第七章　　大气中的波动

30、 应用正交模方法求下列波动方程的圆频率：

（1） $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_0{}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0;$ （2） $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0;$

(3) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_0{}^2(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2})-f_0{}^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$

31、 讨论重力外波，若不用静力平衡假定，而用下列方程组：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

和边界条件

$$z=0,\quad w=0;$$
$$z=h,\ \frac{\partial p}{\partial t}+w\frac{\partial p_0}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial t}-\rho g w=0.$$

证明波速 c 满足

$$c^2=\frac{g}{k}\tanh(kh).$$

并讨论 kh ππ 1（长波）和 kh φφ 1（短波）的两种情况。在上面式子中 ρ 为常数。

32、描述均质不可压浅层流体中的小振幅波动的方程组为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-f_0v=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+f_0u=-g\frac{\partial\eta}{\partial y}$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

式中 η 为扰动自由面高度，D 是静止自由面的高度，为常数。其余符号为惯常所用。请求出上面方程组的 v=0 的波动解，并对解的性质进行讨论。

33、上式中，若利用赤道 Beta 平面近似，则可得描述赤道地区的小振幅波动的方程组

为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\beta_0 yv=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\beta_0 yu=-g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

式中符号为惯常所用。试求出上面方程组的 v=0 的波动解，并将此解与上题比较。