大气动力学基础试题

参考答案

一、名词解释

湍流粘性力----当大气运动处于湍流状态时，大气中充满了大大小小的湍涡。跟分子运动一样，这些湍涡的运动为随机运动。由于这些湍涡的随机运动导致的它们与四周流体之间发生动量交换。这种动量交换的宏观效果就表现为粘性力，这种粘性力就是湍流粘性力。

β-平面----在局地直角坐标系中，为了模拟地球的球面效应，将科氏参数用如下的随 y 线性关系式

$$f = f_0 + \beta y$$

来代替 $f = 2\Omega\sin\varphi$。这里 $f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0$ 是参考纬度的科氏参数的值，$\beta = \dfrac{df}{dy} = \dfrac{2\Omega\cos\varphi_0}{a}$ 为常数。这就是 β-平面近似。在实际应用中，β-平面具有两点含义：（1）当 f 做系数时，$f = f_0 =$ 常数；（2）当 f 对 y 微分时，$\dfrac{df}{dy} = \beta =$ 常数。

热成风-----在某一地点，其高层地转风与低层地转风的矢量差，定义为热成风，它高低层间的平均水平温度梯度有关。在北半球，背热成风而立，高温在右，低温在左。

Ekman 泵------在大气边界层中，大尺度大气运动主要是气压梯度力、科氏力和摩擦力三力的平衡。在这三力的平衡下，大气质点的运动不再象自由大气那样沿着等压线流动，其流线与等压线成一交角并从高压流向低压。这样，在低压的地方，大气质量有幅合，其上空的大气就会上升，并将边界层大气挤到自由大气中；而在高压的地方，大气质量有幅散，其上空的大气就下沉，进而就将自由大气的质量吸入边界层。这种由于摩擦效应产生的边界层顶的上升或下沉运动，俗称为 Ekman 泵。

旋转减弱-----自由大气在 Ekman 泵的作用下，若无外部能量的供给，其涡度会随时间发生衰减，这种衰减就称为旋转减弱。

二、回答问题

1. 包辛尼斯克近似是针对大气密度所做的近似。它包含如下四点内容：（1）在水平运动方程中的气压梯度力项，其密度扰动可以忽略，用其平均值代替；（2）在垂直运动方程中，与浮力相关的密度扰动要加以考虑，不能忽略；（3）在连续性方程中，大气密度扰动的个别变化项可以忽略；（4）但热力学能量方程中，由密度扰动引起的能量变化与由于温度扰动变化引起的能量变化或者由于气压扰动变化引起的能量变化具有相同量级，不能忽略。这就是包辛尼斯克近似。

包辛尼斯克近似可以滤掉声波；因在此近似下流体是不可压的，从而将声波的产生机制去掉了。

2. P 坐标系就是用气压 P 取代局地直角坐标系中的垂直坐标 z 所得到的一种坐标系。使用 P 坐标系可以使大气运动方程的到极大的简化：大气水平运动方程中的气压梯度力项不再出现密度 ρ，同时，大气连续性方程在形式上与不可压体的连续性方程相同。除此之外，由于大气探测资料都是在等压面上获得的，这样使用 P 坐标系可以非常方便地应用大气观测资

料。

3.

三、解

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{V} &= \nabla\cdot\left(u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}\right)\\
&= \nabla u\cdot\vec{i}+u\nabla\cdot\vec{i}+\nabla v\cdot\vec{j}+v\nabla\cdot\vec{j}+\nabla w
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\nabla u\cdot\vec{i} &= \left(\frac{\vec{i}}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{\vec{j}}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\vec{i}\\
&= \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla v\cdot\vec{j} &= \left(\frac{\vec{i}}{r\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{\vec{j}}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\vec{k}\frac{\partial v}{\partial r}\right)\cdot\vec{j}\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla w\cdot\vec{k} &= \left(\frac{\vec{i}}{r\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda}+\frac{\vec{j}}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\vec{k}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\cdot\vec{k}\\
&= \frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{i} &= \left(\frac{\vec{i}}{r\cos\varphi}\cdot\frac{\partial\vec{i}}{\partial\lambda}+\frac{\vec{j}}{r}\cdot\frac{\partial\vec{i}}{\partial\varphi}+\vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{i}}{\partial r}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{j} &= \left(\frac{\vec{i}}{r\cos\varphi}\cdot\frac{\partial\vec{j}}{\partial\lambda}+\frac{\vec{j}}{r}\cdot\frac{\partial\vec{j}}{\partial\varphi}+\vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{j}}{\partial r}\right)\\
&= -\frac{1}{r}tg\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{k} &= \left(\frac{\vec{i}}{r\cos\varphi}\cdot\frac{\partial\vec{k}}{\partial\lambda}+\frac{\vec{j}}{r}\cdot\frac{\partial\vec{k}}{\partial\varphi}+\vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{k}}{\partial r}\right)\\
&= \frac{2}{r}
\end{aligned}
$$

最后，有

$$
\nabla\cdot\vec{v}=\frac{1}{r\cos\kappa}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2w}{r}-\frac{v}{r}tg\varphi
$$

四、解

（1）以科氏力的尺度为标准，将水平运动方程无量纲化，有

$$R_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)-v_1=-\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}-\frac{r}{f}u_1$$

$$R_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)+u_1=-\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}-\frac{r}{f}v_1$$

如果上式中 $R_0 = 1, \frac{r}{f} = 1$，即科氏力和气压梯度力是大项，而加速度和摩擦力是小项，这种力的平衡就称为准地转平衡。

（2）相应的准地转方程组为：

$$\frac{\partial u_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial u_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial u_g}{\partial y}-fv=-\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial v_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial v_g}{\partial y}+fu=-\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}=-\frac{RT}{p}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \phi}{\partial p}+\sigma\omega=0$$

式中

$$u_g\equiv-\frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial y};v_g\equiv\frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

（3）将（2）中的第二个方程作 $\frac{\partial}{\partial x}$ 运算，第一个方程作 $\frac{\partial}{\partial y}$ 运算，将所得方程相减，并使用 beta 平面近似，得到准地转涡度方程：

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial x}+v_g\frac{\partial \zeta_g}{\partial y}+\beta v_g = f_0\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

五、解

设其解的形式为：

$$\varphi_1 = A\exp[i(kx-\nu t)]$$

$$\varphi_3 = B\exp[i(kx-\nu t)]$$

$$\omega = C\exp[i(kx-\nu t)]$$

代入到扰动方程组后，有

$$\left(-i\nu+ikU_1+r\right)(-k^2)A-\frac{f}{\Delta p}C=0$$

$$\left(-i\nu+ikU_3+r\right)(-k^2)B+\frac{f}{\Delta p}C=0$$

$$\left(-i\nu+ikU_m\right)\left(A-B\right)+ikU_T\left(A+B\right)=\frac{\sigma\Delta p}{f}C$$

上面三个方程组是关于 A,B,C 的齐次代数方程组，其有非零解的条件为它们的系数行列式为零。这样给出

$$c=U_m-\frac{irk\left(k^2+\lambda^2\right)}{k^2\left(k^2+2\lambda^2\right)}\pm\delta^{\frac{1}{2}}$$

式中

$$\lambda^2=f^2/\left[\sigma(\Delta p)^2\right],\delta=-\frac{r^2k^2\lambda^4}{k^2\left(k^2+2\lambda^2\right)^2}-\frac{U_T^2\left(2\lambda^2-k^2\right)}{k^2+2\lambda^2}$$

因此，从上式可以得到在摩擦的作用下，不稳定的条件为

$$U_T \text{ f } r\left(2\lambda^2-k^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$