

# 第四章 半导体中载流子的运输

- 电子器件通常是通过荷电载流子运输实现信息的传输、处理、存储的，因此，了解载流子运输规律是研究半导体器件性能的基础。
- 本章将讨论半导体中载流子的运动和电流运输规律。
- 在Si半导体中载流子的电流运输（**Carrier transport**）机制（**mechanism**）可分为两种：其一是，电场作用下的漂移运动（**drift**）；其二是，浓度的梯度变化引起的扩散运动（**diffusion**）。
- 载流子的漂移和扩散运动所满足的规律及内在联系。

## § 4.1 载流子的热运动和散射

## § 4.2 载流子的运输

## § 4.3 载流子迁移率

## § 4.4 非平衡情形的过剩载流子

## § 4.5 准费米能级

## § 4.6 半导体基本的物理方程

## § 4.1 载流子的热运动 (Thermal motion) 和散射

### 4.1.1 载流子的热运动

半导体中载流子基本的微观运动形式包括：热运动和散射。半导体中的导带电子和价带空穴将做随机的热运动，在热平衡条件下，按照统计物理规律，其热能 (Thermal Energy)  $\sim (3/2)kT$ ，电子的平均动能满足：

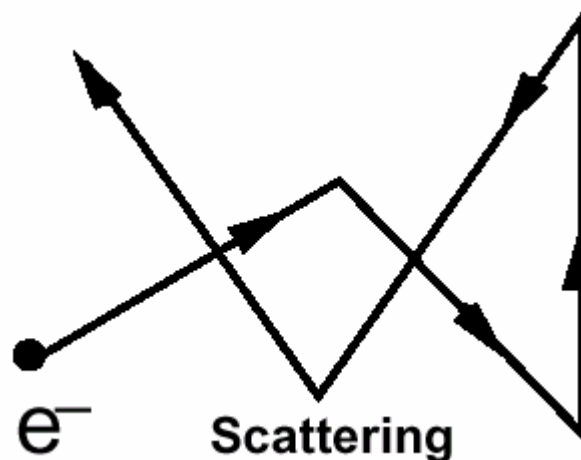
$$\frac{1}{2} m_n V_{th}^2 = \frac{3}{2} kT$$

其中， $m_n$ 是载流子的有效质量，

$$V_{th} \sim 10^7 \text{ cm/sec. @300K}$$

热平衡时，载流子的运动是完全随机的，因此，净电流为零。

其中载流子在热运动过程中，将遭遇各种形式（散射机制）的散射。



在热平衡情况下，电子热运动完全随机，因而净电流为零。

## § 4.1 载流子的热运动 (Thermal motion) 和散射

### 4.1.2. 载流子散射

按照固体物理理论，在理想周期势场作用下，在有效质量近似下，电子的运动等效为载流子的自由运动。

然而，一旦严格的周期势场受到破坏，则载流子的运动将不再是自由的了，此时，载流子的运动中会受到散射作用。

任何破坏周期势场的因素都可以引起载流子的散射作用。

正是由于散射的存在使得载流子在外场（电场）作用下加速运动的最大速度（漂移速度）受到限制。

## § 4.1 载流子的热运动 (Thermal motion) 和散射

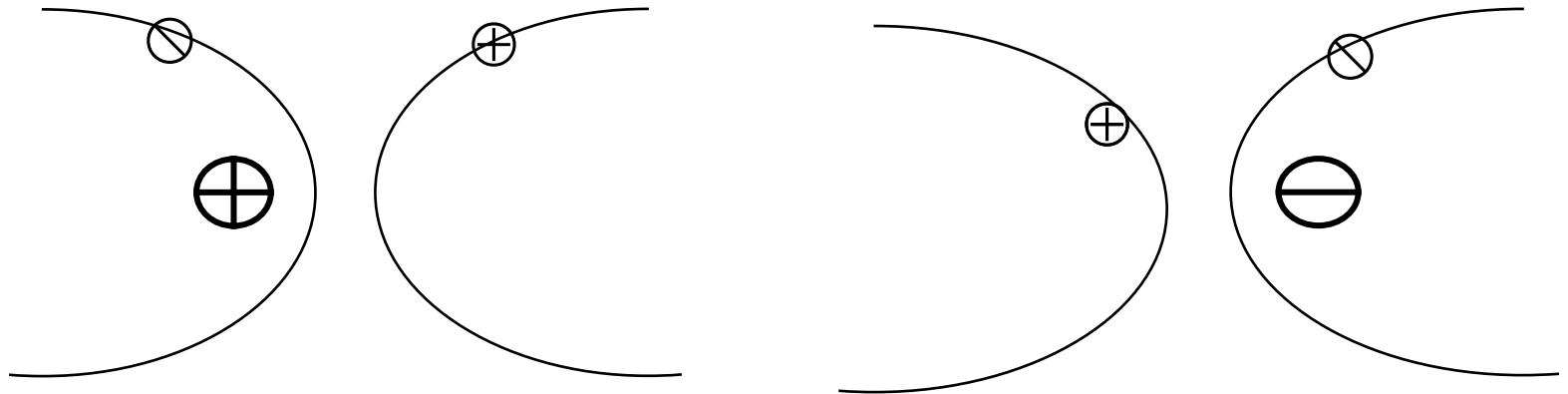
### 4.1.3 半导体中载流子的散射机制

- 电离杂质散射：电离杂质引起的散射
- 晶格散射或声子散射：由于晶格振动引起的散射
- 中性杂质散射：在杂质浓度不是很高时可忽略
- 电子和（或）空穴散射：在高载流子浓度情形时重要
- 晶格缺陷散射：在多晶情形时才显得重要
- 表面散射：载流子在表面层（如反型层）运动时受到表面因素如粗糙度作用引起的散射

### 4.1.3 半导体中载流子中主要的散射机制

1) 电离杂质散射：杂质发生电离后留下的带电离子对载流子产生的库伦散射作用，一般在高掺杂时比较明显。

电离后的施主杂质带正电、受主杂质带负电，因此会在其周围产生库仑势场，从而对带电的载流子产生散射作用。随温度升高，载流子热运动速度增加，该散射效应减小



## 4.1.3 半导体中载流子的散射机制

### 2) 晶格散射

起源于晶格在格点附近振动产生的“格波”（晶体中可以存在多种不同振动模式的格波，一种振动模式等效为一种声子）引起的散射。晶格振动产生的格波包括声学波和光学波。声学波散射和光学波散射，又称为声子散射

- 声学波：晶格中所有原子沿相同方向运动，具有连续介质弹性波的特征
- 光学波：晶格中不同原子间相对运动，具有介质极化电磁波的特征

晶格散射可看成是载流子（电子、空穴）与声子间的碰撞散射。

### 3) 表面散射

- 表面电荷
- 表面粗糙度
- 表面声子（高K栅介质器件）

### 4.1.3 半导体中载流子的散射机制

散射是影响载流子运输能力的主要因素之一，不同的散射机制，对载流子运输能力（迁移率）的影响显示不同的温度关系。

#### 平均自由程（Mean free path $l$ ）和平均自由时间

载流子热运动时，发生两次散射之间所运动的平均距离（统计平均值）。载流子在Si中的平均自由程约为1nm~1 $\mu$ m。设其平均自由程为1 $\mu$ m，则其平均自由运动时间~1ps。

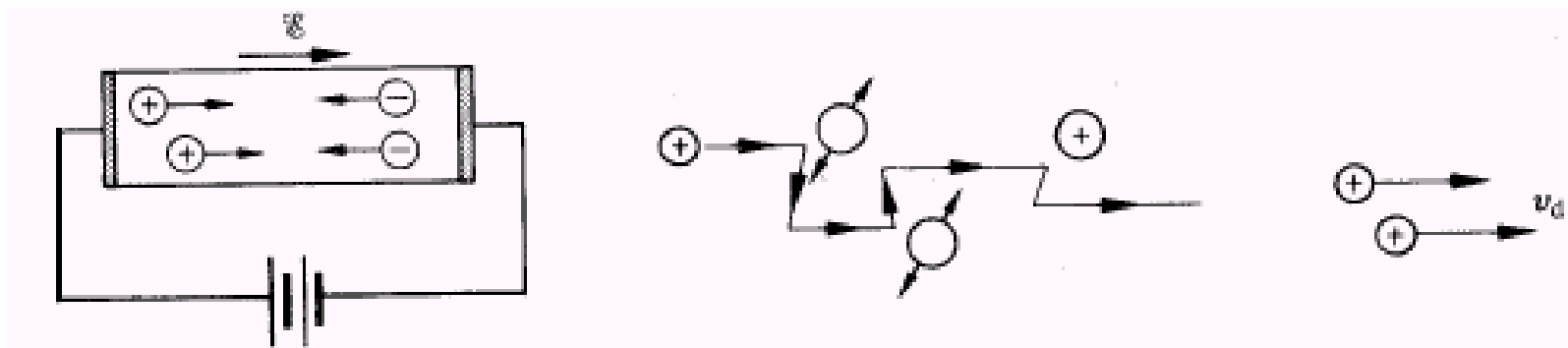
$$\tau_m \approx \frac{10^{-5} \text{ cm}}{10^7 \text{ cm / sec}} = 1 \text{ p sec}$$

## § 4.2 载流子的输运

半导体中载流子的输运是通过载流子在半导体中宏观的定向运动实现的，实际上是微观运动的统计平均，包括：漂移运动和扩散运动两种形式

### 4.2.1. 载流子的漂移运动和漂移电流

当半导体中存在电场时，载流子将在电场作用下做定向运动，称之为漂移运动（**Drift**）。漂移运动是电场感应的载流子的定向运动，是一种宏观运动行为，表征的是微观运动的统计平均结果。



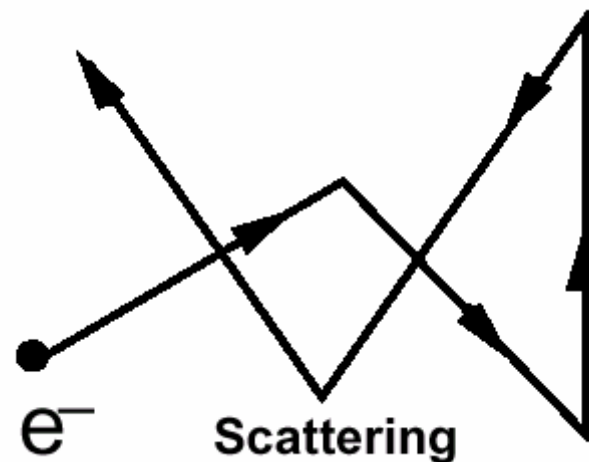
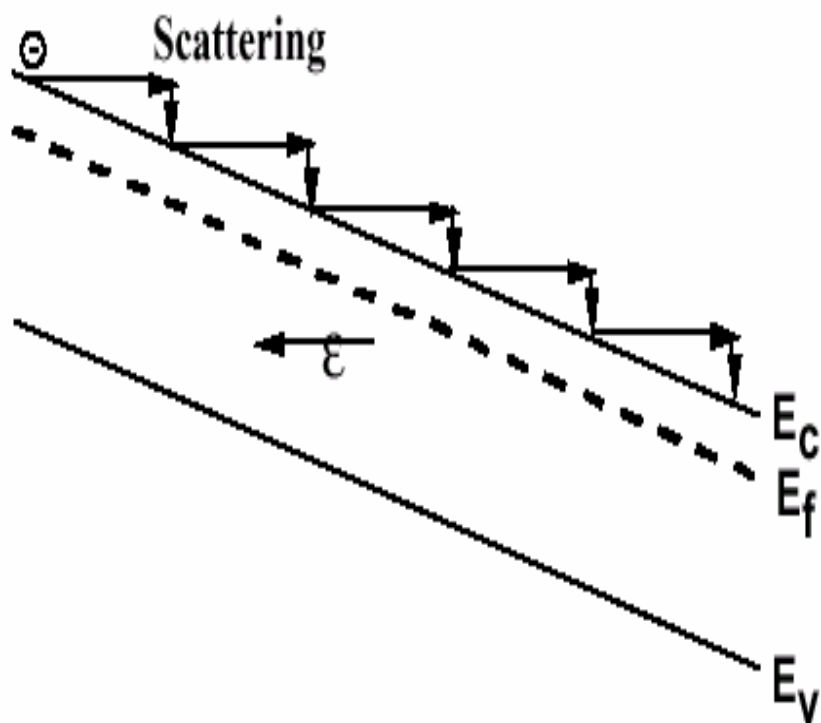


