---载波传播速度，相速

$$c_g = \frac{\Delta\nu}{\Delta k} = \frac{\partial\nu}{\partial k}$$ ---包络传播速度，群速，振幅或能量传播速度

§2 小扰动法

基本思想：

1。将大气中的波动看成是在基本状态上叠加的振幅很小的扰动；

2。基本量满足原来的方程；

3、扰动量的二阶及二阶以上的项相对于基态量和扰动的一阶量要小，可以略去。

例子：$\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

1。 $u=\overline{u}+u^{'}$

2。 $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u+u^{'}\right)+\left(\overline{u}+u'\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u}+u'\right)=0$$

3。扰动方程： $\dfrac{\partial u^{'}}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial u^{'}}{\partial x}+u^{'}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}+u^{'}\dfrac{\partial u^{'}}{\partial x}=0$

4。小扰动的线性方程 $\dfrac{\partial u^{'}}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial u^{'}}{\partial x}+u^{'}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}=0$