## 4.2.1. 载流子的漂移运动和漂移电流

### 漂移速度和漂移电流

电子在电场的作用下沿电场反方向运动，这种运动称为漂移运动

载流子的漂移运动实际是载流子在电场作用下经历加速、碰撞减速过程的统计平均结果，载流子的漂移运动将形成电流，称为漂移电流。



在热平衡情况下，电子热运动完全随机，因而净电流为零

## 4.2.1. 载流子的漂移运动和漂移电流

### 漂移电流和迁移率

荷电载流子在电场作用下作定向漂移运动，引起电流。设其定向漂移运动的平均速度（称为漂移速度）为 $v$ ，则漂移电流表示为：

$$j = nqv$$

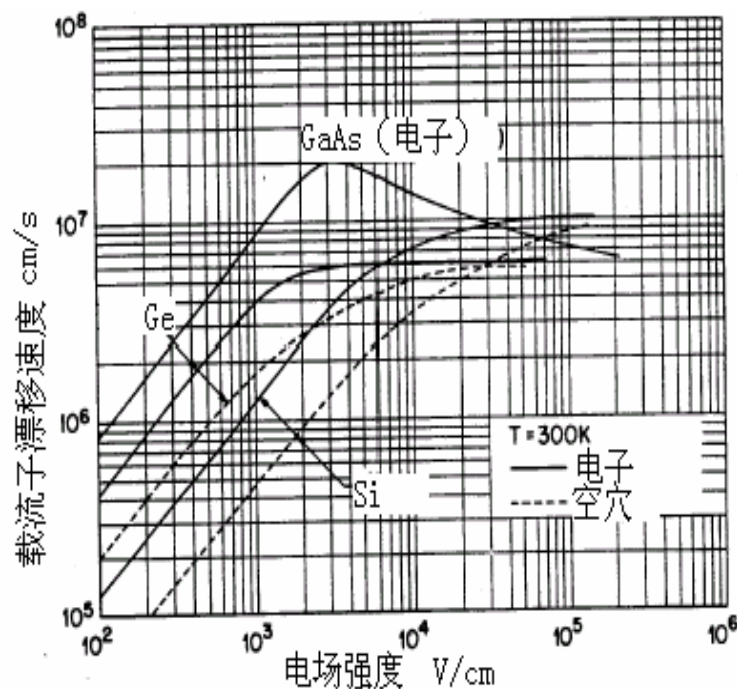
其中 $n$ 为载流子的浓度， $q$ 为载流子的电量

实验显示，在弱电场下，载流子的漂移速度 $v$ 与电

场成正比 $E$   $v = \mu E$

其比例系数称为载流子的迁移率，定义为：

单位电场作用下，载流子获得的平均定向运动速度，反映了载流子在电场作用下的运输能力，是半导体物理中重要的概念和参数之一。



## 4.2.2 载流子的电导和电阻率

### 欧姆定律

载流子在电场作用下的输运过程满足物理规律

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$j = nq\mu E$$

比较漂移电流公式与欧姆定律，得到半导体的电导率表达式：

$$\sigma = nq\mu$$

$\mu$  称为迁移率，对Si有

$$\mu_n = 1350 \text{ cm}^2 / \text{Vs}$$

$$\mu_p = 480 \text{ cm}^2 / \text{Vs}$$

电子的迁移率总是高于空穴的迁移率，后面我们将说明，其原因是电子的有效质量总是小于空穴的有效质量。

## 半导体的电导率和迁移率

半导体中有电子和空穴两种载流子，电场作用下的电流密度

$$j = j_n + j_p = (nq\mu_n + pq\mu_p)E$$

得到半导体的电导和电阻率的表达式为：

$$\sigma = nq\mu_n + pq\mu_p \quad \rho = \frac{1}{qn\mu_n + qp\mu_p}$$

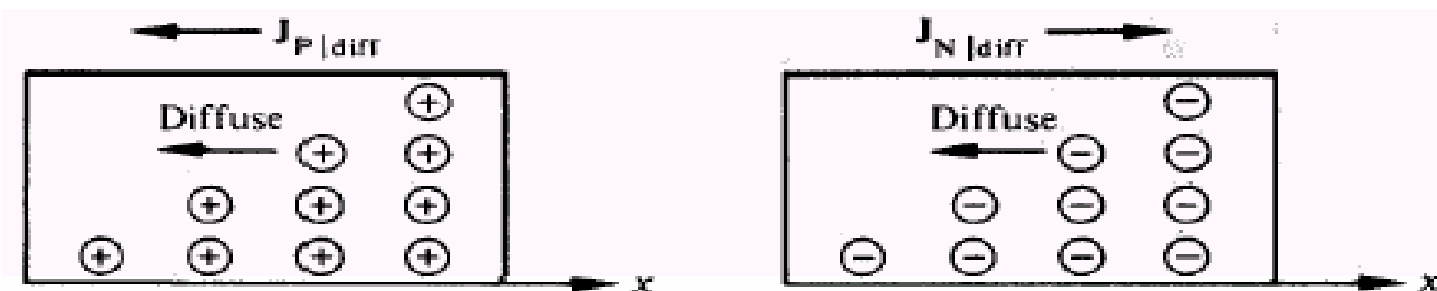
一般情形，半导体电子和空穴的迁移率在同一数量级，在掺杂半导体中，多数载流子浓度远远大于少数载流子，因此，其电导率主要由多数载流子决定

## § 4.2.3 载流子的扩散和扩散电流

半导体载流子的另一输运机制是载流子的扩散运动。

当半导体中存在载流子浓度梯度时，载流子将发生宏观的定向运动——扩散运动。载流子的扩散运动满足扩散方程：

$$S = -D_n \frac{dn}{dx}$$



空穴和电子的扩散电流

荷电载流子发生宏观的定向扩散运动，必然形成电流，这种由载流子定向的扩散运动形成的电流称为扩散电流。

## § 4.2.3 载流子的扩散和扩散电流

### 1. 载流子的扩散和扩散电流

电子扩散电流: 
$$j_{n,diff} = qD_n \frac{dn}{dx}$$

空穴扩散电流: 
$$j_{p,diff} = -qD_p \frac{dp}{dx}$$

其中 $D_n$ 和 $D_p$ 分别为电子和空穴的扩散系数

## § 4.2.3 半导体的电流方程

半导体中电子和空穴的漂移和扩散运动构成了半导体中载流子基本的定向运动形式，因此，载流子的漂移和扩散运动构成了半导体中电流运输的基本机制

### 电流方程

$$j_n = q\mu_n n E + qD_n \nabla n$$

漂移项

$$j_p = q\mu_p p E - qD_p \nabla p$$

扩散项

其中，公式中各物理量为标量。空穴的扩散电流项之前有负号，表明空穴的扩散流与空穴浓度增加方向相反。该表达式这是半导体物理中的基本式子之一。

### § 4.2.3 爱因斯坦关系

半导体中载流子的漂移和扩散引起的电流是半导体载流子运输的基本机制，但二者之间并不是彼此独立而互不相干，而是存在一定的关联性，二者之间的相互关联性，具体表征为扩散系数与迁移率满足所谓的爱因斯坦关系，：

$$D_n = \frac{kT}{q} \mu_n \quad D_p = \frac{kT}{q} \mu_p$$

爱因斯坦关系是半导体中重要的基本关系式之一，反映了漂移和扩散运动的内在关联性，该关系式实际上是在1977年由Miller和Kamins导出的



## 爱因斯坦关系的推导

假设一载流子浓度不均匀的半导体处于热平衡，则必然存在浓度梯度，引起载流子的扩散运动，同时导致了半导体内存在电场

### (1) 漂移电流

设在半导体中存在电场 $E$ ，电子的有效质量为 $m^*$ ，则在平均自由时间 $\tau$ 内获得的漂移速度

$$v_d = qE\tau / m^*$$

根据迁移率定义  $\mu = \frac{q\tau}{m^*} = \frac{ql}{m^* v_{th}}$  其中  $l = v_{th}\tau$

$$j = nq\mu E$$

## 爱因斯坦关系的推导

设在 $x$ 处半导体的载流子浓度分布为 $n(x)$ ，半导体的平均自由程为 $l$ ，则由热运动引起的扩散电流的各分量可分别表示为（一维情形）

在 $x-l$ 处的电子可流过 $x$ 处，形成电流

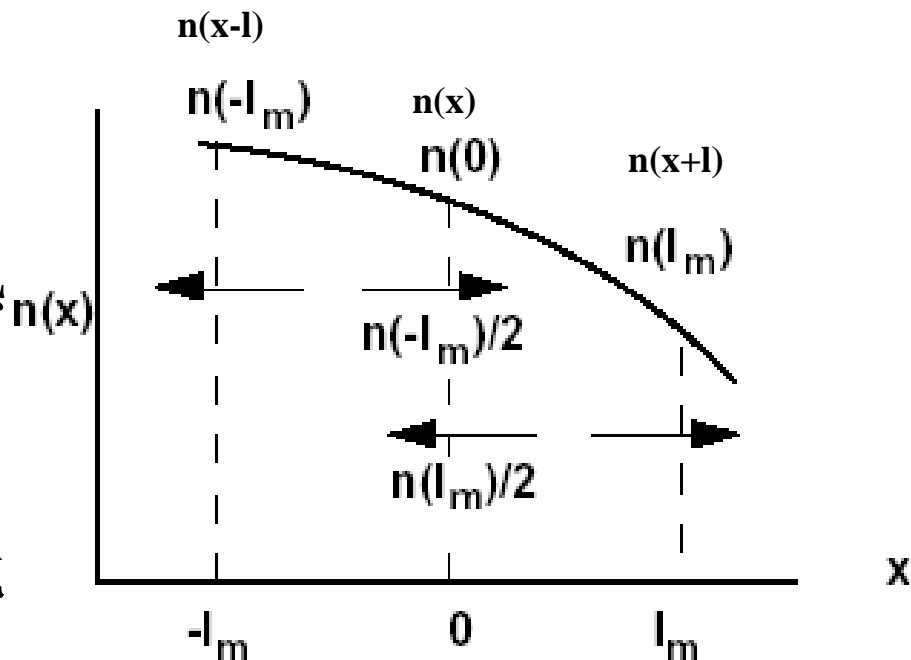
$$j_- = \frac{1}{2} n(x-l) q v_{th}$$

$x+l$ 处的电流密度为

$$j_+ = \frac{1}{2} n(x+l) q v_{th}$$

则总的扩散电流为：

$$j_{diff} = j_+ - j_- = \frac{1}{2} q v_{th} [n(x+l) - n(x-l)]$$



## 爱因斯坦关系的推导（续）

总的扩散电流为：

$$j_{diff} = j_+ - j_- = \frac{1}{2} q v_{th} [n(x+l) - n(x-l)]$$

即：
$$j_{diff} = q v_{th} l dn / dx$$

根据扩散电流方程，其扩散系数：

$$D = v_{th} l$$

分别将扩散系数  $D$  和迁移率  $\mu$  的表达式带入，则有：

$$D / \mu = m^* v_{th}^2 / q$$

在热平衡条件下：

$$\frac{1}{2} m^* v_{th}^2 = \frac{1}{2} kT \quad D / \mu = kT / q$$

## § 4.2.4 静电势

半导体物理中，为了方便，各物理量或方程式，经常表示为电势的函数。  
半导体载流子的静电势定义为：载流子的能量除以电子电荷量 $q$ 。

静电势定义为：

$$\psi = -\frac{E}{q}$$

本征费米势定义为：

$$\psi_i = -\frac{E_i}{q}$$

费米势定义为：

$$\psi_f = -\frac{E_f}{q}$$

注意：能带图中的能量是电子的能量，电势是单位正电荷的能量，因此，在能带图中，能量高的位置，电势反而低。

半导体中电场强度可表示为本征费米势的负梯度

$$\varepsilon = -\frac{d\psi_i}{dx} = \frac{1}{q} \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{q} \frac{dE_i}{dx}$$

## § 4.2.4 静电势

以本征费米能级为能量参考点的相对费米势定义为：

$$\psi_B = \psi_f - \psi_i = -\frac{E_f - E_i}{q} = \pm \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_b}{n_i}\right)$$

载流子的浓度可表示为：

$$n = n_i e^{(E_f - E_i)/kT} = n_i e^{q(\psi_i - \psi_f)/kT}$$

$$p = n_i e^{(E_i - E_f)/kT} = n_i e^{q(\psi_f - \psi_i)/kT}$$

于是： 对电子体系来讲  $\psi_f = \psi_i - \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{n}{n_i}\right)$  其电势低于本征费米势

对空穴体系来讲  $\psi_f = \psi_i + \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{p}{n_i}\right)$  其电势高于本征费米势

## § 4.2.4 静电势

$$J_n = qn\mu_n\varepsilon + qD_n \frac{dn}{dx} = -qn\mu_n \left( \frac{d\psi_i}{dx} - \frac{kT}{qn} \frac{dn}{dx} \right) = -qn\mu_n \frac{d\phi_n}{dx}$$

$$J_p = qp\mu_p\varepsilon - qD_p \frac{dp}{dx} = -qp\mu_p \left( \frac{d\psi_i}{dx} + \frac{kT}{qp} \frac{dp}{dx} \right) = -qp\mu_p \frac{d\phi_p}{dx}$$

其中，定义

$$\phi_n \equiv \psi_i - \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{n}{n_i} \right) \quad \phi_p \equiv \psi_i + \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{p}{n_i} \right)$$

为准费米势

基于以上结果，我们可以结论：电子和空穴的准费米势在空间的变化将引起电流

## § 4.3 载流子的迁移率

### § 4.3.1 载流子迁移率的表达式

#### 1. 平均自由时间与散射几率的关系

在半导体中存在散射时，在 $t \sim t+dt$ 时间内被散射的粒子 $dN(t)$ 与粒子浓度 $N(t)$ 成正比。即： $dN(t) \propto N(t)dt$

于是，被散射的粒子数满足下列方程：

$$N(t) = N_0 e^{-Pt}$$

其中 $P$ 是散射概率

则根据统计物理原理，平均自由时间与散射概率的关系满足：

$$\tau = \frac{\int t dN(t)}{\int dN(t)} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N_0 P e^{-Pt} t dt = \frac{1}{P}$$

## 2. 载流子迁移率表达式的简单推导

设 $\mathbf{P}$ 为一组电子的总动量，则电子受到电场作用引起的动量变化满足方程：

$$\vec{F} = \pm nq\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{对于空穴为正，电子为负}$$

在 $dt$ 时间间隔内，载流子被散射的概率为： $\frac{dt}{\tau_m}$

其中， $\tau_m$  是平均自由时间

$dt$  时间内由于碰撞引起的动量变化为

$$d\vec{P} = -\vec{P} \frac{dt}{\tau_m} \quad (\text{假定碰撞使电子失去动量})$$



碰撞引起的动量变化率则可表示为：

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = -\frac{\bar{P}}{\tau_m}$$

电场加速和碰撞减速的总和为0，即：

$$-nq\vec{\mathcal{E}} - \frac{\bar{P}}{\tau_m} = 0$$

每个电子的平均动量为：

$$\langle \bar{P} \rangle = \frac{\bar{P}}{n} = -q\tau_m \vec{\mathcal{E}}$$

电子平均净的漂移速度为：

$$\langle \vec{V}_d \rangle = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{m^*} = -\frac{q\tau_m}{m^*} \vec{\mathcal{E}} = \mu \vec{\mathcal{E}}$$

由 
$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{q\vec{\mathcal{E}}}{m^*} t$$

求得平均漂移速度 
$$\bar{v} = -\frac{q\vec{\mathcal{E}}}{m^*} \tau$$

获得 
$$\mu = \frac{q\tau}{m^*}$$

## § 4.3.2 弛豫时间近似

### 1. 玻耳兹曼方程

非平衡时分布函数满足的方程 
$$v \cdot \nabla_r f + k \cdot \nabla_k f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

考虑无浓度梯度的均匀分布情形,  $f$  不随  $r$  变化, 于是

$$k \cdot \nabla_k f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

### 2. 弛豫时间近似

如果系统处于稳定状态, 同时分布函数  $f$  与平衡时的分布函数  $f_0$  偏离不大, 则与时间微商相关的碰撞项可近似写为:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

该近似可很好描述系统由准平衡态向平衡态恢复的物理过程, 称为弛豫过程, 弛豫过程的特征时间称为弛豫时间, 该近似也常称为弛豫时间近似。

## § 4.3.2 弛豫时间近似

### 3. 迁移率的统计表达式

利用弛豫近似，求解玻耳兹曼方程，求得：

$$\sigma = \frac{nq^2}{m^*} \left\langle \frac{\tau v^2}{v^2} \right\rangle$$

基于半导体的迁移率与电导率的关系，可获得：

$$\mu = \frac{q}{m^*} \left\langle \frac{\tau v^2}{v^2} \right\rangle$$

与准经典情形获得的迁移率表达式比较，可知：

$$\tau = \left\langle \frac{\tau v^2}{v^2} \right\rangle$$

如果平均自由时间与速度无关，则  $\mu = \frac{q \langle \tau \rangle}{m^*}$

弛豫近似的特点是：  
函数随自变量的变化  
与函数本身和自变量  
的变化呈正比关系，  
从而可获得函数与自  
变量之间呈指数依赖  
关系。

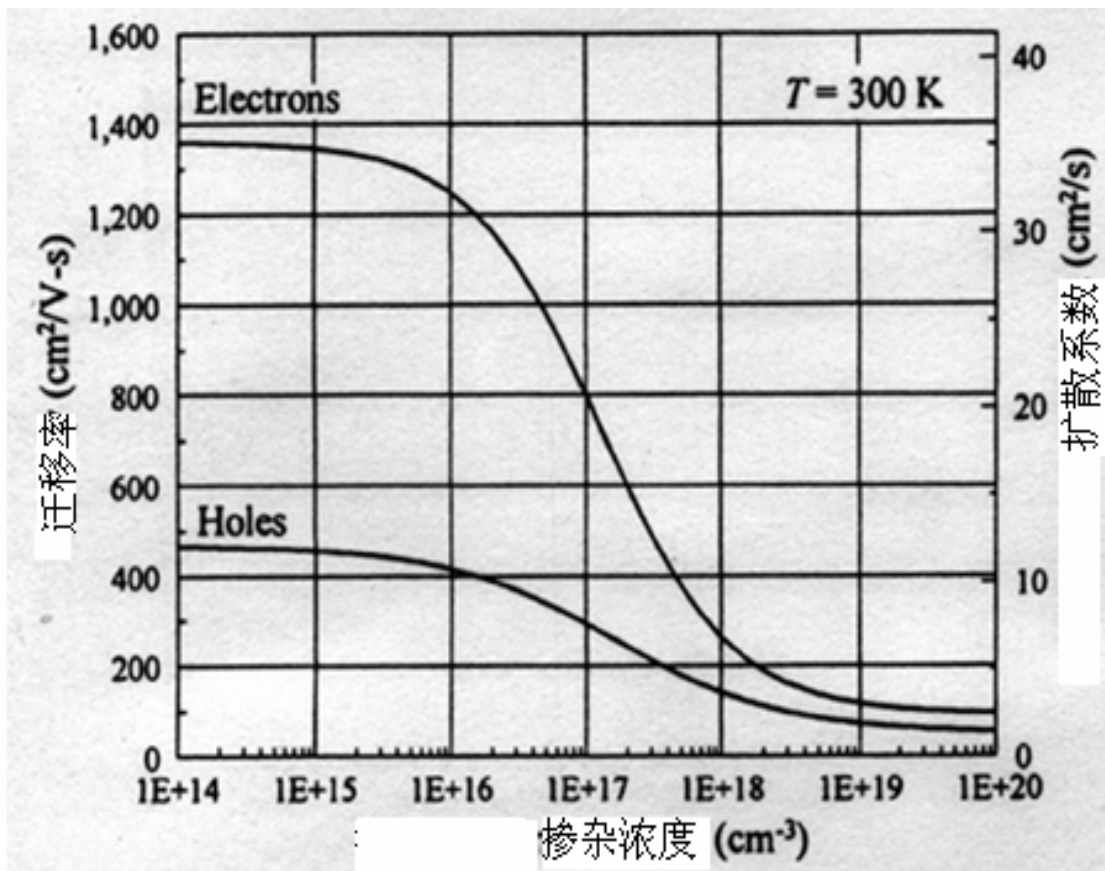
## § 4.3.2 散射与迁移率的关系

### 迁移率与杂质和温度的关系

$$\mu = \frac{q \tau}{m^*}$$

影响迁移率的因素：

- 有效质量
- 弛豫时间（散射）



## § 4.3.2 散射与迁移率的关系

假设系统存在多种散射机制。

如果每种散射独自存在时的散射概率分别为： $P_1, P_2, P_3 \dots$

相应的平均自由时间为： $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$

则总的散射概率： $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$

平均自由时间 
$$\tau = \frac{1}{P} = \frac{1}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}$$

$$\frac{1}{\tau} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots$$

存在多种散射机制时，  
总的迁移率表达式 
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \dots$$

## § 4.3.2 散射与迁移率的关系

### 3. 迁移率与杂质和温度的关系

$$\begin{array}{l} \text{电离杂质散射} \quad \tau_i \propto T^{3/2} \quad \longrightarrow \quad \mu_i \propto T^{3/2} \\ \text{声学波散射} \quad \tau_s \propto T^{-3/2} \quad \longrightarrow \quad \mu_s \propto T^{-3/2} \end{array} \quad \mu = \frac{q\tau}{m^*}$$

$$\text{光学波散射} \quad \tau_o \propto \left[ \exp\left(\frac{h\nu_l}{kT}\right) - 1 \right] \longrightarrow \mu_o \propto \left[ \exp\left(\frac{h\nu_l}{kT}\right) - 1 \right]$$

## § 4.3.2 散射与迁移率的关系

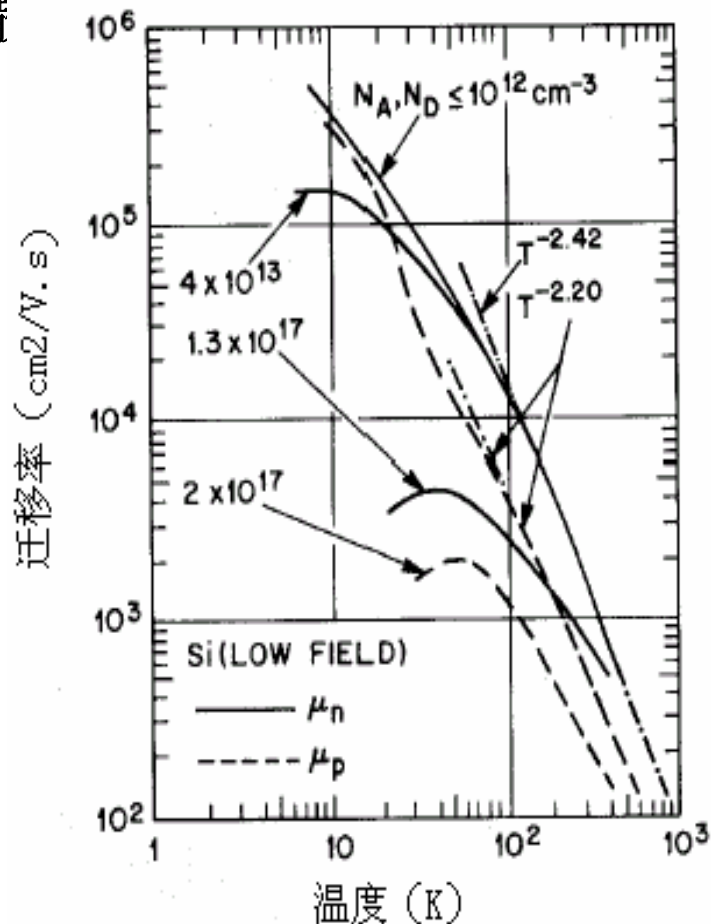
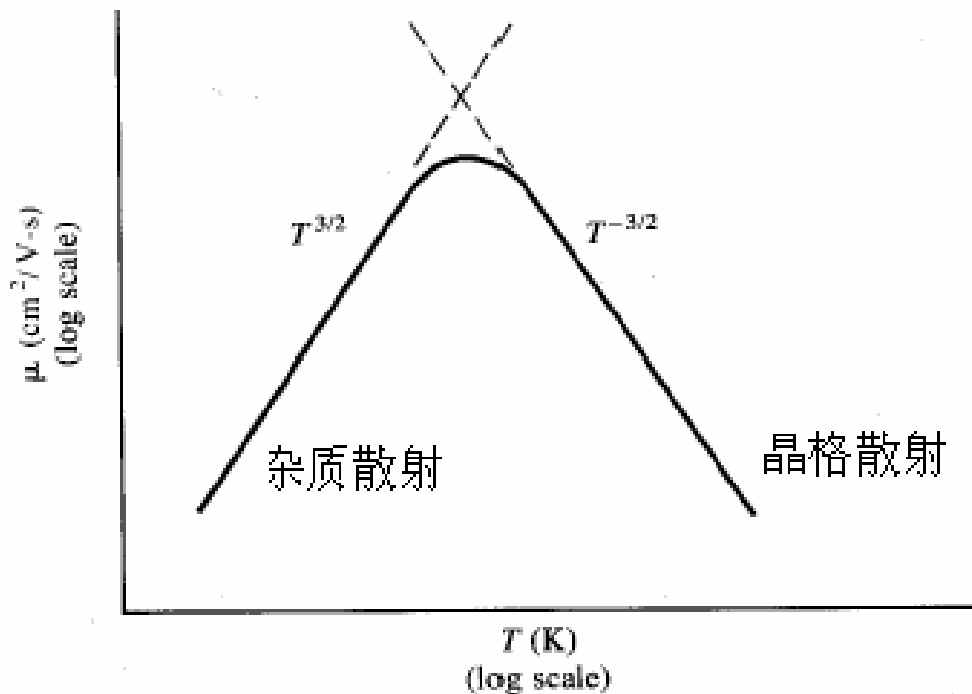
### 3. 迁移率与杂质和温度的关系

两种重要的散射机制：杂质散射和晶格格波散射

迁移率与散射机制有如下关系：

晶格散射有关的迁移率  $\mu_L \propto T^{-3/2}$

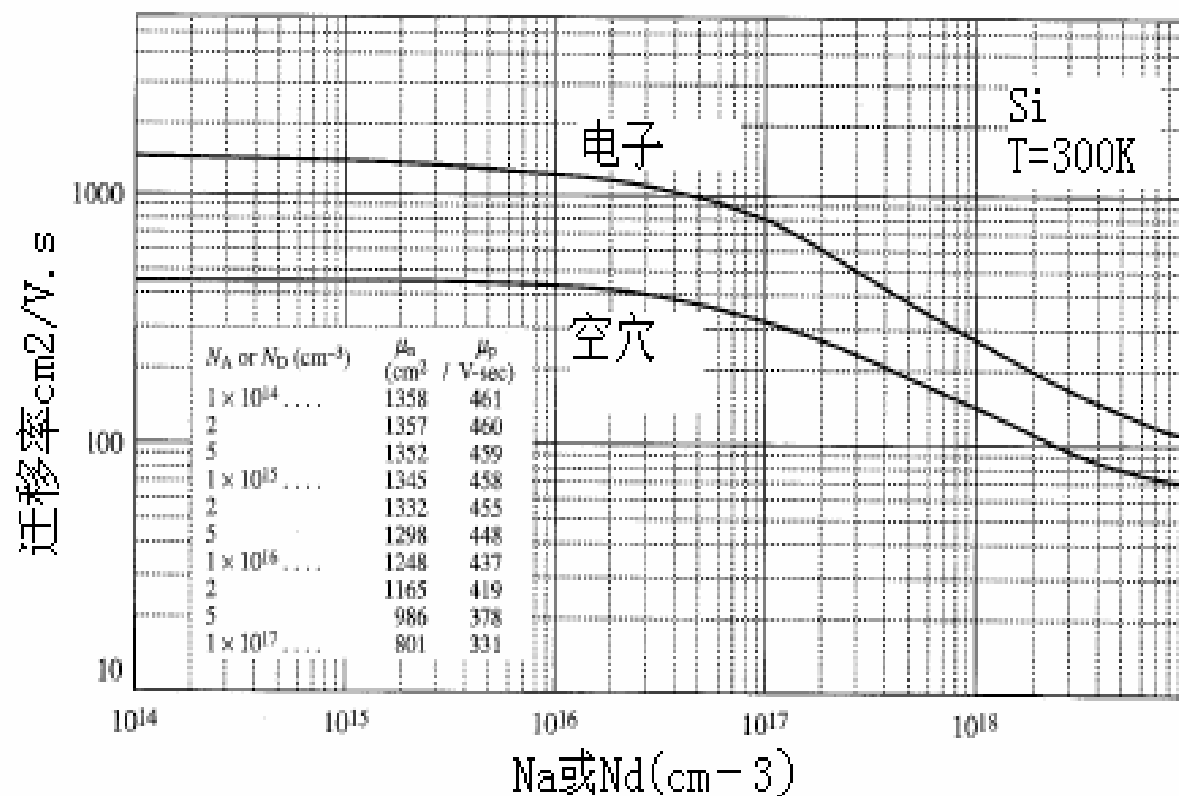
与杂质散射有关的迁移率  $\mu_I \propto T^{3/2}$





## § 4.3.3 散射与迁移率的关系

另外  $\mu_i$  和衬底掺杂浓度有很大关系



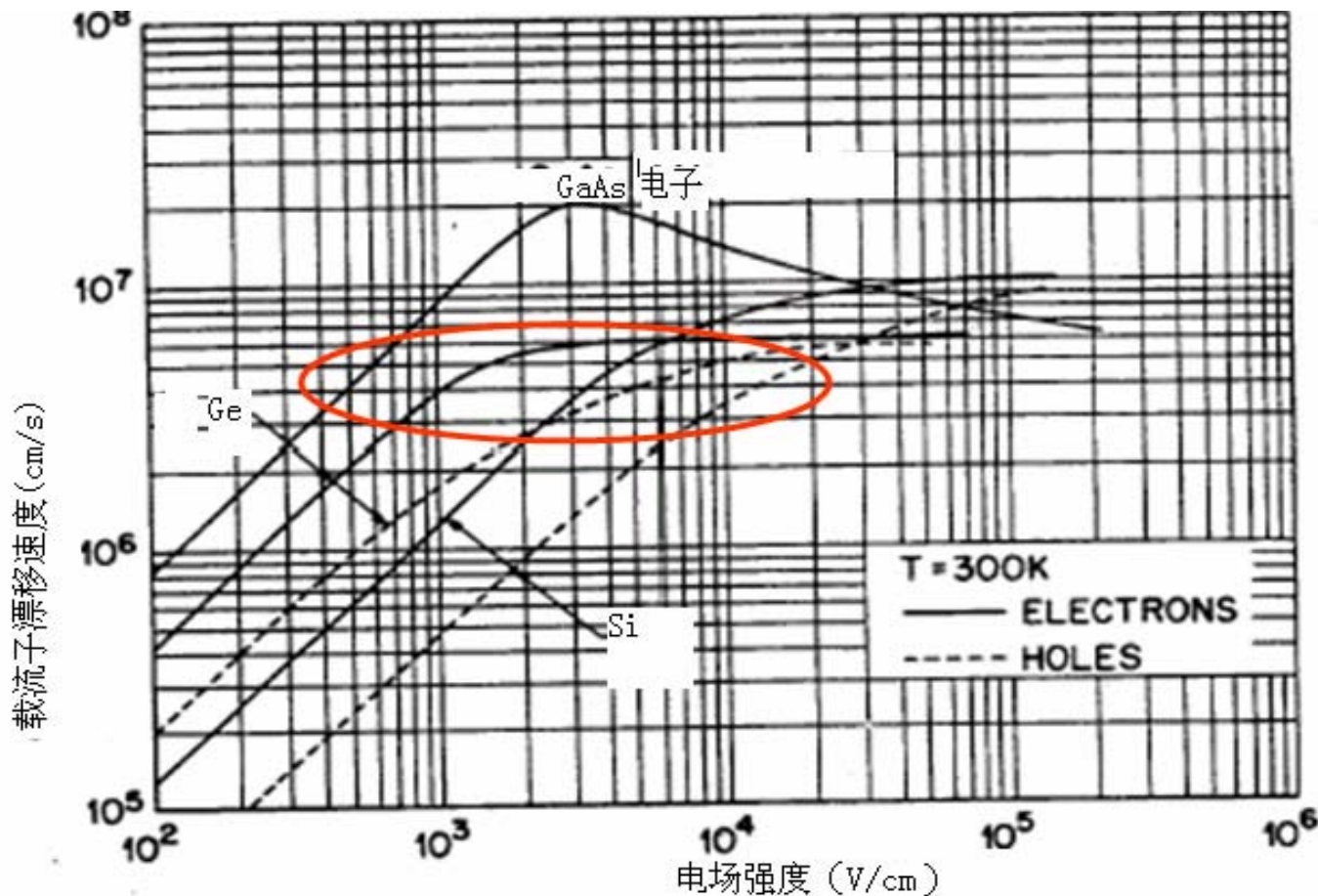
电子的迁移率大于空穴的迁移率，主要原因是电子的迁移率小于空穴的有效质量。

因此，提高载流子迁移率的主要途径包括：减小散射概率；减小有效质量（改变能带结构，如采用GeSi、应变Si或Ge等材料）

## § 4.3.4 载流子的强场效应

在强电场下，电流密度与电场关系偏离欧姆定律，漂移速度与电场关系偏离线性关系，爱因斯坦关系也不成立。在强电场下，一些新的物理现象如速度饱和、热载流子等效应出现，这称为强电场效应

### 1. 强电场下的速度饱和



迁移率是电场的函数

## 1 强场下的速度饱和效应

速度随电场的线性变化的关系只在较弱的电场下，载流子与晶格处于热平衡的条件下才能成立。

而在高场下，当载流子的定向运动速度变得与热运动速度可比拟时，载流子从电场中获得的动能将可以与晶格的平均热动能可比拟时，载流子无法在与晶格保持热平衡的情形下，维持所获得的动能，此时，载流子将通过与晶格的相互作用，把从电场中获得的动能以发射光子或声子的方式损失掉，从而使得载流子的速度无法通过电场加速实现进一步的增加，因而出现了速度饱和现象。

硅中电子的饱和速度为 $10^7$  cm/s，空穴的饱和速度约为 $6 \times 10^6$  cm/s，临界电场为 $2 \times 10^4$  V/cm，对于小尺寸半导体器件，速度饱和效应已经成为一个非常重要的物理限制。

## § 4.3.4 载流子的强场效应

### 2. 强场下的热载流子效应

热载流子效应是另一重要的强场效应

- 热载流子是指能量远远高于系统的热能  $kT$ （如高于Si相对于SiO<sub>2</sub>势垒）的载流子，主要是部分载流子在强电场作用下，由于发生与晶格热平衡状态明显偏离的强场效应，从而获得很高能量的物理效应。
- 器件中的热载流子由于其高的能量，有可能导致：
  - 载流子越过介质势垒进入到介质层中，影响器件性能
  - 发生碰撞电离，引起载流子数目的增加
- 强电场存在是产生热载流子的必要条件

## § 4.3.4 载流子的强场效应

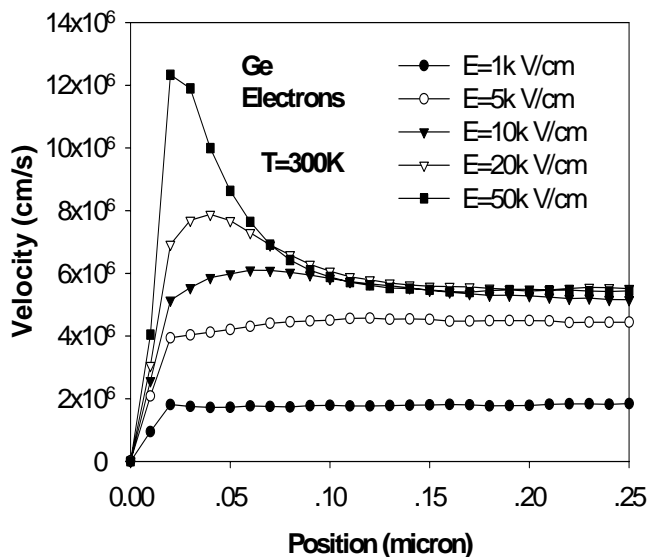
### 3. 强场下的非稳运输—速度过冲效应

强电场作用下的非稳运输现象，也是强场效应之一，速度过冲效应是其具体表现形式之一

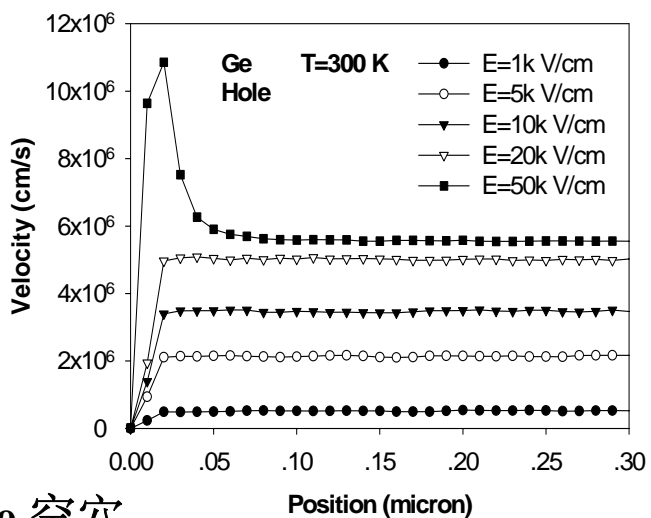
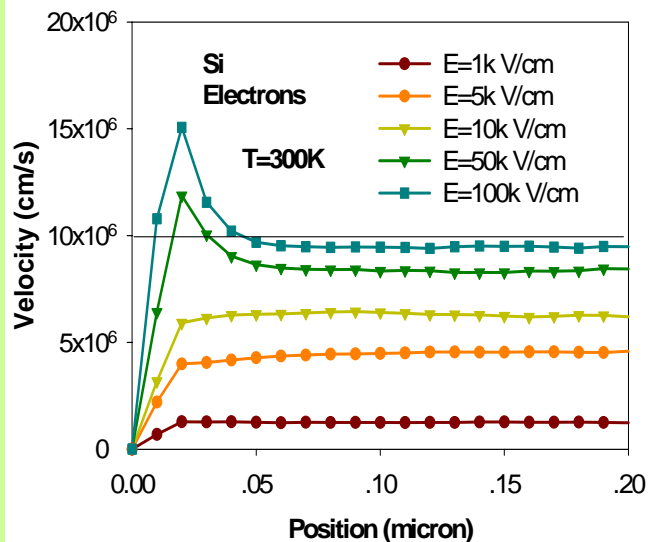
- 在强电场作用下，载流子的平均能量显著增加，电场作用下的分布函数相对于平衡时的改变不再是小量；
- 载流子由一个平均能量稳定值变到另一个能量稳定值（对应于一个新的分布）需要一定的时间（能量弛豫时间）；
- 速度过冲效应是载流子在强场作用下，出现非稳运输的具体表现形式。载流子出现速度过冲现象时，载流子的漂移速度远远超过平均漂移速度的效应。

# 半导体中的速度过冲现象

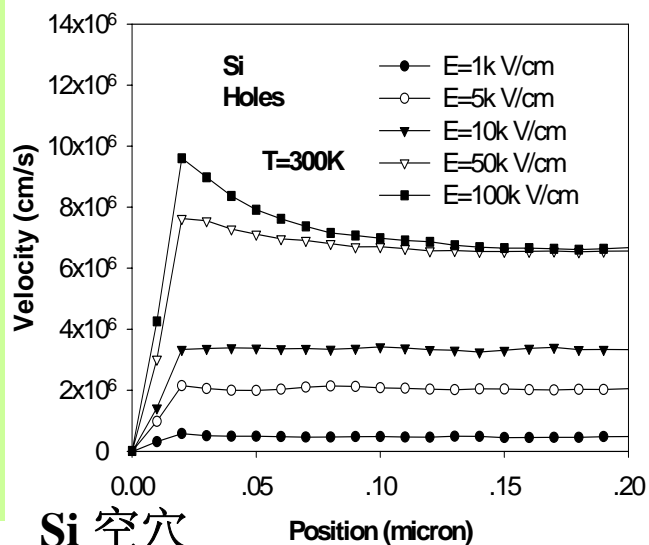
## Ge 电子



## Si 电子



## Ge 空穴

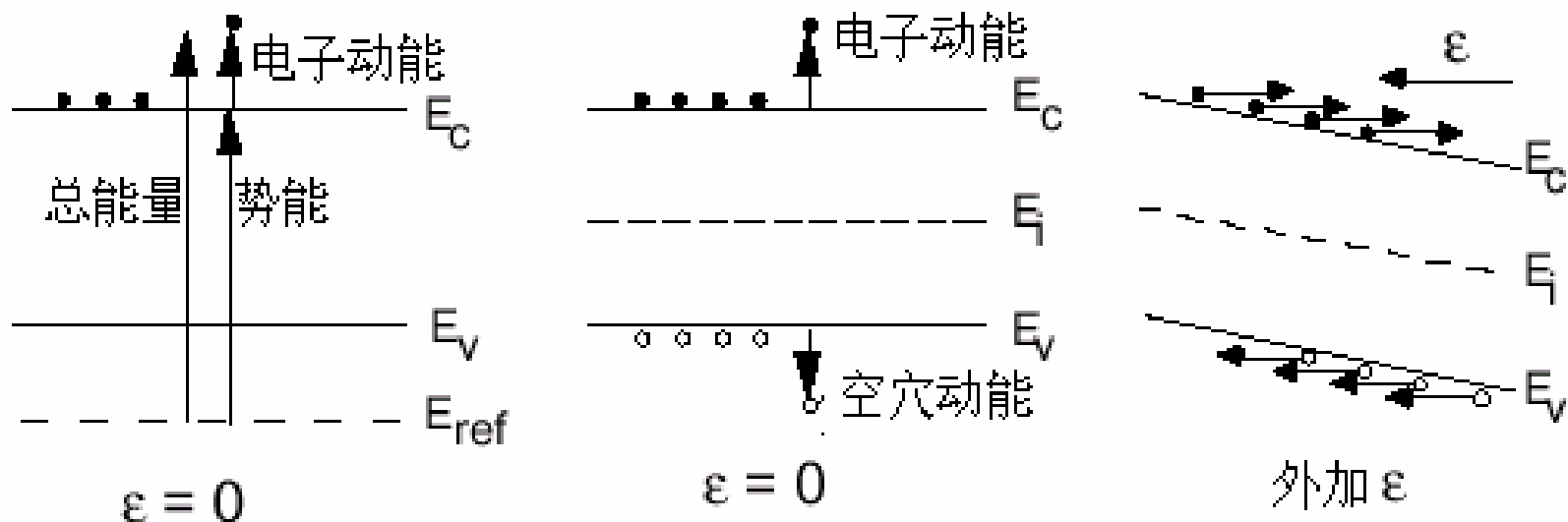


## Si 空穴

## § 4.3.5 平衡半导体条件

### 1 电场与电势

能带弯曲与电场强度和电势的关系



电子的势能与电势的关系如下：

$$\text{P.E.} = -qV$$

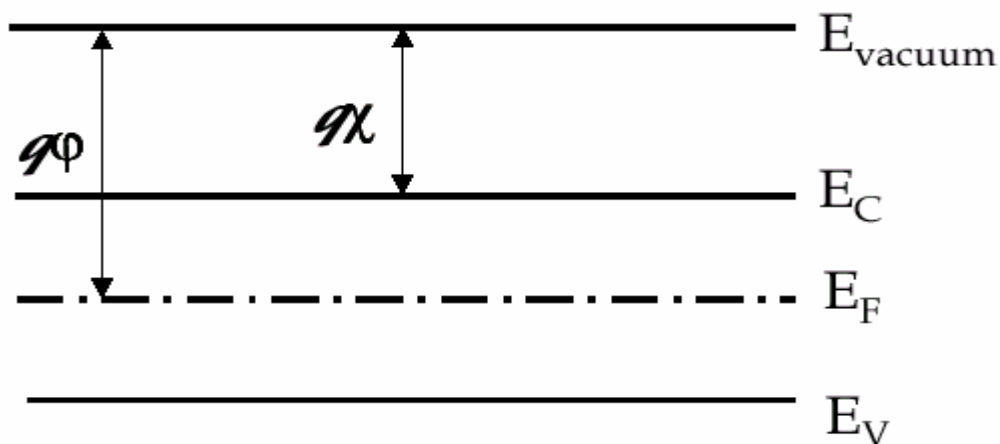
即 
$$\text{P.E.} = E_c - E_{ref}$$

得 
$$V = -\frac{1}{q}(E_c - E_{ref})$$

## 2 半导体的重要参数

亲和势 (**affinity**) : 真空能级与导带底能量差

功函数 (**workfunction**) : 真空能级与费米能级差





## § 4.4 非平衡载流子

### 4.4.1. 非平衡载流子（过剩载流子）(extra or excess carrier) 的产生

- 在非平衡状态下，载流子的分布函数和浓度将与热平衡时的情形不同。非平衡状态下的载流子称为非平衡载流子。将非平衡载流子浓度超过热平衡时浓度的部分，称为 $\Delta n = n - n_0$   $\Delta p = p - p_0$
- 过剩载流子是由于系统受外界的影响偏离热平衡状态，使得载流子的分布函数与热平衡时发生偏移而产生的。
- 可以产生过剩载流子的外界影响包括光照、外加电压等。
- 产生过剩载流子的方法，称为过剩载流子的注入(injection)。
- 光照方法产生的注入称为光注入(optical injection)、外加电压产生的注入称为电注入(electric injection)

# 1. 非平衡载流子

热平衡时，载流子的产生和复合保持着动态平衡。而在非平衡情形下，这种动态平衡受到破坏，将导致非平衡过剩载流子的产生（注入或抽取）。

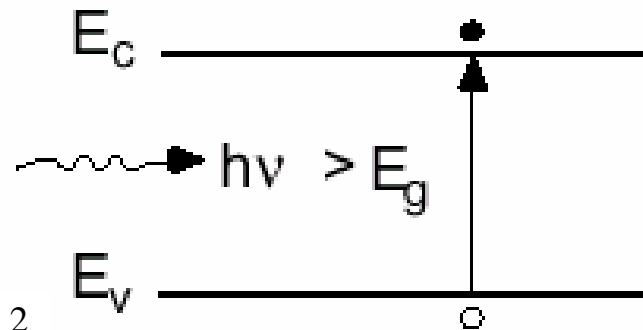
## □光注入

非本征情形

$$n = n_0 + \Delta n$$

$$p = p_0 + \Delta p$$

$$np > n_0 p_0 = n_i^2$$



本征情形

$$n = n_i + \Delta n$$

$$p = n_i + \Delta p$$

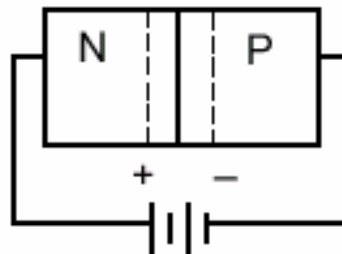
$$n, p > n_i$$

## □光注入



注入：通过光照或外加电压（如碰撞电离）产生过剩载流子： $np > n_i^2$

## □电注入和抽取



抽取：通过外加电压使得载流子浓度减小： $np < n_i^2$

## 1. 过剩载流子

在发生过剩载流子注入的情形下，必然存在使载流子增加的外界因素和机制，该因素和机制使得价带的电子受激跃迁到导带中。如光照注入等。

同理，在发生过剩载流子抽取的情形下，必然有使载流子减少的外界因素和机制的存在，该因素和机制增强了导带电子跃迁到价带中，与价带空穴复合过程。

## 2. 过剩流子的电中性条件

过剩载流子的产生是由于在外界因素作用下，形成了新的载流子产生或复合的机制，因此，导带电子与价带空穴之间在热平衡条件下形成的载流子产生和复合的动态平衡受到破坏，于是

□非平衡过剩载流子浓度  $\Delta n = n - n_0$      $\Delta p = p - p_0$

□非平衡情形的电中性条件  $\Delta n = \Delta p$

### 3. 非平衡过剩载流子的小注入条件

#### □小注入条件

如果外加作用使得载流子分布函数相对于平衡时变化不大（弛豫近似成立），则过剩载流子的浓度与多数载流子浓度相比是一个小量可忽略，则称为小注入情形。半导体物理中研究的主要是小注入情形，其条件为

$$\Delta n \ll n_0 \quad \text{或} \quad \Delta p \ll p_0$$

#### □非平衡的过剩少数载流子（少子）

在小注入条件下，由于半导体中过剩少子往往远大于平衡态少子，而过剩多子与平衡载流子相比可以忽略，因此，过剩少子对半导体导电特性的影响显著，因而，在半导体物理中，大多讨论小注入下的过剩少子的行为。

## § 4.4 非平衡载流子

### 4.4.2 非平衡过剩载流子的复合 (Recombination)

□当产生非平衡过剩载流子的外界因素撤除后，系统将逐渐从非平衡态向平衡态恢复，过剩载流子将逐渐消失，在一定时间后，重新建立热平衡。

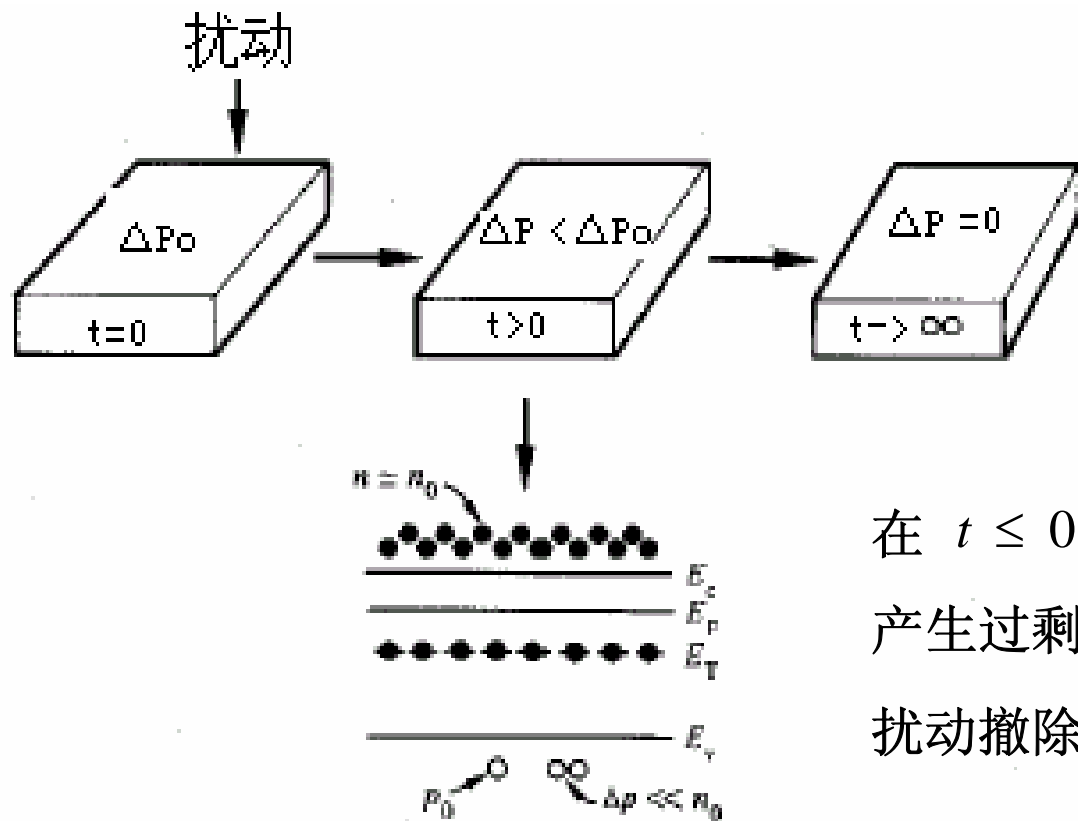
□非平衡过剩载流子消失的过程，称为过剩载流子的复合。

□过剩载流子的产生由于外界因素影响，载流子的产生率超过与复合率而引起的；而过剩载流子的复合则是在外界因素撤除后，载流子的产生与复合间重新建立动态平衡的过程。

□因此，过剩载流子的产生和复合与载流子的产生和复合的微观过程密切相关，具体表现为载流子的净产生或净复合。其中，过剩载流子的产生与外界因素有关，而过剩载流子的复合与外界因素无关。

## § 4.4 非平衡载流子

### 4.4.2 非平衡载流子的产生和复合



在  $t \leq 0$  时，系统受到外界扰动，产生过剩载流子；在  $t = 0$  外界扰动撤除，过剩载流子开始复合。

载流子产生的机制是价带电子能够获得足够能量，从价带跃迁到导带。

## § 4.4 非平衡载流子

### 4.4.2 非平衡载流子的产生和复合

在外界因素存在时，载流子的产生率为： $G = G_0 + G_L$

如果系统处于稳定状态  $G = G_0 + G_L = R$

因此  $G_L = G - G_0 = R - G_0 = R - R_0 = U$

其中 $G_L$ 为过剩载流子的产生率， $U$ 为净复合率

$$\begin{aligned} G_L = U &= K(p_0 + \Delta p)(n_0 + \Delta n) - Kp_0n_0 \\ &= K\Delta p(\Delta p + n_0 + p_0) \end{aligned}$$

$$G_L = U \approx \Delta p K(n_0 + p_0) = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{\Delta n}{\tau} \quad (\text{驰豫近似})$$

其中  $\tau = \frac{1}{K(n_0 + p_0)}$  是过剩载流子的寿命

$$n = n_0 + G_L \tau \quad p = p_0 + G_L \tau$$

## 1. 非平衡过剩载流子的寿命

□引起产生的外界因素撤除后，非平衡过剩载流子存在的特征时间即其平均生存时间  $\tau$  称为非平衡载流子的寿命。

□小注入情形下，非平衡载流子的复合满足驰豫近似条件；非平衡载流子的复合过程满足：

$$\frac{d\Delta p(t)}{dt} = -\frac{\Delta p}{\tau} \quad \longrightarrow \quad \Delta p(t) = (\Delta p)_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中：  $(\Delta p)_0$  是  $t=0$  时的浓度，  $\tau$  是过剩载流子的寿命

□非平衡载流子的复合率为：  $\frac{\Delta n}{\tau}$  或  $\frac{\Delta p}{\tau}$



## 1. 非平衡过剩载流子的寿命(life time)

□光电导的衰变—非平衡载流子寿命测量方法之一

光照产生非平衡载流子  $\Delta n$  和  $\Delta p$

使得电导增加

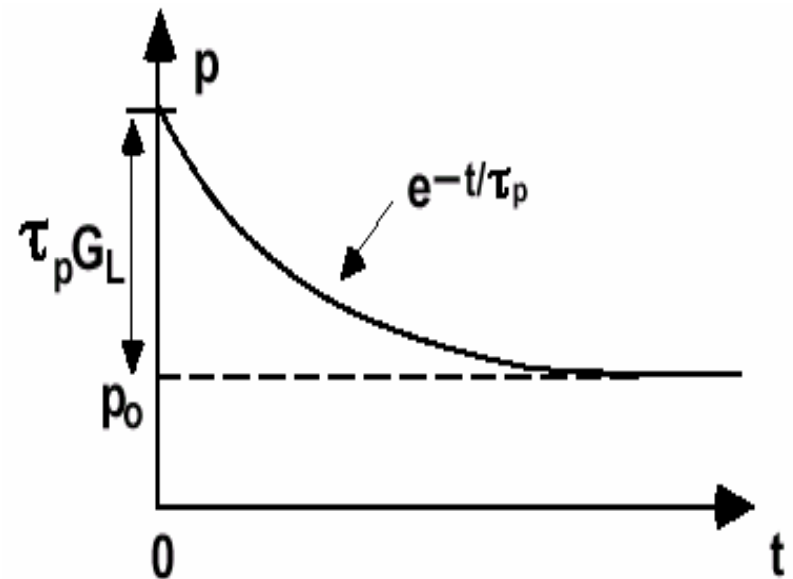
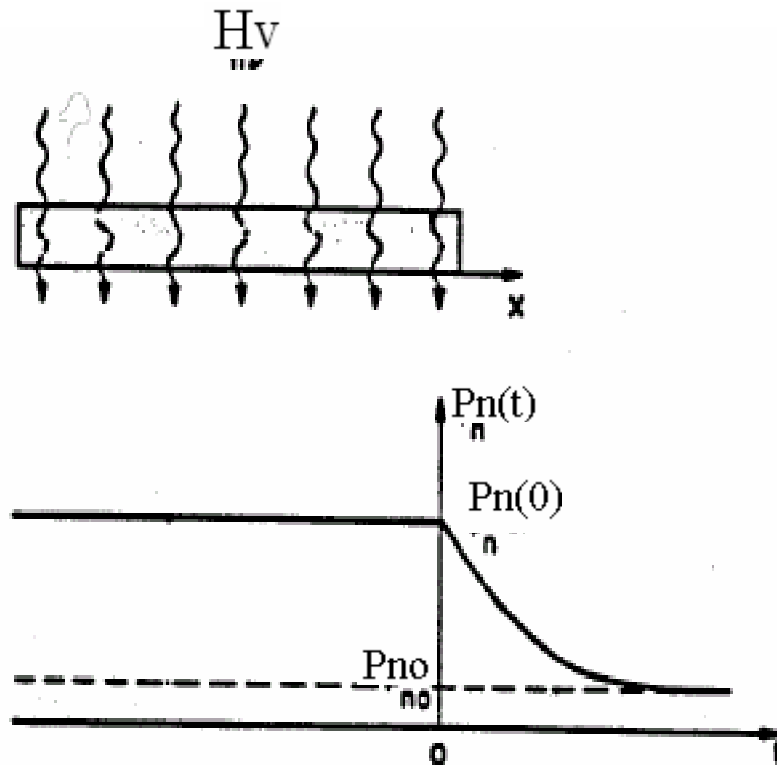
$$\Delta\sigma = \Delta ne\mu_n + \Delta pe\mu_p = e(\mu_n + \mu_p)\Delta n$$

则在光照撤除后，光电导衰减满足关系式

$$\Delta\sigma(t) = (\Delta\sigma)_0 e^{-t/\tau}$$

## 2. 非平衡载流子的扩散

□如果在表面注入非平衡载流子，则在体内会存在非平衡载流子浓度梯度，发生由表面向体内的扩散。例：光照N型Si表面，将产生非平衡载流子，少子为空穴，其浓度为 $\Delta p$



## 2. 非平衡载流子的扩散

□扩散时满足扩散方程：
$$S = -D_p \frac{d\Delta p}{dx}$$

□稳定扩散情形：扩散引起的单位时间、单位体积内空穴数的增加应该等于单位时间、单位体积内由于复合减少的空穴数，于是得到稳定扩散方程：

$$-\frac{dS}{dx} = D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} = \frac{\Delta p}{\tau}$$

□求解得稳定扩散时的通解：

$$\Delta p = Ae^{-\frac{x}{L_p}} + Be^{\frac{x}{L_p}}$$

□扩散的特征长度--扩散长度

$$L_p = \sqrt{D_p \tau}$$

## 2. 非平衡载流子的扩散

□ 电流连续方程：
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - R_n + G_n$$

可改写为 
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - \frac{n - n_0}{\tau_n}$$
 其中 
$$\tau_n \equiv \frac{n - n_0}{R_n - G_n}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = n\mu_n \frac{\partial E}{\partial x} + \mu_n E \frac{\partial n}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n - n_0}{\tau_n}$$

□ 无电场情形 
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n - n_0}{\tau_n}$$

□ 稳定情形：扩散引起的单位时间、单位体积内空穴数的增加应该等于单位时间、单位体积内由于复合减少的空穴数，于是得到满足稳定扩散方程：

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0 = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n - n_0}{\tau_n}$$

## 2. 非平衡载流子的扩散

□在样品足够厚时,  $x \rightarrow \infty, \Delta p = 0$

$$\Delta p = (\Delta p)_0 e^{-\frac{x}{L_p}}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x \Delta p(x) dx}{\int_0^{\infty} \Delta p(x) dx} = L_p$$

$L_p = \sqrt{D_p \tau}$  表征非平衡载流子在半导体中扩散距离的特征长度

□在样品足够薄时,  $x = L, \Delta p = 0$

$$\Delta p = (\Delta p)_0 (1 - x / L)$$

## 4.4.3 载流子的复合(Recombination)机制

复合过程有两大类：

□直接复合(**direct recombination**)：导带电子与价带空穴直接跃迁复合 (**band to band**)

□间接复合(**indirect recombination**)：导带电子与价带空穴通过禁带中的复合中心辅助发生复合

复合过程需要同时满足动量守恒和能量守恒原理。

### 1. 直接复合

- 导带电子直接跃迁 (**transition**) 到价带，与价带中空穴发生复合的过程。
- 直接复合时通常发射光子，光子能量为电子跃迁损失的能量，通常为禁带的能量值。

## 4.4.3 载流子的复合机制

### 1. 直接复合

将讨论在直接复合情形下，载流子和过剩载流子的复合规律。

载流子的直接复合率：

$$R = rnp$$

考虑热平衡情形，产生率与复合率达到动态平衡，即：

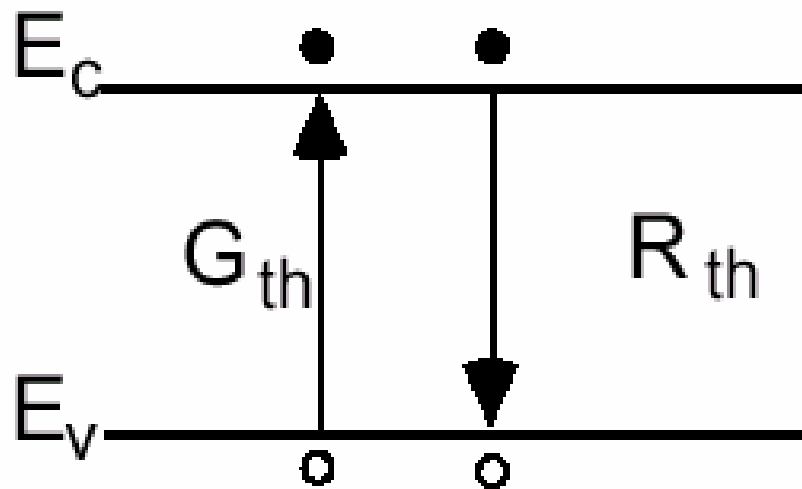
$$G_0 = R_0 = rn_0p_0 = rn_i^2$$

由于与直接复合相关的产生率与  $n$  和  $p$  无关，因此，可以假设其与热平衡时产生率相同，于是：

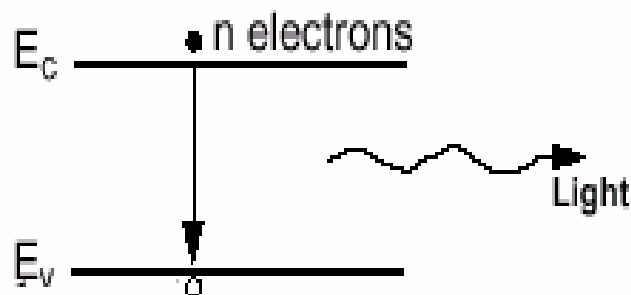
$$G = G_0 = R_0 = rn_0p_0 = rn_i^2$$

非平衡载流子的净复合率：

$$U_d = R - G = r(np - n_i^2)$$



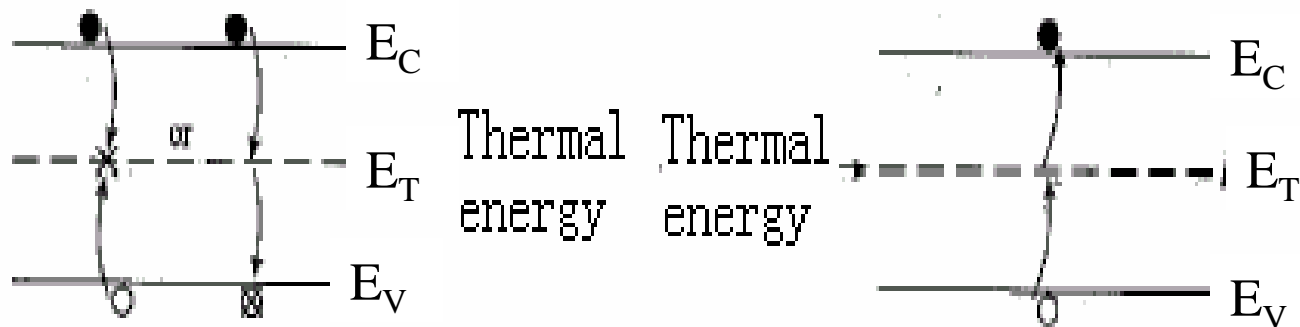
### Direct (Band to Band) Recombination



## 4.4.3 载流子的复合机制

### 2. 间接复合

□ 导带电子和价带空穴间的复合是通过禁带中允许电子占据的杂质或缺陷中心能级的辅助而发生的，复合过程一般为电子首先从导带跃迁到禁带中的缺陷或杂质能级，然后再跃迁到价带与空穴发生复合，这种复合称为间接复合，这些杂质和缺陷能级称为复合中心



*R-G center recombination*

*R-G center generation*

间接复合的方式

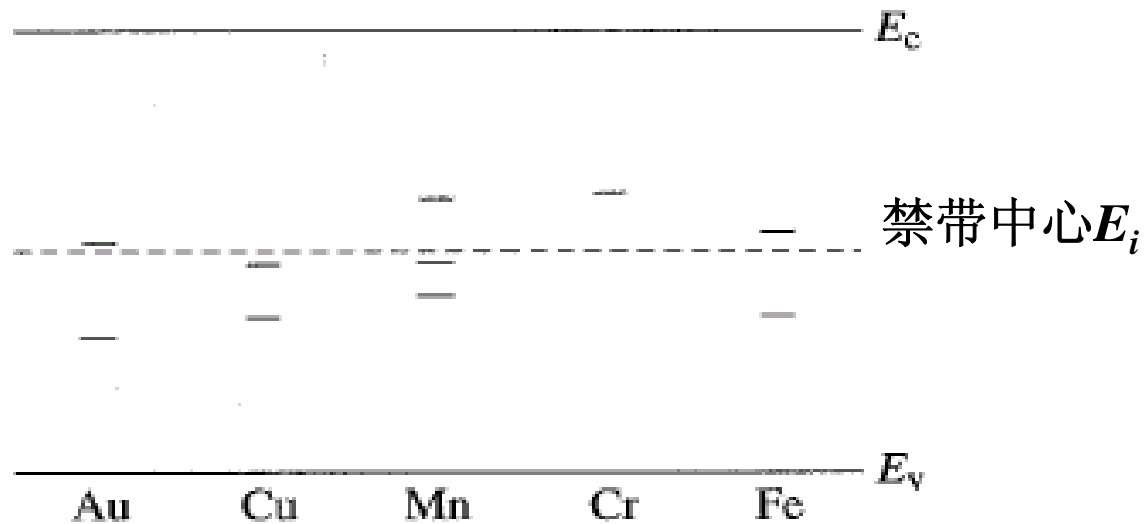


## 4.4.3 载流子的复合机制

### 2. 间接复合

有效的复合中心一般为禁带中央附近的深能级态，后面我们将通过理论分析（即所谓的SRH理论）得出该结论

#### Indirect Recombination (Through Trapping Levels)



能级在带隙中心的金属杂质

## 4.4.3 载流子的复合机制

### 2. 间接复合

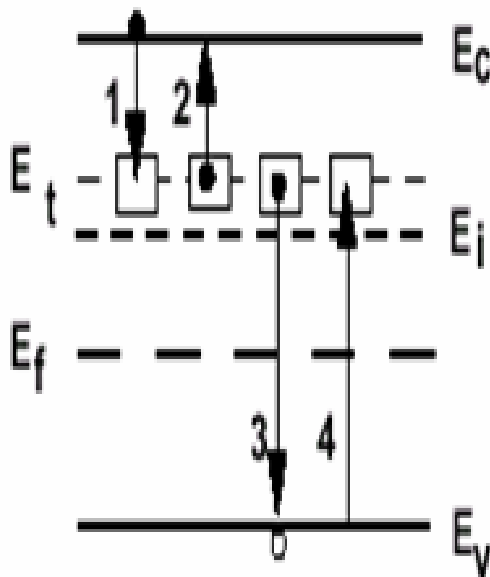
□ 在存在复合中心的间接复合过程中，通常存在的4个微观过程

•过程1：电子的俘获，导带电子跃迁到复合中心的电子空位上。

•过程2：电子的发射，复合中心的电子跃迁到导带。

•过程3：空穴的俘获，复合中心的电子跃迁到价带，与价带空穴复合，等价于价带空穴跃迁到复合能级。

•过程4：空穴的发射，价带电子跃迁到复合中心中的电子空位，等价于复合中心的空穴发射到价带，在价带产生空穴。



"1" = 电子的俘获

"2" = 电子的发射

"3" = 空穴的俘获

"4" = 空穴的发射

箭头标明电子移动方向

## □间接复合的4个微观过程

假设在间接复合过程中，系统处于热平衡，则电子随能量的概率分布函数满足费米分布函数

$$f_t = \frac{1}{1 + e^{(E_t - E_f)/kT}}$$

电子和空穴的俘获与发射的几率与费米狄拉克统计分布函数有关，也就是和费米能级有关。费米能级 $E_f$ 只在热平衡条件下时有效

$$np = n_i^2$$

考虑到这一点：

$N_t f_t$       平衡时电子填充的复合/陷阱中心的浓度

$N_t (1 - f_t)$       平衡时空穴填充的复合/陷阱中心的浓度

## □ 间接复合的4个微观过程

电子俘获率  $R_1$  和发射率  $R_2$

电子的俘获几率与电子复合中心的俘获截面  $\sigma_n$  有关。假设导带中电子浓度和的没被电子填充的陷阱原子浓的乘积成正比关系，其中  $V_{thn}$  为电子热运动速度 ( $10^7 \text{ cm/s}$ )。

$$R_1 = V_{thn} \sigma_n n N_t (1 - f_t)$$

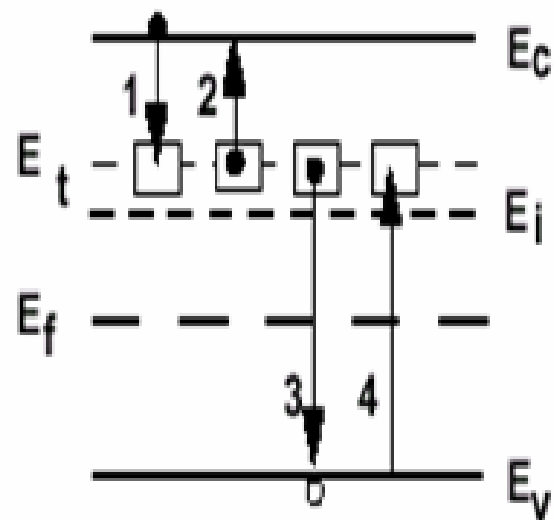
同理有：  $R_2 = e_n N_t f_t$        $e_n$  为发射几率

空穴俘获率  $R_3$  和发射率  $R_4$

对于电子，同理可以有：

$$R_3 = V_{thp} \sigma_p p N_t f_t$$

$$R_4 = e_p N_t (1 - f_t)$$



## □间接复合的4个微观过程

在热平衡条件下： $R_1=R_2$ ， $R_3=R_4$ 有

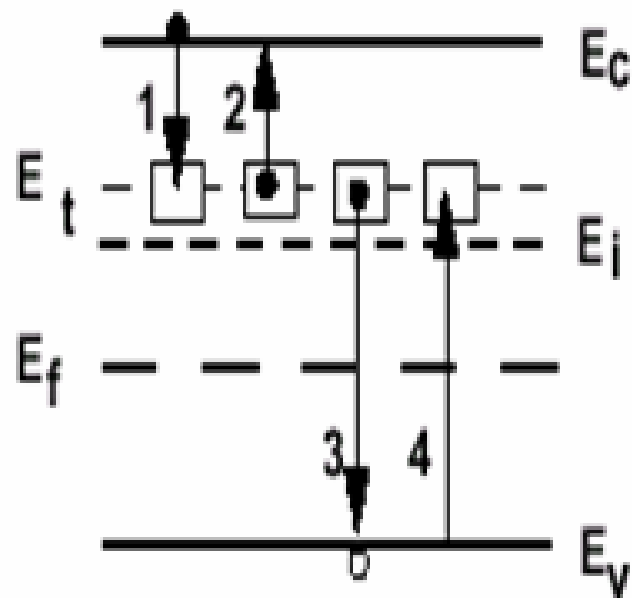
$$V_{thn} \sigma_n n N_t (1 - f_t) = e_n N_t f_t$$

$$V_{thp} \sigma_p p N_t f_t = e_p N_t (1 - f_t)$$

代入n, p等值, 即可算出发射几率

$$e_n = V_{thn} \sigma_n n_i e^{(E_t - E_i)/kT}$$

$$e_p = V_{thp} \sigma_p n_i e^{(E_i - E_t)/kT}$$

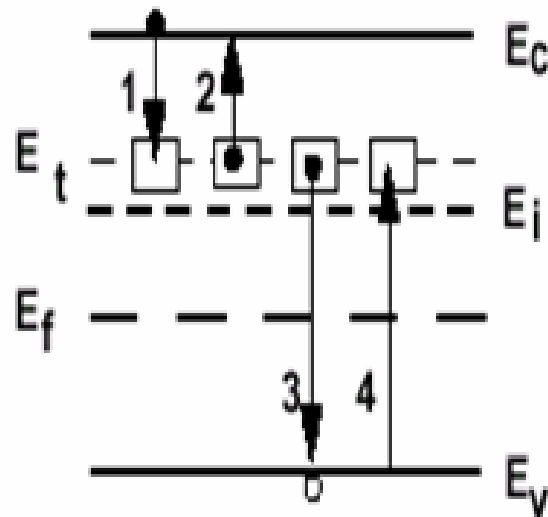


## □间接复合的4个微观过程

可以推测，当：

$$E_t \rightarrow E_C \Rightarrow e_n \uparrow$$

$$E_t \rightarrow E_V \Rightarrow e_p \uparrow$$



这说明，复合中心能级靠近导带或价带时，复合中心能级对对电子或空穴的发射相当于电子或空穴的俘获过程将占主导（有效的施主或受主掺杂）

上面推测的发射和俘获速率都是在平衡态得到的，考虑有光照的情形，产生过剩载流子，假设为小注入情况，则上面的各方程仍然适用。

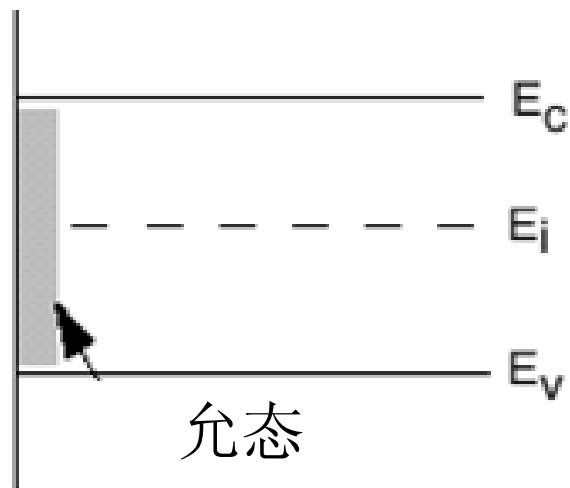
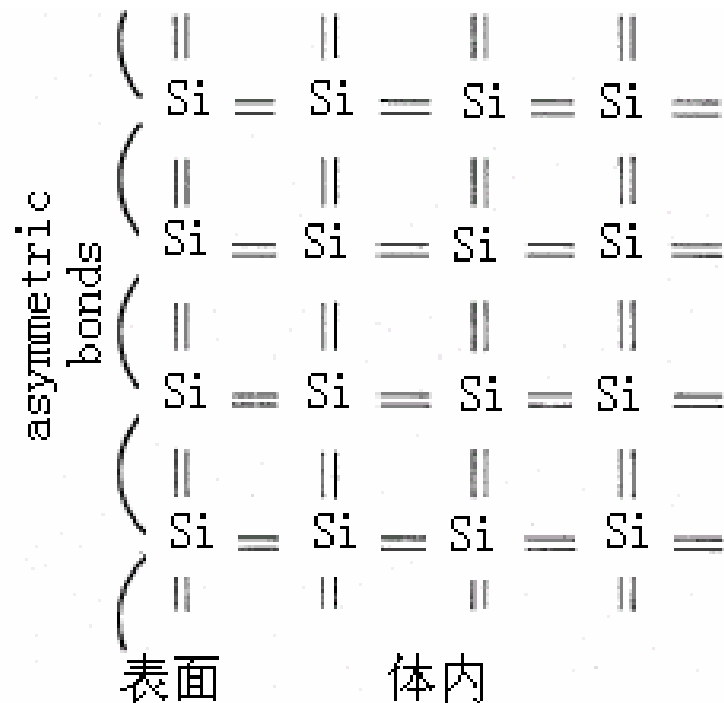
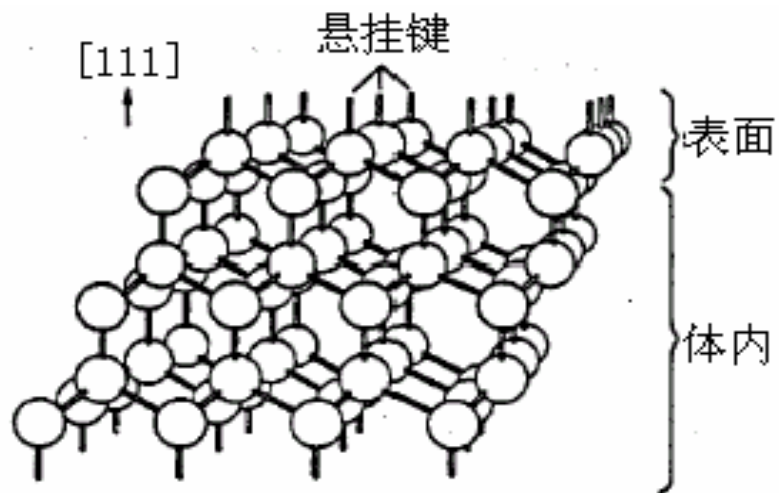
考虑出现过剩载流子的非平衡情形，在小注入（**low injection level**）的条件下，以上结论仍然成立

## 4.4.3 载流子的复合机制

### 3. 表面复合

□如果在半导体表面存在大量的复合中心，则在半导体表面发生显著的间接复合，成为表面复合

□复合中心来源于表面缺陷和杂质，如表面的悬挂键等

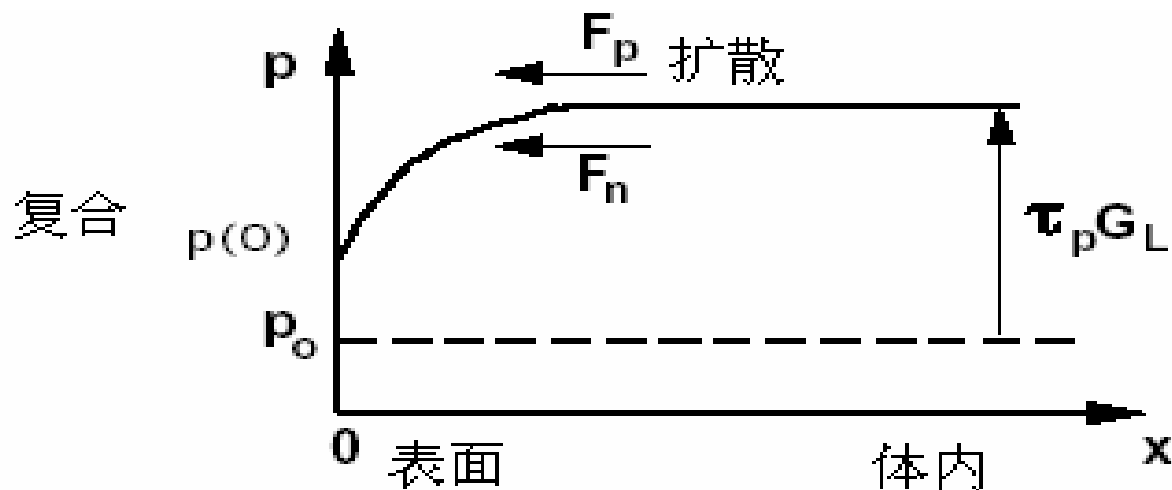


实际上也存在对应于表面产生的过程，表面产生满足类似的方程

## 4.4.3 载流子的复合机制

### 表面复合（或复合）满足的方程式

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= G_L - \frac{p - p_0}{\tau_p} - \frac{1}{qA} \frac{dI_p}{dx} \\ &= G_L - \frac{p - p_0}{\tau_p} - D_p \frac{d^2 p}{dx^2}\end{aligned}$$



假设空穴漂移电流可以忽略不计，连续性方程给出空穴的扩散电流



## 4.4.3 载流子的复合机制

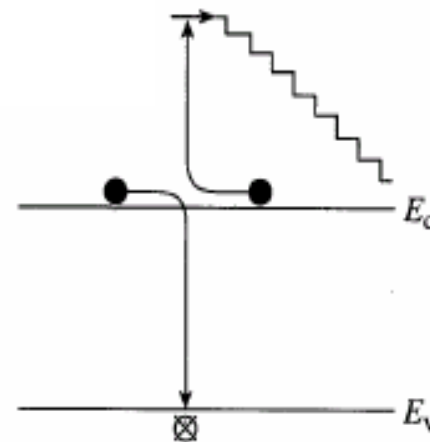
### 4. 俄歇复合

□ 电子与空穴复合的方式之一。导带电子与价带空穴发生跃迁复合时，不是通过辐射光子或声子的方式释放能量，而是通过碰撞将多余的能量传递给导带中其它电子，使得其获得较高的动能。然后，获得高能的电子通过与晶格的连续散射方式（不断放出声子）逐渐释放其较高动能的过程

□ 俄歇复合属非辐射复合，其中没有光子（**Photon**）的发射

### Auger Recombination

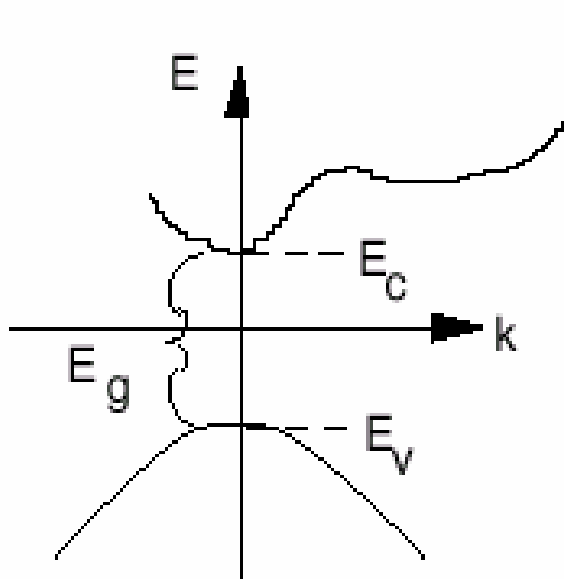
俄歇复合



## 4.4.3 载流子的复合机制

### 5. 直接禁带半导体和间接价带半导体

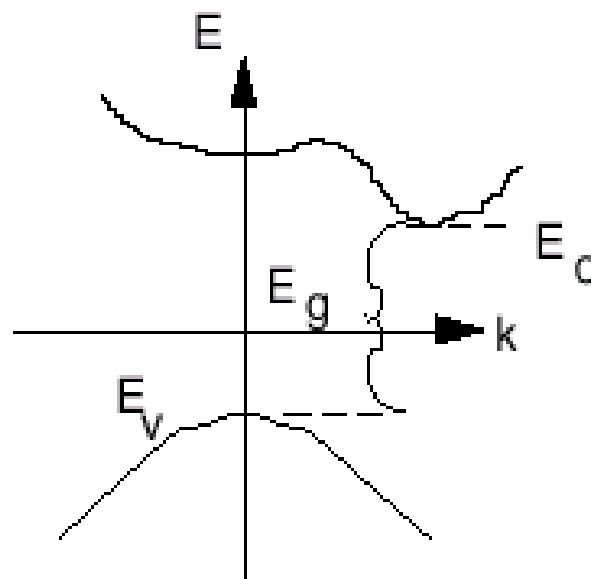
- 直接禁带半导体：导带底与价带顶的  $k$  值相同
- 间接禁带半导体：导带底与价带顶的  $k$  值不同



"Direct Band-gap Semiconductor"

e. g. GaAs

直接禁带半导体



"Indirect Band-gap Semiconductor"

e.g. Si, Ge

间接禁带半导体

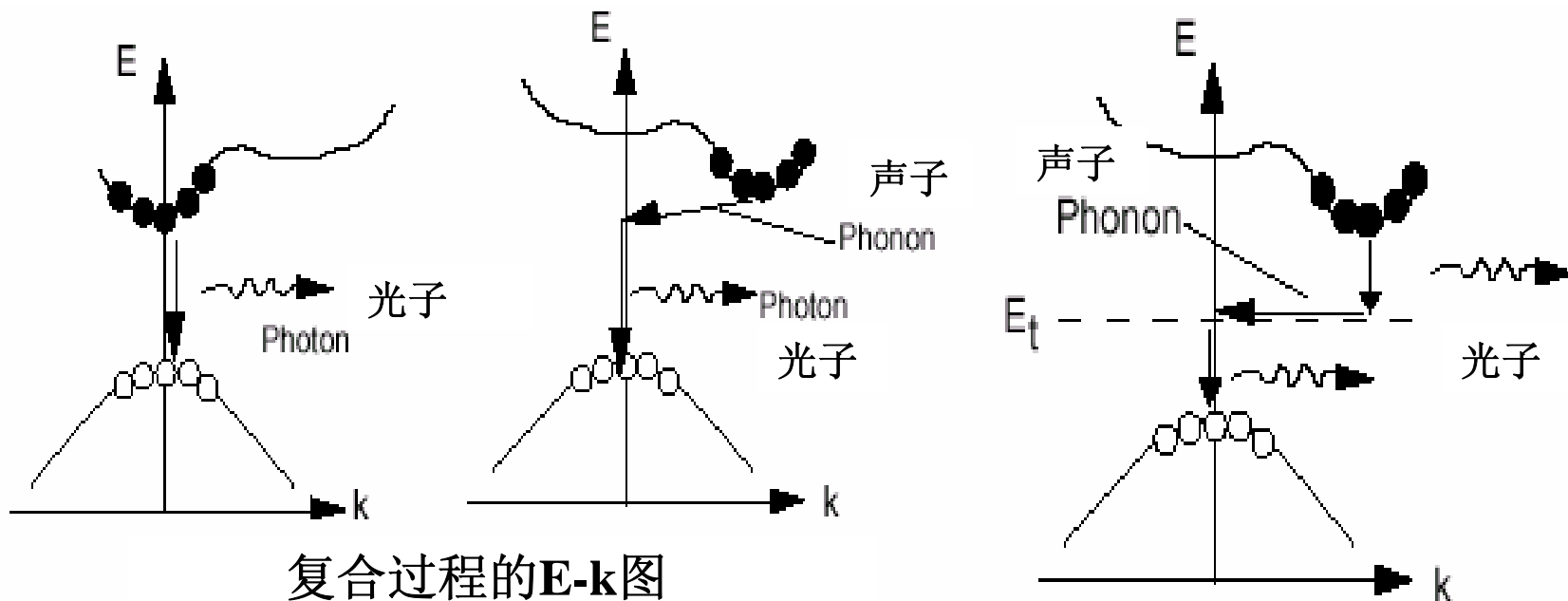
## 4.4.3 载流子的复合机制

### 5. 直接禁带和间接价带半导体的复合

□ 复合过程满足动量和能量守恒定律

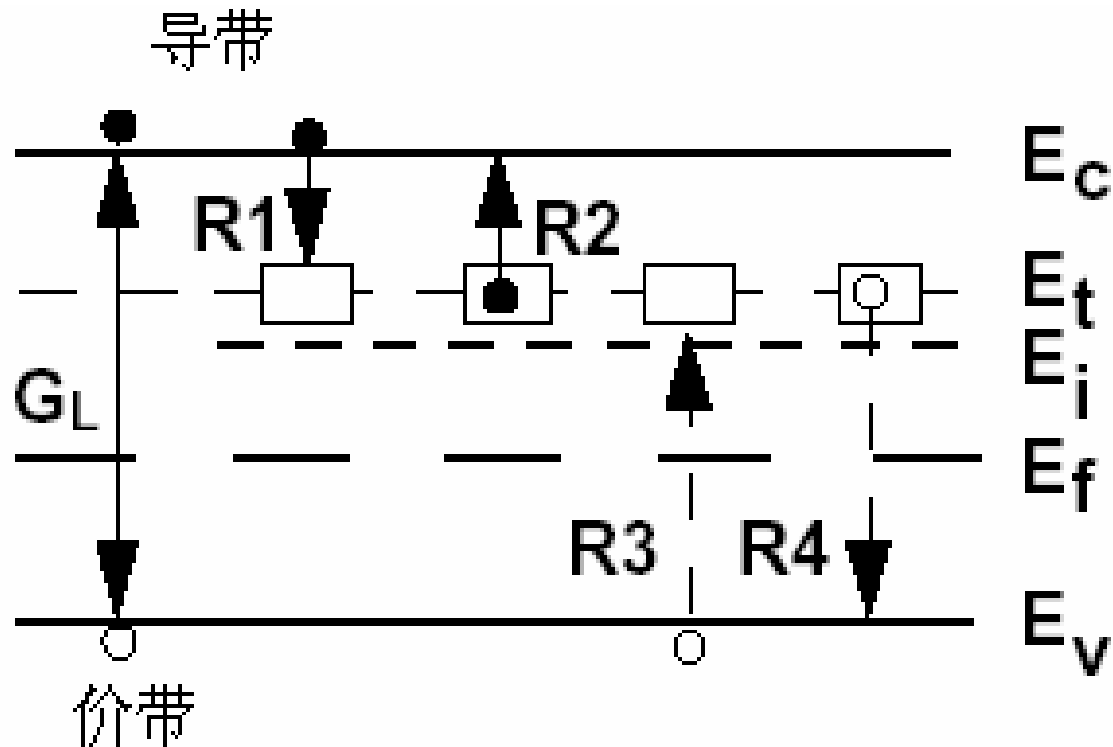
□ 直接禁带半导体的复合：辐射光子

□ 由于光子的动量很小，间接禁带半导体发生直接复合时：在辐射光子的同时，通常需要有声子的参予



## 4.4.4 SHR理论

□考虑间接复合的4个微观过程



虚线箭头指出空穴运动方向

考虑存在稳定的过剩载流子情形下（非平衡），导带的电子和价带的空穴稳定不变，维持常数

则载流子的产生率等于复合率，即：

$$G_L = U = R_1 - R_2 = R_3 - R_4$$

$$\begin{aligned} & V_{thn} \sigma_n N_t (1 - f_t) - e_n N_t f_t \\ &= V_{thp} \sigma_p p N_t f_t - e_p N_t (1 - f_t) \end{aligned}$$

假设电子和空穴的净复合率相等，即：

$$V_{thn}\sigma_n = V_{thp}\sigma_p = V_{th}\sigma$$

也就是说电子和空穴的俘获系数相同，根据方程（5）和（6），可得

$$f_t = \frac{n + n_i e^{(E_i - E_t)/kT}}{n + p + 2n_i \cosh[(E_i - E_t)/kT]}$$

则获得的净的复合率为：

$$\begin{aligned} U &= R_1 - R_2 \\ &= \frac{V_{th}\sigma N_t (pn - n_i^2)}{n + p + 2n_i \cosh[(E_t - E_i)/kT]} \end{aligned}$$

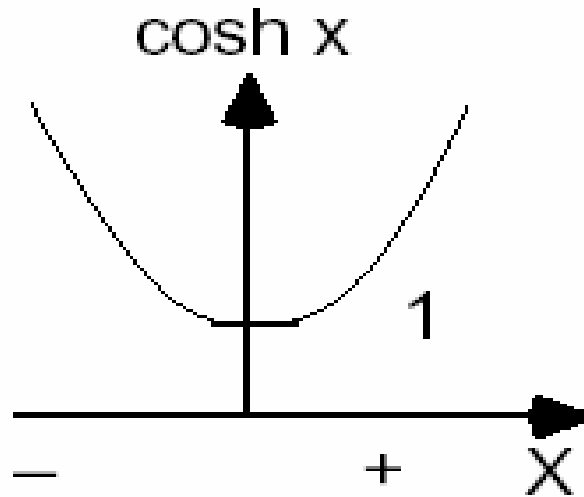
以上结果是非常重要的，是讨论载流子复合规律的基础，该理论表达式由Shockley, Read和Hall导出，称为SRH复合理论。基于SRH复合理论可以导出一些重要的结论：

1. 促进复合的“动力”或复合速率与  $(pn - n_i^2)$  成正比，也就是说，在热平衡态时，由于  $pn = n_i^2$ ，净复合率  $U=0$ 。

2. 当  $E_t = E_i$  时，净复合率  $U$  取最大值，也就是说，复合陷阱能级位于本征费米能级附近（在室温时在禁带中央）时，是最有效的复合中心。

3. 当  $E_t \rightarrow E_C$  时，电子的俘获几率很大而空穴的俘获几率很小；

当  $E_t \rightarrow E_V$  时，空穴的俘获几率很大而电子的俘获几率很小，以上两种情况都使得净复合率不大。



假设  $E_t = E_i, U = \frac{V_{th} \sigma N_t (pn - n_i^2)}{n + p + 2n_i}$

举例:  $N_d$  掺杂情形:  $n \gg p, n \gg n_i$

$$U \approx \frac{V_{th} \sigma N_t (pn - n_i^2)}{n}$$

$n_i^2 = n_{n0} p_{n0}$  平衡时

$n \approx n_{n0}$  小注入时

小注入情形:  $n \sim n_0 \gg n_i$



$$\begin{aligned}
 U &= \frac{V_{th} \sigma N_t (p n_{n0} - n_{n0} p_{n0})}{n_{n0}} \\
 &= V_{th} \sigma N_t (p - p_{n0}) \\
 &= V_{th} \sigma N_t \Delta p \\
 &= \frac{\Delta p}{\tau_p}
 \end{aligned}$$

其中， $\tau_p = \frac{1}{V_{th} \sigma N_t}$  是少数载流子（空穴）的寿命

在N-型半导体中，电子浓度很大，复合中心上空穴浓度稍微增加，则为数众多的电子就可以引起足够大的电子俘获速率与空穴俘获速率相平衡，因而限制复合的将是少子（空穴）寿命。

复合率与少子的寿命相关

$$U = \frac{V_{th} \sigma N_t (p_n - p_{n0})}{1 + \left( \frac{2n_i}{n_{n0}} \right) \cosh \left[ \frac{(E_t - E_i)}{kT} \right]} = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_r}$$

其中:

$$\tau_r = \frac{1 + \left( \frac{2n_i}{n_{n0}} \right) \cosh \left[ \frac{(E_t - E_i)}{kT} \right]}{V_{th} \sigma N_t}$$

为载流子复合寿命

考虑另一种不平衡状态  $pn < n_i^2$  也就是说有空穴电子对的减少

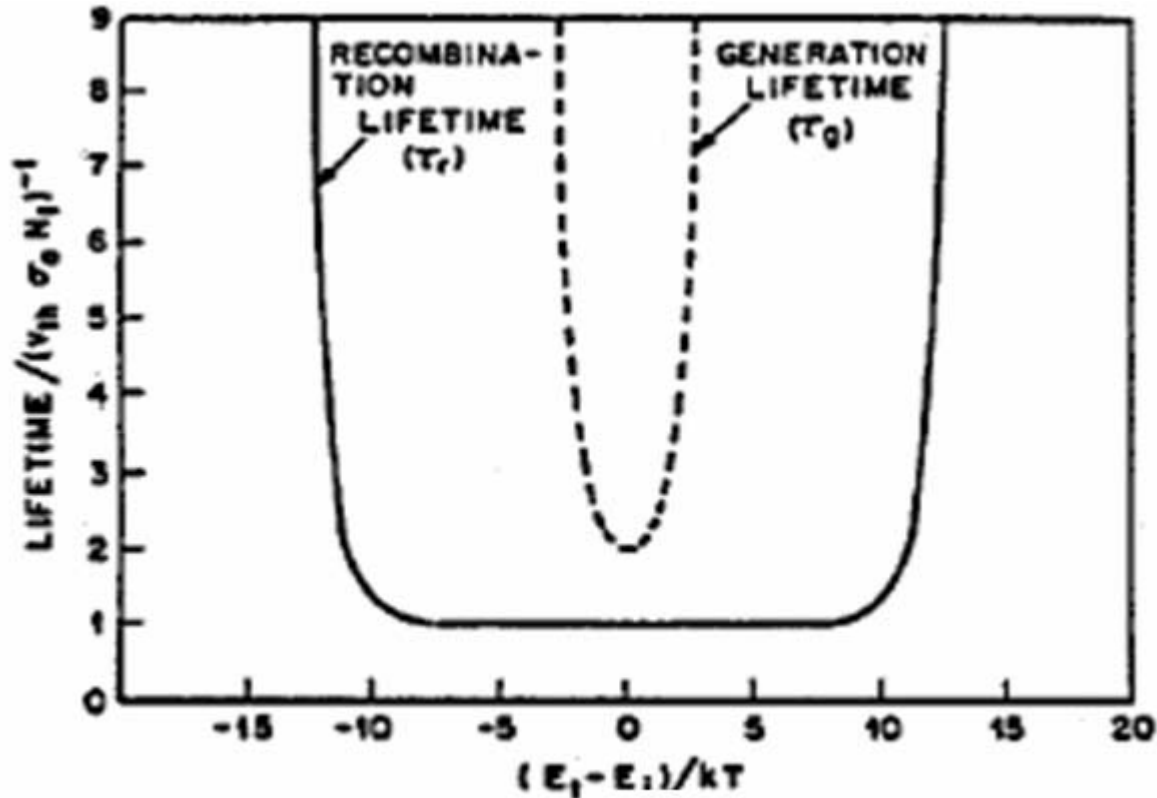
$$G = -U$$

$$\approx \frac{V_{th} \sigma N_t n_i}{2 \cosh \left[ \frac{(E_t - E_i)}{kT} \right]} = \frac{n_i}{\tau_g}$$

其中

$$\tau_g = \frac{2 \cosh[(E_t - E_i) / kT]}{V_{th} \sigma N_t}$$

为载流子产生的寿命



$\tau_r$  &  $\tau_g$  vs  $E_t$

可以看出，当 $E_t = E_i$ 时， $\tau_r$ 和 $\tau_g$ 同时取最小值，通常 $\tau_r \neq \tau_g$

## § 4.5 准费米能级

### 4.5.1 准平衡态和准费米能级

### 4.5.2 准平衡下载流子的表达式

前面，我们在讨论发生过剩载流子小注入现象时，过剩载流子的注入对多数载流子来说，影响不大，也就是说其所对应的载流子分布函数变化很小，费米能级变化可忽略，可近似看作平衡态处理；但对少数载流子来说，载流子的浓度变化很大，因此，其载流子分布函数远远偏离平衡态，费米能级变化很大，需要仔细处理。

## § 4.5 准费米能级

### 4.5.1 准平衡态和准费米能级

- 平衡态时，整个系统包括各个子系统之间均达到热平衡，有统一的费米能级
- 掺杂半导体存在三个子系统：导带、价带、杂质能级
- 当系统从非平衡向平衡态过渡的过程在小注入情形下可看成是一个驰豫过程时，系统的驰豫过程往往通过载流子的碰撞和复合实现的
- 在同一能带内电子的驰豫过程很快，但不同能带间的驰豫过程较慢，所以，在由非平衡态向平衡态恢复的驰豫过程中，各子带系统很快就能达到热平衡，但各子系统间达到热平衡所需的时间较长
- 将各子系统已达到热平衡，但子系统之间尚未达到热平衡的状态称为准平衡态

## § 4.5 准费米能级

### 2. 准费米能级

□准平衡态下，由于导带和价带分别达到各自的热平衡，在各自的子系统中，平衡的统计函数仍可适用，因此可分别引入自己的费米能级，称为准费米能级

□导带的费米能级称为电子费米能级  $E_F^n$  ，价带的费米能级称为空穴费米能级  $E_F^p$

$$n = N_C e^{-(E_C - E_F^n)/kT} \quad p = N_V e^{-(E_F^p - E_V)/kT}$$

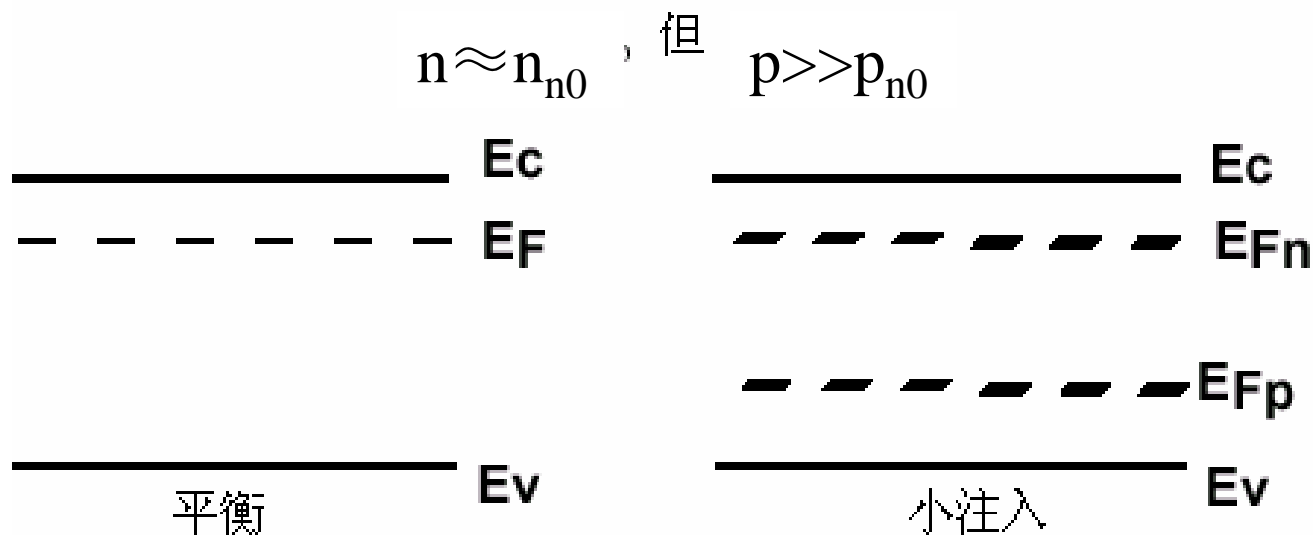
□导带和价带间的不平衡表现在它们的准费米能级不重合

## § 4.5 准费米能级

### 2. 准费米能级

□在小注入条件下，非平衡载流子多子浓度与热平衡时接近，准费米能级与平衡费米能级偏离很小，但非平衡少子浓度远高于平衡时浓度，准费米能级与平衡费米能级偏离很大，因此在产生和复合时，少子的准费米能级变化很大

例子：光照小注入情形

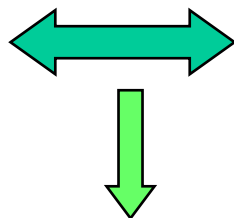


费米能级变化大的系统对载流子的输运性质影响较大

## § 4.6 半导体的基本物理方程

### 1. 泊松方程

泊松方程



高斯定律

描述半导体中静电势的变化规律

静电势由本征费米能级 $E_i$ 的变化决定

$$\varphi_i = -\frac{E_i}{q}$$

能带向下弯，  
静电势增加



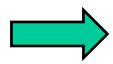
方程的形式1

$$\nabla^2 \varphi(x, t) = -\frac{\rho}{\epsilon_s \epsilon_0}$$

方程的形式2

$$E = \frac{1}{\epsilon_s \epsilon_0} \int_S \rho(x) dx$$

电荷  
密度



可动的 — 载流子 (n,p)

$\rho(x)$



固定的 — 电离的施主、受主

$$\rho = q(N_D^+ - N_A^- + p - n)$$

特例:

均匀Si  
中, 无外  
加偏压  
时,

方程RHS  
= 0,

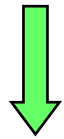
静电势为  
常数

## 2. 电流连续方程

电流连续方程



可动载流子  
的电荷守恒



电子:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{j}_n + (G - R)$$

空穴

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{j}_p + (G - R)$$

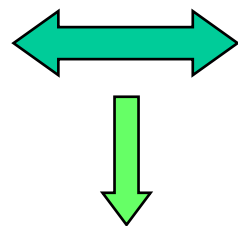
热平衡时:

产生率 = 复合率

$$np = n_i^2$$

# 电流连续方程

电流密度方程



载流子的运输方程

在漂移-扩散模型中

方程形式1

$$j_n = q\mu_n n E + qD_n \nabla n$$

$$j_p = q\mu_p p E - qD_p \nabla p$$

漂移项

扩散项

## 爱因斯坦关系

$$D_n = \frac{k_B T}{q} \mu_n \quad D_p = \frac{k_B T}{q} \mu_p$$

## 波耳兹曼关系

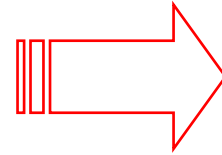
$$n = n_i e^{q(\phi_i - \phi_f)/kT}$$

$$p = n_i e^{q(\phi_f - \phi_i)/kT}$$

费米势

$$\phi_f = -\frac{E_f}{q}$$

$$\phi_i = -\frac{E_i}{q}$$



## 方程形式2

$$J_n = -qn\mu_n \nabla \phi_n$$

$$J_p = -qn\mu_p \nabla \phi_p$$

电子和空穴的准费米势:

$$\phi_n \equiv \phi_i - \frac{kT}{q} \ln \frac{n}{n_i}$$

$$\phi_p \equiv \phi_i + \frac{kT}{q} \ln \frac{p}{n_i}$$